



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL. REGRESIÓN Y CORRELACIÓN LINEAL.

Alumno: Martínez Caño, Javier

Tutor: Prof. D. José Rodríguez Avi
Dpto: Estadística e Investigación Operativa

Cotutora: Prof. D^a. Valentina Cueva López
Dpto: Estadística e Investigación Operativa

Junio, 2021

Resumen

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo general describir y analizar todo lo relacionado al aprendizaje de la Estadística Bidimensional en el alumnado de 4º de E.S.O., así como sus enseñanzas. Este trabajo ha requerido para su realización el desarrollo de una fundamentación curricular, donde se ha realizado un estudio comparativo entre libros de texto de dos editoriales, además de la normativa vigente. Posteriormente, se ha procedido al desarrollo de una fundamentación epistemológica, en la cual se ha estudiado de manera rigurosa el tema número 62, “Series estadísticas bidimensionales. Regresión y correlación lineal. Coeficiente de correlación. Significado y aplicaciones”, del temario oficial de las oposiciones de Matemáticas. Por otro lado, se ha elaborado una fundamentación didáctica con el objetivo de comparar algunos artículos científicos relacionados con las dificultades posibles que el alumnado puede hallar en el estudio del tema mencionado. Por último, se ha diseñado una proyección didáctica donde se establecen los ejercicios propuestos para su aplicación práctica dentro y fuera de clases.

Palabras clave: Matemáticas, Estadística bidimensional, Coeficiente de correlación, Proyección didáctica, Regresión y correlación lineal, E.S.O.

Abstract

The main objective of this Master's Thesis is to describe and analyze everything related to the learning of Two-Dimensional Statistics in 4th year Compulsory Secondary Education students, as well as their teachings. In order to carry out this work, it required the development of a curricular foundation, where a comparative study has been carried out between textbooks from two publishers, in addition to current regulations. Consequently, an epistemological foundation was carried out, in which topic number 62, "Two-dimensional statistical series, Regression and linear correlation. Correlation coefficient. Meaning and applications", from the official syllabus of the Mathematics exams, has been rigorously studied. On the other hand, a didactic foundation has been developed with the aim of comparing some scientific articles related to the potential difficulties that students may encounter in the study of the subject previously mentioned. Ultimately, a didactic projection has been designed where the proposed exercises are established for their practical application in-class and in-house.

Keywords: Mathematics, Two-dimensional statistics, Correlation coefficient, Regression and linear correlation, Didactic projection, Compulsory Secondary Education.

ÍNDICE

1.	Introducción.....	1
2.	Objetivos.....	2
2.1	Objetivo General	2
2.2	Objetivos Específicos.....	2
3.	Fundamentación Curricular	3
3.1	Correspondencia entre el contenido de los libros de texto y el currículo.....	4
3.2	Comparación del contenido en los libros de texto	6
3.3	Actividades propuestas en los libros.....	9
4.	Fundamentación Epistemológica	12
4.1	Definición de distribución bidimensional y contextualización	12
4.2	Tipo de tabla estadística bidimensional.....	13
4.3	Relación Funcional y relación estadística	14
4.4	Nube de puntos, correlación y recta de regresión	15
4.5	Grados de correlación	17
4.6	Tipos de correlación	19
4.7	Coeficiente de correlación	22
4.8	Regresión lineal. Rectas de regresión	25
4.9	Estimación de resultados	26
5.	Fundamentación didáctica	27
5.1	Análisis de los errores más comunes en Estadística Bidimensional	27
6.	Proyección Didáctica.....	30
6.1	Título de la unidad didáctica	30
6.2	Justificación	30
6.3	Contextualización del centro educativo	31
6.4	Objetivos	33
6.5	Competencias clave	37
6.6	Contenidos	38
6.7	Metodología.....	40
6.8	Recursos	41
6.9	Atención a la diversidad	42

6.10	Temporalización, sesiones y actividades.....	46
	<i>Sesión 1</i>	46
	<i>Sesión 2</i>	47
	<i>Sesión 3</i>	50
	<i>Sesión 4</i>	51
	<i>Sesión 5</i>	53
	<i>Sesión 6</i>	54
	<i>Sesión 7</i>	56
	<i>Sesión 8</i>	56
7.	Conclusiones	58
8.	Bibliografía	59
8.1	Legislación	60

1. Introducción

Este Trabajo Fin de Máster es elaborado y presentado para la obtención del título de “Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza en Idiomas. Especialidad en Matemáticas”. Su realización será desarrollada a través de la aplicación de los distintos conocimientos y experiencias adquiridas durante las sesiones de clase del Máster en el curso académico 2020/2021.

El trabajo se compone de dos partes, siendo la primera aquella en la cual se efectúa el desarrollo de tres fundamentos:

- ❑ Fundamentación curricular: En este apartado se efectúa un estudio comparativo entre dos libros de texto de 4º de E.S.O de Matemáticas (uno de la editorial Edelvives y otro de Anaya), con el fin de verificar de manera crítica y objetiva si éstos cumplen con lo establecido en la normativa vigente, de lo cual se espera obtener similitudes o diferencias entre sus estructuras, desarrollo de contenido y actividades expuestas.
- ❑ Fundamentación epistemológica: Donde se desarrolla exhaustivamente el tema número 62 “Series estadísticas bidimensionales. Regresión y correlación lineal. Coeficiente de correlación. Significado y aplicaciones.” del temario oficial de las oposiciones de Matemáticas.
- ❑ Fundamentación didáctica: El objetivo de este apartado es el análisis de las dificultades potenciales que presenta el alumnado en el proceso de aprendizaje con respecto al tema de “Series estadísticas bidimensionales. Regresión y correlación lineal”, con la finalidad de ajustar las unidades didácticas propuestas para que todo el cuerpo estudiantil tenga la posibilidad de lograr los objetivos esperados.

Para finalizar, se muestra la Unidad Didáctica junto a sus respectivos apartados a ser aplicados en el tema, como son los objetivos, la metodología, las competencias clave, los recursos, la temporalización, las actividades y la evaluación.

La normativa que se ha tomado de referencia para el desarrollo del presente Trabajo de Fin de Máster ha sido la *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)*, así como el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre*, por el que se establece el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato, y el *Decreto 111/2016, de 14 de junio*, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

2. Objetivos

2.1 Objetivo General

- Desarrollar una Unidad Didáctica sobre la Estadística Bidimensional, correlación y regresión lineal.

2.2 Objetivos Específicos

- Comprender e indagar todo lo concerniente a la Estadística Bidimensional en la etapa de 4º de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.), con respecto a los distintos aspectos de la fundamentaciones curriculares, epistemológicas y didácticas.
- Definir las posibles dificultades que puede encontrar el alumnado de 4º de E.S.O. en el aprendizaje del contenido de Estadística Bidimensional.
- Comparar dos libros de texto utilizados en las clases de la asignatura de Matemáticas de 4º de E.S.O. de forma objetiva, de acuerdo a la legislación educativa vigente y al perfil del alumnado al que van destinados los conocimientos.
- Desarrollar el tema número 62 de las oposiciones de secundaria de la especialidad de Matemáticas “Series estadísticas bidimensionales. Regresión y correlación lineal. Coeficiente de correlación. Significado y aplicaciones.”
- Introducir al alumnado en herramientas tecnológicas como el programa del paquete Office, Microsoft Excel, para la tabulación y graficación de la estadística bidimensional.
- Conseguir aportar a los alumnos una base sólida en cuanto a la Estadística Bidimensional.
- Exponer la temporalización de la Unidad Didáctica con su respectiva programación.

3. Fundamentación Curricular

El principal objetivo en este apartado es realizar un estudio comparativo entre el currículo escolar propuesto en el Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (BOJA) para 4º de E.S.O. de Matemáticas, y dos libros de texto de dicho curso de Matemáticas de distintas editoriales. Este estudio pretende comprobar si los libros cumplen o no lo estipulado en la normativa vigente y obtener posibles similitudes o diferencias entre la estructura, el desarrollo del contenido y las actividades propuestas en dichos libros.

Se debe por lo tanto tener en cuenta lo expuesto por la normativa en el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre*, por el que se establece el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato, ya que este decreto determina que el currículo estará integrado por:

- Los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa.
- Las competencias o capacidades para activar y aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, para lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.
- Los contenidos o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias.
- La metodología didáctica, que comprende tanto la descripción de las prácticas docentes como la organización del trabajo de los docentes; los estándares y resultados de aprendizaje evaluables.
- Los criterios de evaluación del grado de adquisición de las competencias y del logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa.

Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias, ámbitos, áreas y módulos en función de las enseñanzas, las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado. Además de esto, el decreto precisa la necesidad de la potenciación del aprendizaje por competencias, integradas en los elementos curriculares para propiciar una renovación en la práctica docente y en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Hace hincapié en nuevos enfoques en el aprendizaje y evaluación, que han de suponer un importante cambio en las tareas que han de resolver los alumnos y planteamientos metodológicos innovadores.

En el *Decreto 111/2016, de 14 de junio*, el artículo 4.2, dispone que la concreción de los elementos que integran el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía será regulada por Orden de la Consejería competente en materia de educación. En esta regulación se toma como eje del proceso de enseñanza y

aprendizaje el desarrollo de las capacidades del alumnado y la integración de las competencias clave. Para ello, se incorporan en cada una de las materias o ámbitos que conforman la etapa, los elementos que se consideran indispensables para la adquisición de dichas competencias, con el fin de facilitar al alumnado el acceso a los componentes fundamentales de la cultura y la preparación para su incorporación a estudios posteriores o para su inserción laboral futura. Asimismo, los elementos transversales toman una especial relevancia en las distintas materias de la Educación Secundaria Obligatoria, integrándose con el resto de elementos curriculares y garantizando así el sentido integral de la educación que debe caracterizar la etapa.

Los libros de texto utilizados para el desarrollo de esta fundamentación curricular pertenecen a las editoriales de Edelvives y Anaya. El libro de la Editorial Edelvives tiene por nombre “ESO 4. Matemáticas Académicas” y el libro de la Editorial Anaya “ESO 4. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas”.

3.1 Correspondencia entre el contenido de los libros de texto y el currículo

Según el *Decreto 111/2016, de 14 de junio*, en las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en 4º ESO en el Bloque de Estadística y Probabilidad, que es el número 5, debe poder el alumnado realizar correctamente la elaboración e interpretación de tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando medios como: lápiz y papel, calculadora u ordenador, y hacer un análisis crítico a los resultados obtenidos.

El tema escogido en este Trabajo Final de Máster se encuentra en ese quinto bloque de la normativa descrita. Los libros tomados como referencia para la comparación de su contenido con el contenido marcado y estipulado en el Boletín Oficial de Estado (BOE) desarrollan un contenido mucho más amplio del exigido, ayudando así al alumnado a alcanzar un mayor nivel académico y un conocimiento superior. En la siguiente tabla, se muestran los contenidos específicos de los libros utilizados:

Libro	Número y título de la unidad	Contenido
Editorial Anaya	Unidad 10. “Distribuciones Bidimensionales”	1. Distribuciones bidimensionales 2. El valor de la correlación 3. La recta de regresión para hacer estimaciones
Editorial Edelvives	Unidad 12. “Estadística”	1. Estadística bidimensional 2. Dependencia aleatoria y funcional 3. Correlación entre dos variables 4. Coeficiente de correlación lineal. Interpretación 5. Regresión lineal. Rectas de regresión

Tabla 1. Contenidos de los libros (Elaboración propia)

Evidentemente, los libros de texto utilizados presentan un contenido totalmente apropiado que satisface tanto la presencia de contenidos básicos, como la de criterios evaluativos; además de estándares de aprendizaje evaluables establecidos en las normativas actualmente aplicables: los del Bloque 5.

Cabe destacar que estos libros cumplen con la demanda de los conceptos contenidos en la fundamentación epistemológica requeridos para la efectución del estudio en cuestión (Ver apartado 4).

En la editorial Anaya se ven expuestos los desarrollos descriptivos de las distribuciones bidimensionales, donde se habla de la correlación y su valor, seguido de las estimaciones en base a la regla de regresión.

Por su parte, la editorial Edelvives detalla los conceptos relativos a la estadística. Como se puede apreciar en el cuadro, los puntos extraídos de la unidad son cuatro, los cuales representan una completa exposición de las definiciones más relevantes y básicas, a través de un panorama completo de los distintos términos, y señalamiento y explicación de las distintas fórmulas.

A continuación, se efectuará una comparación relativa a los contenidos específicos expuestos en dichos libros de texto.

3.2 Comparación del contenido en los libros de texto

		Edelvives	Anaya
Apartado 1	Nombre	Estadística bidimensional	Distribuciones Bidimensionales
	Nº de páginas	4	6
	Contenido	Define el concepto de una variable estadística bidimensional y usa ilustraciones cotidianas para hacer énfasis en su definición. Explica y ejemplifica los dos tipos de tablas estadísticas bidimensionales que son la simple y la de doble entrada. Por último, explica el diagrama de dispersión o nube de puntos mediante 3 ejemplos junto con una actividad resuelta.	Define y expone el desarrollo del concepto y su influencia científica en los distintos campos de estudio aplicables. Fundamenta los conceptos de relación estadística, nube de puntos, correlación, regresión lineal y los tipos de correlación. Hay 8 ejemplos para definir los conceptos básicos de las distribuciones bidimensionales.
Apartado 2	Nombre	Dependencia aleatoria y funcional	El valor de la Correlación
	Nº de páginas	2	2
	Contenido	Expone relaciones y explica cómo poder identificar el tipo de dependencia, a través de procedimientos que cumplen con dicha identificación. Señala tres tipos de dependencia: aleatoria o estadística, funcional e independiente. Presenta tres gráficas para representar visualmente las diferencias de cada una.	Describe y explica la conceptualización de la correlación a través de gráficas y fórmulas que funcionan como ejemplo visual para facilitar la comprensión. Tiene 1 ejercicio resuelto en este apartado para poder estimar las correlaciones correctamente dependiendo de los casos expuestos

Apartado 3	Nombre	Correlación entre dos variables	La recta de regresión para hacer estimaciones
	Nº de páginas	2	2
	Contenido	Define el concepto de correlación, y procede por señalar los 7 distintos tipos de la misma que se pueden apreciar: Lineal, curvilínea, positiva o directa, negativa o inversa, nula, funcional y aleatoria/estadística; representa dichos tipos a través de siete gráficas. Procede a indicar la función del coeficiente de correlación, el cual viene dado en función de la covarianza.	Representa de manera técnica las distintas definiciones del contenido y complementa las descripciones a través de gráficas. Explica detalladamente las condiciones pertinentes para realizar estimaciones en distribuciones bidimensionales y en qué casos no realizarlas. Tiene 2 ejemplos para la ilustración de estas condiciones y un ejercicio resuelto.
Apartado 4	Nombre	Coeficiente de correlación lineal. Interpretación	
	Nº de páginas	2	
	Contenido	Explica el funcionamiento del coeficiente de correlación lineal de Pearson, y su fórmula. Describe los distintos tipos de correlaciones que pueden ser interpretados a través del coeficiente, representadas a partir de cinco gráficas.	

Apartado 5	Nombre	Regresión lineal. Rectas de regresión	
	Nº de páginas	4	
	Contenido	Expone exhaustivamente la función, fórmula y desarrollo de la recta de regresión, y los casos en que se da; además de expresar el coeficiente de regresión junto con su influencia y aplicación. Después se describe la fiabilidad de acuerdo al valor del coeficiente y sus casos. Además, dedica un apartado para explicar estadística bidimensional con Excel, donde enseña a utilizar Excel para graficar y obtener resultados estadísticos.	

Tabla 2: Comparación del contenido (Elaboración propia)

Como se puede apreciar en la tabla 2, el libro de Editorial Edelvives abarca más páginas para desarrollar el tema de *Estadística Bidimensional* que el de editorial Anaya, mientras que el de editorial Edelvives tiene 14 páginas donde desarrolla los conceptos y términos relacionados a la estadística bidimensional, el de editorial Anaya solamente tiene 10 páginas. A pesar de esta diferencia de 4 páginas entre una editorial y otra, ambos libros desarrollan plena y cabalmente el contenido curricular del tema ya referido. La diferencia entre ambos consiste en que el libro de Editorial Edelvives abarca los conceptos de tablas estadísticas bidimensionales y explica en dos páginas mediante imágenes la estadística bidimensional con Excel; además, el libro de editorial Edelvives (como observaremos en el apartado siguiente) tiene más actividades propuestas que el de Anaya lo que hace que tenga más páginas que el de Anaya.

3.3 Actividades propuestas en los libros

En este epígrafe se realizará una comparación y análisis entre las actividades que contienen ambos libros de Matemáticas de 4º de E.S.O. de las dos editoriales ya mencionadas.

En lo referente a las actividades expuestas para el desarrollo práctico en cada uno de los apartados con sus respectivos contenidos (aquellas seguidas de las explicaciones de cada epígrafe), la editorial Anaya tiene un total de 17 actividades, de las cuales 9 no tienen imágenes ni gráficos; de estas, 8 presentan un grado dificultad bajo, 8 medio y 1 alto.

La editorial Edelvives, por su parte, dedica la sustancial cantidad de 49 actividades, de las cuales 19 no tienen imágenes; de estas, 28 tienen un grado de dificultad bajo, 17 medio y 4 altos.

Como es evidente, la editorial Edelvives cuenta con más actividades en estas secciones, y presentan más apartados. Cabe destacar que, la mayoría de las actividades propuestas en ambas editoriales se encuentran debidamente contextualizadas como se muestra en la siguiente imagen, donde se presentan situaciones que perfectamente se podrían dar en el día a día de una persona.

ACTIVIDADES

29

Durante el viaje de estudios de fin de etapa, un grupo de alumnos realizó un cambio de divisas, de euros a libras esterlinas, en una oficina bancaria:

Euros (x_i)	12	24	18	30	6	36
Libras (y_i)	10	20	15	25	5	30

Halla el coeficiente de correlación de los datos y razona de qué tipo de correlación se trata en función del valor obtenido.

30

La masa y la altura de un grupo de personas es:

Masa (kg), x_i	80	75	70	78	72
Altura (cm), y_i	185	170	165	171	168

a. Halla su coeficiente de correlación.
b. Representa gráficamente los datos en una nube de puntos.
c. Describe el tipo de correlación existente entre las variables.

31

Representa los siguientes datos mediante una nube de puntos e indica cuál de estos valores te parece más apropiado para el coeficiente de correlación:

0,9 0,1 -0,8 -0,6

x_i	2	4	5	6	8	9
y_i	6	2	1	15	12	7

32

Calcula el coeficiente de correlación del siguiente conjunto de datos e interprétalo:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	17	15	14	12	9	9	6

33

Se ha llevado a cabo un estudio sobre los tiempos realizados por unos nadadores en la prueba de 100 metros estilo libre y su estatura y se ha comprobado que no existe ninguna relación entre ambas variables. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a. ¿Cuál crees que es el valor del coeficiente de correlación lineal?
b. Inventa una nube de puntos que represente la distribución de este conjunto de datos.

34

Explica el significado de los siguientes coeficientes de correlación en una distribución bidimensional:

a. $r = 1$ c. $r = 0,25$ e. $r = 0$
b. $r = -0,1$ d. $r = 0,92$ f. $r = -1$

35

Se conoce el coeficiente de correlación de dos variables bidimensionales cuyos valores son $r_1 = -0,7$ y $r_2 = 0,1$.

a. ¿En cuál de las dos distribuciones se ajustarán mejor los datos a una función lineal?
b. Utilizando un diagrama de dispersión, representa gráficamente, de forma aproximada, cada conjunto de valores definido por los coeficientes de correlación anteriores.

36

En el caso de que entre los elementos de una variable estadística bidimensional haya independencia estadística, cabe concluir que la covarianza es nula. Sin embargo, ¿se puede afirmar el proceso contrario? Es decir, ¿implica el hecho de que la covarianza de las variables sea cero que haya una independencia estadística entre dichas variables?

37

Interpreta el valor del coeficiente de correlación de:

x	1	2	4	6	7	9	10
y	-1	-4	-10	-16	-19	-25	-28

Imagen 1. Ejemplo de actividades contextualizadas (Editorial Edelvives).

En la siguiente tabla se muestran los ejercicios de los libros analizados de ambas editoriales comparadas según el nivel de dificultad de las actividades y si poseen dichas actividades algún tipo de imagen o gráfico.

Editorial		Anaya			Edelvives		
Grado de dificultad		Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto
Imagen/Gráfico	Sí	2	5	1	17	10	3
	No	6	3	0	11	7	1
	Total por categoría	8	8	1	28	17	4
Total de todas las actividades		17			49		

10

Porcentaje de actividades según el grado de dificultad	47,06%	47,06%	5,88%	57.14%	34.70%	8.16%
--	--------	--------	-------	--------	--------	-------

Tabla 3. Comparación de Actividades (elaboración propia)

Adicionalmente, ambos libros añaden, después de los epígrafes, varias hojas con ejercicios para que el alumnado pueda resolver y practicar para una posible evaluación final. En la siguiente tabla (tabla 4) se comparan las actividades de ambas editoriales colocadas en hojas aparte de los epígrafes que contienen la teoría.

Editorial		Anaya			Edelvives		
Grado de dificultad		Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto
Imagen/Gráfico	Sí	9	4	3	2	4	2
	No	5	2	2	3	1	1
	Total por categoría	14	6	5	5	5	3
Total de todas las actividades		25			13		
Porcentaje de actividades según el grado de dificultad		56%	24%	20%	38.46%	38.46%	23.08%

Tabla 4. Comparación de Actividades finales (elaboración propia)

Como ya se ha expresado, la editorial Edelvives contiene más del doble de actividades que la editorial Anaya (tomando en cuenta ambas tablas), facilitando así la tarea del docente, permitiéndole atender a otras partes de su deber de profesorado más allá de tener que elaborar y dictar ejercicios, como por ejemplo tratar aparte a aquellos estudiantes con un nivel más modesto en los temas en cuestión, mientras asigna los ejercicios más exigentes a los de un nivel más avanzado.

Tras las comparaciones realizadas se puede considerar que ambos libros de texto son muy desarrollados y se ajustan apropiadamente a la normativa estipulada en la BOJA, aunque se puede comprobar que, dependiendo del aspecto a tener en cuenta, una editorial destaca más que la otra.

Respecto a la introducción al tema y a los contenidos, destaca más la editorial Anaya, ya que hace una breve reseña histórica para poner en antecedentes al alumnado y, además expone ejemplos antes del desarrollo de los contenidos, cosa que la editorial Edelvives no hace.

Al fijarnos en el contenido y en las actividades resueltas, la editorial Edelvives posee un contenido más completo y expone más ejemplos, ya que mientras el libro de Editorial Anaya solamente explica en 3 epígrafes el temario expuesto en este Trabajo Final de Máster, la editorial Edelvives posee 5 apartados y le dedica más páginas para desarrollar más ampliamente el contenido de *Estadística Bidimensional*. Sin embargo, se puede apreciar en la tabla 4 que en referencia a las actividades finales, es el libro de Editorial Anaya que tiene un mayor número de actividades y con un grado de dificultad superior al de Edelvives.

4. Fundamentación Epistemológica

Para la realización de esta fundamentación epistemológica fueron utilizados como referencias bibliográficas ambos libros de las dos editoriales ya mencionadas (Anaya y Edelvives)

4.1 Definición de distribución bidimensional y contextualización

Las distribuciones bidimensionales son aquellas en las que a cada individuo le corresponden los valores de dos variables, las representamos por el par (x, y) .

Vamos a suponer que en un equipo de biólogos se encuentran estudiando un grupo de pelícanos, procediendo a realizar análisis anatómicos de estos, comenzando con la medición de la distancia entre sus alas extendidas; esto da como resultado una distribución estadística de una variable (unidimensional). De la misma manera, se halla que la distribución de sus pesos es también unidimensional.

Ahora bien, si ambas variables (la distancia y el peso) son atendidas en conjunto, entonces el resultado sería una distribución bidimensional. Dicho esto, entre dichas variables se encuentra lo que termina denominándose como correlación, que no es más que el grado de relación existente entre ambas.

Francis Galton fue el pionero de este estudio de dos variables en conjunto, en cierto modo inspirado en los de Charles Darwin, su primo, quien había establecido que ciertas características de los padres pueden tener influencia sobre los hijos; es decir, estos últimos terminan adquiriendo las mismas características de los primeros. Se puede decir entonces que las nociones relativas a las distribuciones bidimensionales tienen sus bases y fundamentos en estudios biológicos.

Aunque para Francis Galton existía la posibilidad de experimentar con humanos (con el fin de extraer conclusiones en relación a estos), al final concluyó que no disponía de datos suficientes para garantizar la factibilidad de los posibles experimentos, por lo cual procedió, como Mendel, a efectuar la experimentación con guisantes en su lugar. Los resultados dieron a luz el término de la regresión, cayendo en cuenta además de la

gran escala de aplicaciones en diversas ciencias que sus descubrimientos podrían aportar.

Consecuentemente, Karl Pearson continuó con el trabajo que Galton había comenzado, siendo el primero quien identificó y determinó el término del coeficiente de correlación negativa, además de diseñar y poner en práctica varios métodos matemáticos a través de los cuales se pudiera inferir los distintos valores de una variable partiendo de aquellos presentes en otra.

4.2 Tipo de tabla estadística bidimensional

La información obtenida se recoge en una tabla bidimensional de frecuencias, que pueden ser de dos tipos: simples o de doble entrada.

La *tabla bidimensional simple* está formada por tres filas o columnas en las que se representa ordenadamente los valores de las variables y sus frecuencias. Está indicada para casos con pocos datos y pocos valores o ninguno repetidos.

X_i	X_1	X_2	...	X_i	...	X_m
Y_i	Y_1	Y_2	...	Y_j	...	Y_n
f_{ij}	f_{11}	f_{22}	...	f_{ij}	...	f_{mn}

Tabla 5. Tabla bidimensional simple (Elaboración propia)

La *tabla bidimensional de doble entrada* está formada por tantas filas y columnas como valores tengamos de cada una de las variables, más una fila y una columna más para indicar los totales. Está indicada para casos con bastantes datos, en los que, para cada valor de una variable, existen varios valores de la otra.

	X_1	X_2	...	X_i	...	X_m	$F_{i.}$
Y_i	f_{11}	f_{21}	...	f_{i1}	...	f_{m1}	Σf_{i1}
Y_2	f_{12}	f_{22}	...	f_{i2}	...	f_{m2}	Σf_{i2}
...	...	...	...	...	...	...	...
Y_j	f_{1j}	F_{2j}	...	f_{ij}	...	f_{mj}	Σf_{ij}

...	...	...	...	...	...	...	...
Y_n	f_{1n}	f_{2n}	...	f_{in}	...	f_{mn}	Σf_{in}
F_j	Σf_{1j}	Σf_{2j}	...	Σf_{ij}	...	Σf_{jn}	N

Tabla 6. Tabla bidimensional de doble entrada (Elaboración propia)

4.3 Relación Funcional y relación estadística

Definición 1: Se dice que dos variables (" " e " ") están relacionadas funcionalmente cuando conocida la primera se puede saber con exactitud el valor de la segunda.

Definición 2: Se dice que dos variables (" " e " ") están relacionadas estadísticamente cuando conocida la primera se puede estimar aproximadamente el valor de la segunda.

Para entender mejor las definiciones de estas dos relaciones, se tomará como ejemplo el recibo del gas.

En la siguiente tabla aparecen datos correspondientes a muchas viviendas: el consumo de gas, el coste del recibo y el número de personas que habitan en cada casa.

X	Consumo de Gas (m ²)	165	102	115	136	163	140	87	250
Y	Coste del Recibo (€)	88.5	57	63.5	74	87.5	76	49.5	131
Z	Número de personas que viven en la vivienda	6	3	5	4	8	5	3	9

Tabla 7. Ejemplo de tipos de relación (Editorial Anaya)

Las variables x e y de la tabla anterior corresponden a una relación funcional, ya que cumplen con la función: Como se puede observar, podemos obtener el valor de una variable (ya sea o) a partir de la otra.

Las variables e también están relacionadas: A más personas en la casa, hay un mayor consumo de gas. Sin embargo, no es una relación funcional debido a que no podemos obtener un valor preciso y exacto conociendo solamente el número de personas que habitan en una vivienda; sí se puede obtener un valor estimado, pero no un valor exacto. A este tipo de relaciones se les conoce como *relaciones estadísticas*.

4.4 Nube de puntos, correlación y recta de regresión

Si en una población a cada individuo le medimos simultáneamente dos variables, x e y , tenemos una *distribución bidimensional*. La representación gráfica de la distribución da lugar a un conjunto de puntos llamado *nube de puntos* o *diagrama de dispersión*. El diagrama de dispersión es una herramienta que ayuda a identificar la posible relación entre dos variables. Representa la relación entre dos variables de forma gráfica, lo que hace más fácil visualizar e interpretar los datos.

El análisis conjunto de dos o más características de una misma población nos permite analizar si existe algún tipo de relación entre ellas y, en su caso, determinarla. Esta relación puede ir:

- Desde la ausencia total de relación, es decir, que una variable no aporte nada sobre lo que ocurre a la otra variable. Esto se denomina *Independencia*.
- Hasta que sabiendo lo que ocurre en una variable se sepa exactamente lo que ocurre con la otra variable, por ejemplo mediante una relación funcional exacta. Esto se denomina *dependencia funcional*

En general entre dos variables habrá una relación intermedia entre las dos citadas de modo que una variable pueda ayudar a conocer el valor que tomará la otra. Esto se denomina *asociación estadística*, de modo que la independencia y la dependencia funcional son dos casos extremos. Cuando existe esa relación estadística entre los valores de la distribución, se dice que hay *correlación entre las variables*. Entonces, podemos definir la *correlación* como la relación o dependencia que existe entre las dos variables de una distribución bidimensional. La correlación es una herramienta fundamental en el análisis estadístico dado que permite analizar hasta qué punto se puede conocer sobre un fenómeno estadístico, en el que desempeña un papel fundamental la incertidumbre, a través de la información proporcionada por medio de otra, u otras variables adicionales.

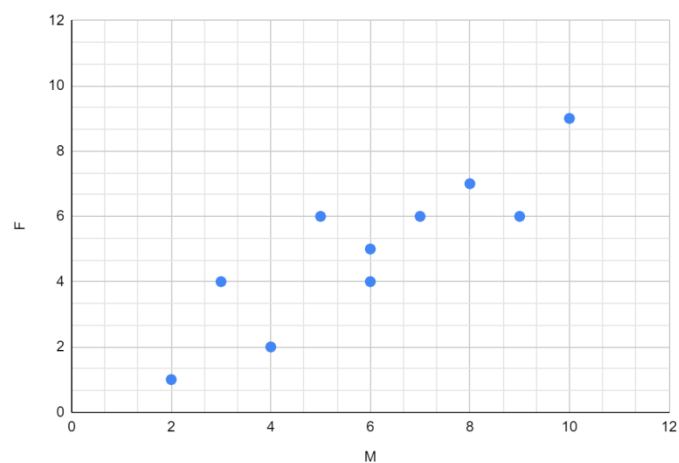
Esta correlación se aprecia porque la nube de puntos es relativamente estrecha y, en algunos casos, se puede trazar una recta que se amolda a ella. Esta recta es denominada estadísticamente como '*recta de regresión*'.

Para representar gráficamente la definición de los conceptos anteriormente expuestos, procederemos a aplicar el siguiente ejemplo: Tenemos las notas de diez estudiantes en una escuela de una clase en dos asignaturas: Manualidades (x) y Filosofía (y); lo cual se ve expuesto en la tabla a continuación:

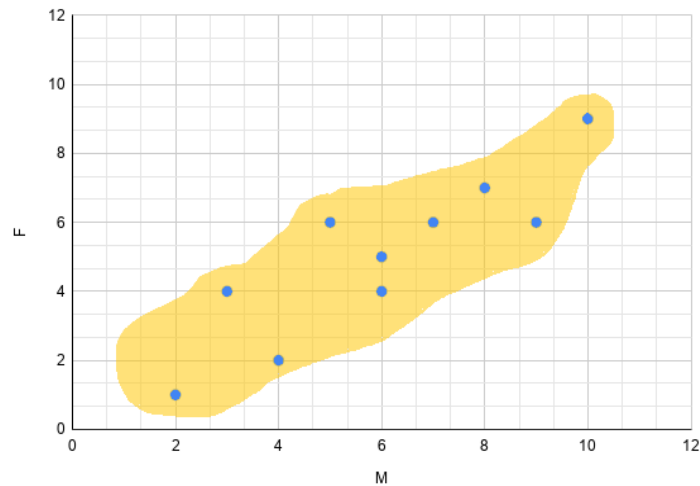
Estudiante	Nota en Manualidades (x)	Nota en Filosofía
------------	------------------------------	-------------------

		()
A	7	6
B	6	4
C	8	7
D	3	4
E	6	5
F	9	6
G	4	2
H	10	9
I	2	1
J	5	6

Tabla 8. Valores para representación del ejemplo (Elaboración propia)

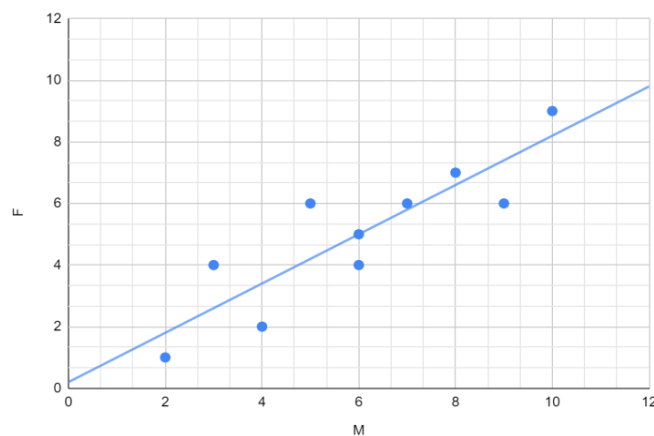


Gráfica 1. Nube de puntos o Diagrama de dispersión (Elaboración propia)



Gráfica 2. Correlación (Elaboración propia)

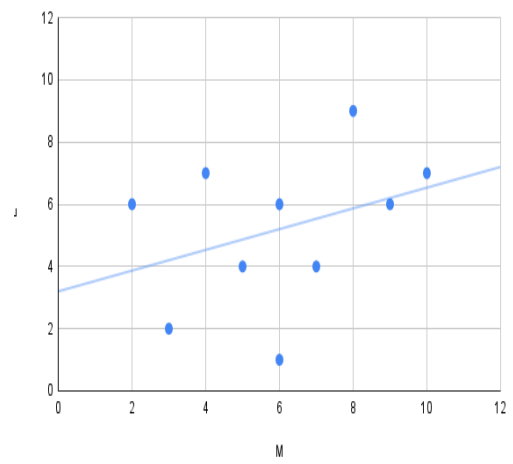
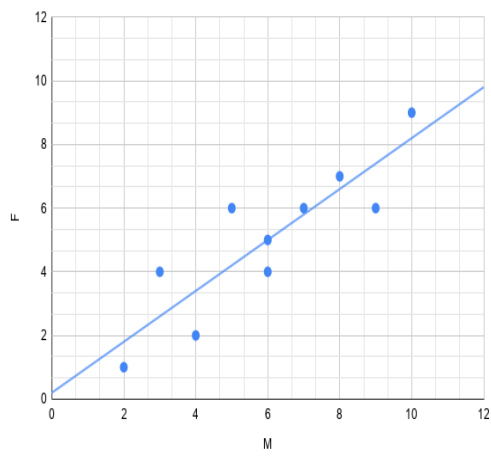
La zona sombreada que se puede observar en la Gráfica 2 representa la correlación que existe entre las notas de los estudiantes de ambas materias (Matemática y Física). Se aprecia una clara relación entre ellas; cuando un estudiante tiene notas bajas en una asignatura le corresponden, en la mayoría de los casos, notas bajas en la otra; y de la misma manera sucede con los estudiantes que tienen notas medias y altas.



Gráfica 3. Recta de regresión (Elaboración propia)

4.5 Grados de correlación

La correlación entre dos variables es más o menos fuerte según los puntos de la nube estén más o menos próximos a la recta de regresión. En la Gráfica 4 podemos observar que la correlación entre la nota en Manualidades () y la nota en Filosofía () es más fuerte que la correlación entre la nota en Manualidades () y la nota en Literatura (), pues en la primera los puntos están más próximos a la recta de regresión que en la segunda.



Gráfica 4. Correlación fuerte y correlación débil (Elaboración propia)

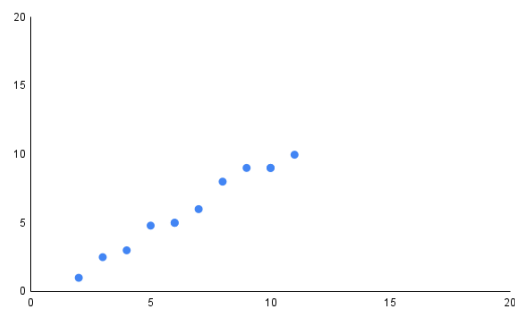
4.6 Tipos de correlación

La correlación se puede clasificar en varios tipos teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- La relación entre variables
- El valor cuantitativo
- El signo

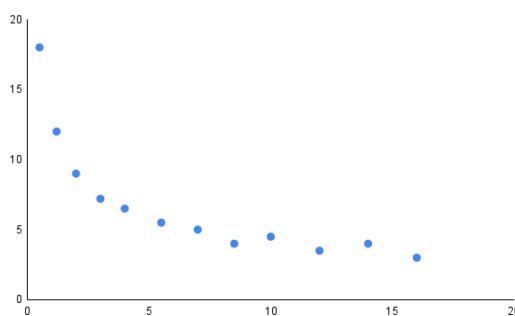
Entre los tipos según la relación entre variables tenemos: correlación lineal y no lineal (curvilínea).

Una correlación es *lineal* cuando la nube de puntos se condensa en torno a una línea recta.



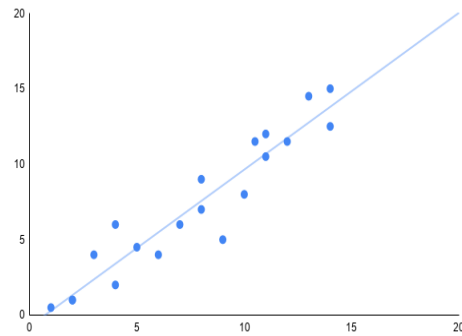
Gráfica 5. Correlación lineal (Elaboración propia)

Una correlación es *no lineal o curvilínea* cuando una nube de puntos se condensa en torno a una curva.



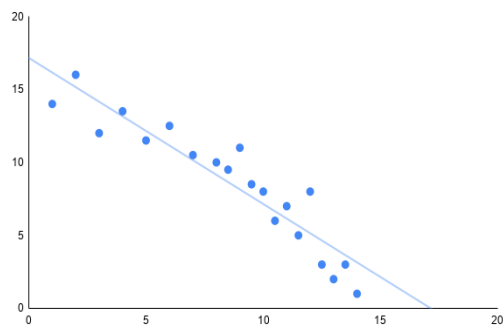
Gráfica 6. Correlación curvilínea (Elaboración propia)

Entre los tipos de correlación según el signo tenemos: correlación positiva y correlación negativa. Una correlación es *positiva* o *directa* cuando están directamente proporcional relacionadas, es decir, cuando aumentan los valores de una variable también los valores de la otra variable son incrementados.



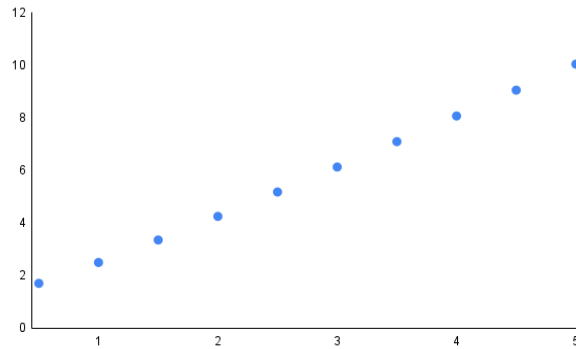
Gráfica 7. Correlación positiva (Elaboración propia)

Una correlación es *negativa* o *inversa* cuando a medida que aumentan los valores de una variable, disminuyen los valores de la otra.



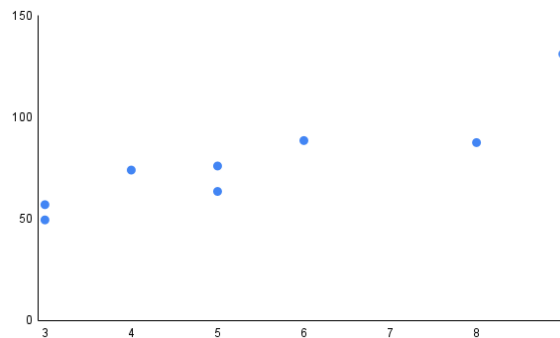
Gráfica 8. Correlación negativa (Elaboración propia)

Entre los tipos de correlación según el valor cuantitativo tenemos: correlación perfecta o funcional, correlación imperfecta o aleatoria y correlación nula. Una correlación es *perfecta o funcional* cuando existe una función tal que todos los valores de la variable la satisfacen. El valor del coeficiente de correlación es 1.



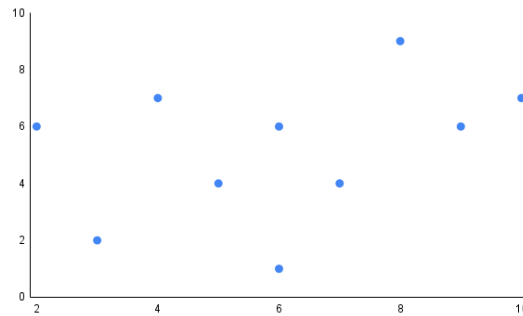
Gráfica 9. Correlación perfecta o funcional (Elaboración propia)

Una correlación es *imperfecta o aleatoria* cuando no es funcional, pero existe una relación entre las variables de forma que en función de la mayor o menor tendencia de los valores a satisfacer una función la correlación será más fuerte o más débil. El coeficiente de correlación es menor a 1 sea en sentido positivo o negativo.



Gráfica 10. Correlación imperfecta o aleatoria (Elaboración propia)

Una correlación es *nula* cuando no existe ninguna relación entre las variables x e y ; por ello, los puntos de la nube están distribuidos libremente, sin cumplir condición alguna. En este caso se dice que las variables están *incorreladas*.



Gráfica 11. Correlación nula (Elaboración propia)

4.7 Coeficiente de correlación

Al igual que para la media o para la desviación típica, también hay una fórmula para hallar el valor de la correlación de una distribución bidimensional a partir de los datos de la tabla. Este valor es denominado como *coeficiente de correlación* y se define con la letra r . La fórmula del cálculo del coeficiente de correlación es la siguiente:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

r = *coeficiente de correlación*

x_i = *valores de la variable x en una muestra*

$\bar{x}$ = *media de los valores de la variable x*

y_i = *valores de la variable y en una muestra*

$\bar{y}$ = *media de los valores de la variable y*

El coeficiente de correlación viene dado en función de la *covarianza*, ya que la covarianza de una variable bidimensional es la media aritmética de los productos de las desviaciones de los valores de cada variable respecto a su media.

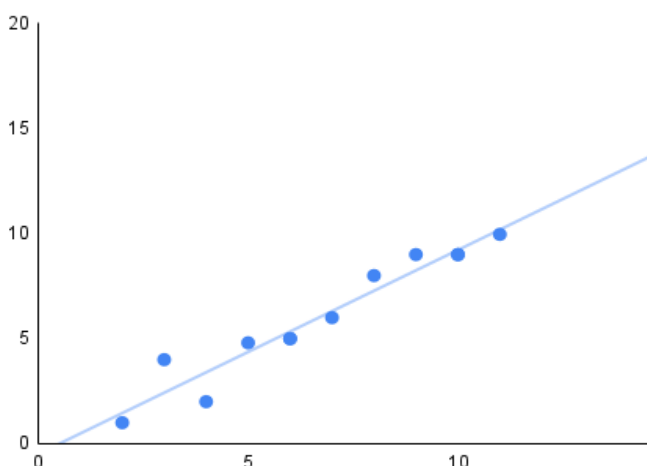
La covarianza indica la dispersión de los datos de la variable bidimensional respecto a su media (,), y se puede obtener mediante la siguiente fórmula:

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})$$

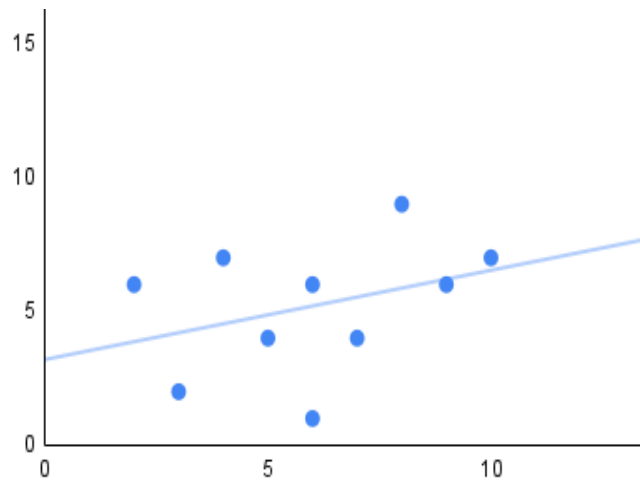
El mayor valor de r se da cuando los puntos están alineados (relación funcional). En tal caso, el valor de r es 1 o -1, según sea positiva o negativa. Por tanto, los valores que puede tomar r oscilan entre -1 y 1. El valor -1 corresponde cuando ambas variables tienen una relación lineal inversa exacta y el valor de 1 se verifica cuando ambas variables tienen una relación lineal exacta positiva.

En resumen, su interpretación es:

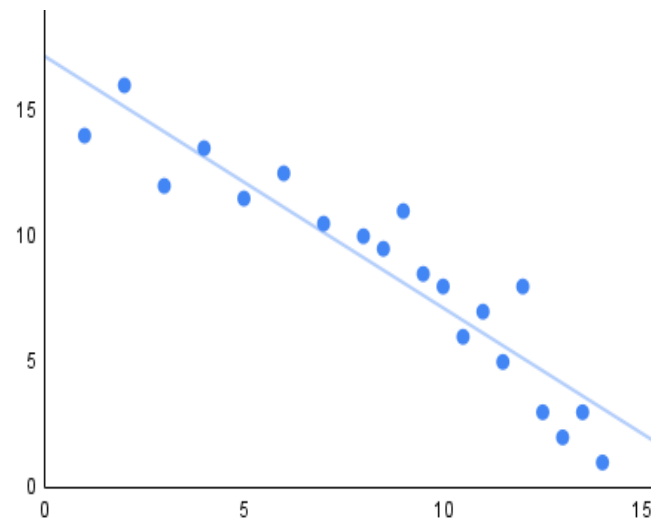
- Si el coeficiente de correlación vale 0, indica que no hay ninguna relación lineal entre ambas variables (incorrelación).
- Si $0 < r \leq 1$ existe relación lineal positiva entre las variables, siendo mayor cuanto más próximo esté a 1 y con 1 el caso de relación funcional lineal directa.
- Si $-1 \leq r < 0$ existe relación lineal negativa entre las variables, siendo mayor cuanto más próximo esté a -1 y con -1 el caso de relación funcional lineal inversa.



Gráfica 12. Nubes de puntos con $r=0.96$ (Elaboración propia)



Gráfica 13. Nubes de puntos con $r = 0.35$ (Elaboración propia)



Gráfica 14. Nubes de puntos con $r = -0.93$ (Elaboración propia)

4.8 Regresión lineal. Rectas de regresión

En los casos en los que existe una fuerte correlación entre las variables x e y , por tanto, la nube de puntos se condensa alrededor de una línea recta o una curva, el análisis de regresión permite obtener la expresión algebraica de la función que mejor se ajusta al diagrama de dispersión. De esta forma, conocidos los valores de una de las variables, se podrán obtener los valores correspondientes de la otra variable.

La recta de regresión de y sobre x tiene por expresión analítica:

$$y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} (x - \bar{x})$$

$$s_{xy} = \text{Covarianza de } X \text{ e } Y$$

$$s_x^2 = \text{Varianza de } X$$

$$\bar{x} = \text{Media de los valores de la variable } X$$

$$\bar{y} = \text{Media de los valores de la variable } Y$$

La recta de regresión se da en forma punto - pendiente; y su pendiente es el cociente entre la covarianza s_{xy} y la varianza s_x^2 de la variable x , que recibe el nombre de *coeficiente de regresión*. Dicha recta pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, que es el centro de gravedad de la nube de puntos.

En esta recta de regresión de y sobre x , se ha tomado como variable independiente la variable x y como variable dependiente la y .

De forma análoga también se tiene la recta de regresión de x sobre y :

$$x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2} (y - \bar{y})$$

$$s_{xy} = \text{Covarianza de } X \text{ e } Y$$

$$s_x^2 = \text{Varianza de } x$$

$$\bar{x} = \text{Media de los valores de la variable } x$$

$$\bar{y} = \text{Media de los valores de la variable } y$$

4.9 Estimación de resultados

En la correlación se trata de encontrar y medir el grado de asociación estadística que hay entre las variables. Pero en la regresión lo que se trata de encontrar es una función matemática que permita conocer los valores de una variable (denominada variable dependiente) a través de los valores de la otra variable (variable independiente).

La teoría de la regresión estudia la construcción de un modelo matemático (una función) que explique el comportamiento de una variable, denominada endógena, explicada, dependiente o respuesta, en función de otra/s, denominadas exógenas, explicativas o independientes. En general, la variable dependiente es una variable cuantitativa mientras que la independiente puede ser de cualquier tipo y no tiene por qué ser sólo una. Así, dependiendo del número de variables exógenas, distinguimos:

- Regresión simple, si hay una única variable explicativa, X . Por ejemplo, se desea explicar el salario de los trabajadores (v. dependiente) en función de su antigüedad en la empresa (variable independiente).
- Regresión múltiple, si existen varias variables explicativas para la misma variable dependiente, $X_1, X_2, \dots, X_k$. Así, por ejemplo si se desea explicar el salario de los trabajadores (v. dependiente) en función de su antigüedad en la empresa, objetivos alcanzados, jornada laboral, nivel de estudios, etc.

Si nos centramos en el primer caso, regresión simple, hay que determinar cuál es la variable dependiente y la variable independiente. Eso se denotará como Regresión de Y sobre X , (Y/X) en donde tratamos de explicar Y en función de los valores que toma X , o bien la regresión de X sobre Y , X/Y , en donde tratamos de expresar X en función de los valores que toma Y . En la expresión Y/X la primera es la variable dependiente y la segunda la variable independiente. Además, en general, esa relación no es simétrica, es decir, la regresión X/Y es diferente a la de Y/X .

Las rectas de regresión nos permiten obtener los valores de una variable conociendo los valores de la otra. Estos valores se llaman estimaciones de la variable. La seguridad en la estimación será tanto mayor mientras el valor coeficiente de correlación sea mas aproximado a 1 en valor absoluto, es decir:

- Si r es próximo a 1 se podrá decir que, probablemente, el valor real será próximo a nuestra estimación.
- Si r es pequeño, no se debe realizar previsiones o estimaciones.

Pero aún para valores grandes del coeficiente de correlación r , las estimaciones pueden ser muy inseguras cuando el punto de la recta de regresión sobre el que hacemos la estimación está muy separado de los puntos conocidos.

Es por ello que, las estimaciones realizadas a través de la recta de regresión serán fiables siempre que el coeficiente de correlación lineal tome valores próximos a 1 ó -1.

En los casos en que el coeficiente de correlación lineal esté próximo a 0, las estimaciones carecerán de validez.

Las estimaciones tienen validez para los valores de la variable próximos a los datos.

5. Fundamentación didáctica

En este apartado se realiza una revisión bibliográfica a diferentes artículos científicos, para poder conocer las principales dificultades que presenta el alumnado de 4º de E.S.O con el tema tratado en la unidad didáctica propuesta “Estadística Bidimensional. Regresión y correlación lineal” y, además, considerar las recomendaciones de los diversos autores que investigaron acerca de este tema y de la implementación de mejores metodologías y estrategias por parte del profesorado para la enseñanza académica de contenidos matemáticos y facilitar así el desarrollo natural del alumnado, así como su formación integral.

Según Herrera et. al (2011) los docentes de matemáticas deben preocuparse no solamente por dar a conocer a sus estudiantes los contenidos y procedimientos matemáticos estipulados en el plan de estudio para cada nivel educativo, sino que deben considerar los distintos factores afectivos y metacognitivos presentes en sus alumnos, con el propósito de disminuir en ellos las dificultades que se les presentan en el estudio de las matemáticas. Debe procurarse la ruptura de la barrera que se ha creado en algunos estudiantes hacia las matemáticas.

5.1 Análisis de los errores más comunes en Estadística Bidimensional

Según Herrera et. al (2011), las dificultades que presenta la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas son muy diversas, y, en especial, el tema de Estadística bidimensional. El concepto de una variable estadística bidimensional, la distinción de una relación funcional a una relación estadística, la distinción de los distintos tipos de correlación, poder asociar un valor de *coeficiente de correlación (r)* a distintos diagramas de dispersión y conocer en qué circunstancias se pueden realizar estimaciones de valores de variables a distintas distribuciones bidimensionales, acaban considerándose contenidos complejos para el alumnado, ya que no son conceptos sencillos ni criterios estadísticos con los cuales estén familiarizados.

Usualmente, los alumnos encuentran mayor dificultad en ciertas partes de cada unidad, o en unas unidades más que en otras. A continuación, se detalla una lista de los errores que cometen estos con más frecuencia:

- ***Problemas al reconocer una variable estadística bidimensional.***

Según Martín y Álvarez (2003) el alumnado de 4º de E.S.O. muestra dificultades con el concepto de variable estadística bidimensional, en la aplicación a través del análisis y reflexión, y en poder tabular dicha información en tablas estadísticas bidimensionales.

Esto sucede cuando no se asientan bien los conceptos previos necesarios como lo son las variables estadísticas unidimensionales en años anteriores y conceptos básicos de estadística. Y además puede darse el caso, cuando el profesor explica estos conceptos de manera abstracta y mediante un método poco pedagógico.

Es necesario el uso de ejemplos cotidianos y bien contextualizados para que el alumnado pueda comprender cabalmente todos estos conceptos básicos y su correcta aplicación.

- ***Complejidad al distinguir una relación funcional de una relación estadística.***

González (2000) expresa lo común que es para el alumnado en cuestión el tener problemas en poder identificar y diferenciar apropiadamente la relación funcional y la relación estadística, debido a que factores analíticos son los que determinan qué tipo de relación es, puesto que, como se establece en la fundamentación epistemológica, en una se obtienen los valores exactos y en otra, valores aproximados.

Esta complejidad puede ser efectivamente manejada si se expone una práctica explicación de las diferencias entre ambas relaciones y sus aplicaciones; pues si bien son cosas elementales y comprensibles para el docente, no lo son en lo absoluto para el alumnado de 4º de E.S.O. y se debe ser considerado en la capacidad analítica de tales estudiantes.

- ***Dificultad al distinguir los distintos tipos de correlación.***

Herrera et al (2012) plantean cómo el hecho de haber tantos tipos de correlación facilita la confusión y mal comprensión de estos. Al fin y al cabo, necesitan estar totalmente conscientes de las diferencias entre estos para saber cuándo es uno y cuándo otro.

En lo práctico, es necesario establecer claras definiciones y distinciones para la fácil comprensión del alumnado respecto a los tipos de correlación, para garantizar que estos puedan saber identificarlos y no confundir uno con otro.

- ***Confusión en el coeficiente de correlación y su aplicación.***

A través de Gea et al (2015) se puede apreciar que la tasa de estudiantes que confunden los distintos valores numéricos de la fórmula del coeficiente de correlación es considerablemente alta, sin mencionar la inapropiada aplicación que hacen de esta.

La solución al problema sería asegurarse que el alumnado pueda tabular los valores de las medias de las variables x e y para encontrar los valores de la covarianza y así poder obtener el valor del coeficiente de correlación lineal o de Pearson. Su aplicación por otra parte requiere de la comprensión de la influencia de los valores respecto a sus gráficas, lo cual también se vería facilitado por la exhaustiva representación de los distintos símbolos y valores.

- ***Inconvenientes en el análisis crítico de la recta de regresión y su aplicación en el uso de estimaciones.***

Como dicen Martín y Álvarez (2003) los estudiantes tienden a efectuar ejercicios y aprenderse las distintas fórmulas sólo a través de la memoria, no a través del análisis de las efectuaciones y mucho menos de los resultados.

Al igual que en el punto pasado, la recta de regresión expone una relativamente complicada fórmula que requiere ser explicada apropiadamente para su comprensión, pero más allá de eso está la necesidad de saber interpretar su valor, función y resultado.

Es necesario incentivar el análisis crítico del estudiante de la recta de regresión, no tan solo esperar que resuelvan el ejercicio mecánicamente; es decir, el alumnado debe interpretar y determinar lo que está haciendo con la fórmula y qué puede obtener con eso en términos reales, fuera del ámbito escolar.

Si el estudiante no es capaz de efectuar análisis críticos a sus ejercicios y actividades, no podrá ser capaz de recordar la importancia de la recta de regresión y muy probablemente la olvidará.

6. Proyección Didáctica

6.1 Título de la unidad didáctica

Para la realización de este Trabajo Fin de Máster, la unidad didáctica que se va a implementar se titula “Estadística Bidimensional. Regresión y Correlación Lineal” y está destinada al curso de 4º de E.S.O de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Este tema está englobado en el quinto bloque de la asignatura, llamado “Estadística y Probabilidad”, siendo generalmente, el tercer tema de dicho bloque.

6.2 Justificación

La unidad didáctica se realizaría en los últimos meses del año académico ya que en los libros de texto este tema se suele situar entre los últimos temas a dar, como se pudo observar en la fundamentación curricular en el libro de Editorial Anaya, este contenido está enumerado bajo Tema 10 mientras que en el libro de Editorial Edelvives es desarrollado en el tema 12.

El alumnado al que se dirige esta unidad didáctica sería el que esté cursando 4º de E.S.O en la modalidad de “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas”.

En esta proyección didáctica, se toman como base y se afianzan los contenidos de Estadística desarrollados en 2º y 3º de E.S.O., donde se trabaja fundamentalmente, tal y como consta en el Real decreto 1105/2014 del 26 de diciembre, la utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con la estadística, el análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas, la comparación de distribuciones estadísticas y la introducción a la correlación. Sin embargo, en la unidad didáctica elaborada el nivel exigido será más elevado, sentando así las bases para estudios posteriores, sabiendo que el alumnado después del curso de 4º de E.S.O. estará cursando Bachillerato o formación profesional de Grado Medio, para posiblemente más tarde cursar estudios universitarios o ciclos formativos de grado superior de formación profesional; es por ello la necesidad de crear en el alumnado de 4º de E.S.O. la capacidad de un análisis crítico y de investigación para poder formarse mejor como profesional.

Además de lo mencionado en el párrafo anterior, el contenido de esta unidad didáctica es muy importante a causa de la presencia de la estadística en prácticamente todos los aspectos de nuestra vida, ya que, de todas nuestras actividades, es posible recopilar datos que, tras ser analizados, nos permiten tomar decisiones. Por ejemplo, en áreas como la ciencia, la economía, la medicina, la agricultura o la política se recaba información y se analiza para tomar decisiones, en la mayoría de los casos trascendentales, para el avance o mejora en dichas áreas.

Los contenidos para esta unidad se han desarrollado a partir del bloque 5 de los contenidos establecidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria, y de las aportaciones de la Comunidad Autónoma de Andalucía mediante la Orden de 14 de julio de 2016 en la que se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece el orden que debe seguir la evaluación del proceso de aprendizaje del alumno.

6.3 Contextualización del centro educativo

Este trabajo se va a poner en práctica en un centro educativo. Por ello, se procede a describir el centro y sus instalaciones.

○ Descripción del centro educativo

Esta unidad didáctica va dirigida a los estudiantes de 4º de E.S.O del Centro Educativo “Colegio Madre del Divino Pastor”, el centro que me ha sido asignado para la realización de las prácticas del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Se encuentra ubicado en la calle Ana María Mogas, 14, en la ciudad de Andújar. Se imparten clases desde educación infantil hasta la educación secundaria (E.S.O). Es un centro educativo concertado que cuenta con una alta matrícula de alumnos con edades comprendidas desde los 3 hasta los 16 años.



agen 2. Vista superior del centro educativo “Colegio Madre del Divino Pastor”

- *Instalaciones y materiales del centro educativo*

Las instalaciones del colegio se encuentran en excelentes condiciones, estando bien estructuradas para la comodidad y bienestar del alumnado, favoreciendo así su adaptación y evitando su fatiga. Cuenta con 3 plantas donde hay varias aulas en cada una de ellas, el espacio en las aulas está bien distribuido, adecuado para la impartición de clases al alumnado. Los alumnos cuentan en las aulas con taquillas personales con llave para guardar sus artículos. Igualmente, los profesores cuentan con taquillas en la sala de profesores para de la misma forma poder guardar sus pertenencias.

El centro cuenta con una capilla para oír misa, biblioteca, aulas de informática, gimnasio, y un patio para la recreación y actividades deportivas del alumnado.

Tiene como norma que todo el alumnado use uniforme para asistir a las clases.

Respecto a los materiales, las aulas estaban provistas de sillas y mesas, conexión Wifi, altavoces, proyector y pizarra, tanto digital como tradicional.

- *Descripción del aula*

Las aulas del centro educativo están caracterizadas por tener dimensiones muy aproximadas, con capacidad de albergar aproximadamente entre 30 a 35 estudiantes. Son clases donde los estudiantes se acomodan de una manera rectangular, con ventanales grandes que se comunican con el exterior, siendo por lo tanto espacios con muy buena luminosidad y agradables tanto como para el alumnado como para el profesorado.

- *Perfil del alumnado*

La unidad didáctica está diseñada para los estudiantes que cursan el 4º E.S.O. "A" formada por 12 alumnos y 11 alumnas, en el grupo hay dos alumnos que son repetidores y están perfectamente integrados en el aula. Además, entre los alumnos nos encontramos con tres alumnos con dificultades de aprendizaje, con una adaptación curricular no significativa y perfectamente integrados en el aula con sus compañeros.

En términos generales, se trata de una clase muy homogénea en la que el nivel intelectual, socioeconómico y cultural de los estudiantes es muy similar, así como sus intereses y metas a alcanzar. Se trata de un alumnado, por lo general, preocupado y comprometido con sus estudios.

La edad del alumnado para el que se proyecta esta unidad didáctica es de 14-16 años, por lo que se puede decir que se encuentran en pleno periodo de la adolescencia, muy próximos a convertirse en adultos, siendo una etapa en la que suceden cambios constantes tanto psicológicos como físicos, siendo una etapa donde predominan

cambios de humor repentinos, un proceso emocional muy complejo ya que el alumnado está en ese proceso de transición entre la adolescencia y la madurez adulta.

Los miembros de 4º de E.S.O. “A”, en la mayoría de los casos, presenta un rendimiento elevado y muy bueno en la materia. En clase se percibe de parte del alumnado un interés sano y correcto por superar la asignatura, derivada de la educación recibida en sus hogares, donde le enseñan los valores morales e impulsan a los alumnos a obtener buenas notas académicas.

El alumnado tiene un comportamiento en el aula ejemplar, ya que son capaces de mantener el silencio durante el desarrollo y explicación de la clase, levantar la mano para pedir el turno de palabra, tanto como para hacer preguntas como para participar, y hay un respeto muy bueno hacia el profesor por parte del alumnado.

Se puede decir que entre el 90-95% del alumnado cumple con las actividades que son enviadas para la casa, y trae correcta y ordenadamente la resolución de los ejercicios.

Se puede observar que el alumnado aspira a continuar sus estudios, para así cursar luego de la Educación Secundaria Obligatoria el bachillerato y posteriormente cursar una carrera universitaria para su formación académica y progreso profesional.

6.4 Objetivos

En este epígrafe se van a desarrollar los objetivos generales de etapa, los objetivos específicos de área y los objetivos de la unidad didáctica propuesta.

Para obtener los objetivos generales de etapa se ha consultado la legislación pertinente y se ha tomado el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre, para así establecer el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato para todo el territorio nacional.

Los objetivos de área se han consultado en la Orden del 14 de julio de 2016, donde se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Además, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. En este caso estaríamos refiriéndonos al área de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en 4º de ESO.

Para finalizar, se han desarrollado los objetivos de esta unidad didáctica titulada “Estadística Bidimensional. Regresión y Correlación Lineal” se han formulado a partir de los documentos anteriores, teniendo en cuenta los objetivos, competencias, contenidos, estándares y resultados de aprendizaje evaluables y criterios de evaluación.

○ *Objetivos de etapa*

1. Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
2. Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
3. Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
4. Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
5. Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
6. Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
7. Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
8. Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
9. Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

10. Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
11. Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
12. Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

○ *Objetivos de Área*

La materia de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en la Educación Secundaria Obligatoria, según el Decreto 111/2016 del 14 de Junio va a contribuir en el alumnado a desarrollar capacidades que le permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

○ *Objetivos de la unidad didáctica*

La unidad didáctica tiene los siguientes objetivos:

1. Reconocer una variable estadística bidimensional.
2. Conocer la estructura de los tipos de tablas bidimensionales.
3. Distinguir entre relación funcional y relación estadística.
4. Saber representar una distribución bidimensional mediante una nube de puntos.
5. Interpretar la correlación como una medida de relación lineal existente entre dos variables.
6. Conocer los distintos tipos de correlación y sus características.

7. Calcular el valor del coeficiente de correlación lineal e interpretarlo.
8. Reconocer las rectas de regresión como mejor ajuste a una nube de puntos.
9. Calcular la ecuación de las rectas de regresión entre dos variables.
10. Realizar estimaciones a partir de una recta de regresión cuando sea factible.
11. Manejar algunas herramientas TIC como Office 365 para la elaboración de tablas estadísticas bidimensionales con sus gráficos de dispersión, rectas de regresión y valor de coeficiente de correlación.
12. Facilitar la resolución de problemas, haciendo posible que el alumno dedique mayor tiempo al análisis de la información inicial, a la toma de decisiones sobre las acciones a realizar, a la verificación y análisis crítico de los resultados, verdadero objetivo de los cursos preuniversitarios y universitarios.

6.5 Competencias clave

En esta unidad didáctica se pretende trabajar las competencias que el alumnado debe adquirir, tal y como está establecido en la ley. La *Orden del ECD/65/2015, de 21 de enero*, define las competencias como “una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz”.

En el decreto mencionado, se establecen siete competencias clave que deben estar presente en el Sistema Educativo de España, las cuales son:

- a) *Comunicación lingüística (CL).*
- b) *Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).*
- c) *Competencia digital (CD).*
- d) *Aprender a aprender (CAA).*
- e) *Competencias sociales y cívicas (CSC).*
- f) *Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).*
- g) *Conciencia y expresiones culturales (CC).*

En el diseño de esta unidad didáctica, debido a que está dentro de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, se contribuirá a la adquisición de las siguientes competencias:

- *Competencia Matemática:* Dominar los conceptos básicos relativos a la estadística bidimensional (distribución bidimensional, nube de puntos, correlación lineal, coeficiente de correlación, regresión lineal) y saber diferenciar e interpretar relaciones estadísticas o aleatorias y tipos de correlación usando todos los conceptos y elementos aprendidos en esta unidad.
- *Comunicación lingüística:* Expresar los conceptos adquiridos con un lenguaje matemático correcto para poder así saber interpretar bien lo que dice el ejercicio, analizar resultados y expresar conclusiones. Esta competencia se trabajará al leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos
- *Competencia digital:* Saber utilizar de una manera básica herramientas informáticas que permitan trabajar con datos estadísticos y graficarlos (como la hoja de cálculo de Excel), además de adquirir habilidad para buscar y analizar información con la finalidad de que el alumnado aprenda a resolver y plantear problemas.
- *Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor:* Desarrollar el sentido de iniciativa mediante clases amenas y altamente participativas. Fomentar el análisis crítico con noticias, datos, gráficos, entre otros, provenientes de los medios de comunicación.
- *Aprender a aprender:* Desarrollar en el estudiante la motivación para indagar, investigar y continuar aprendiendo con eficacia y autonomía mediante dinámicas y actividades que fomenten el auto-aprendizaje.

6.6 Contenidos

El artículo 2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, establece que se debe entender por contenidos “conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias.

Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado”.

Para nuestra unidad didáctica se han consultado los contenidos incluidos en la Orden del 14 de julio de 2016 y solamente se han tomado aquellos que están relacionados con los objetivos de dicha unidad didáctica.

Contenido del Bloque 5. Estadística y Probabilidad.

- Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas.
- Distribuciones estadísticas. Distribución bidimensional. Diagrama de dispersión
- Introducción a la correlación. Tipos de correlación. Factor de correlación. Regresión lineal.

Contenidos de la unidad didáctica: Contenidos Conceptuales, Procedimentales y Actitudinales.

○ *Contenidos conceptuales*

- Distribución bidimensional.
- Tablas estadísticas bidimensionales.
- Distinción entre relación funcional y relación estadística.
- Correlación. Grados y tipos.
- Coeficiente de correlación
- Regresión lineal. Rectas de regresión. Estimación de resultados

○ *Contenidos procedimentales*

- Construir tablas estadísticas bidimensionales adecuadas al conjunto de datos dado.
- Estimar el grado y tipo de correlación de distribuciones bidimensionales sin su representación gráfica.
- Asignar valores de coeficientes de correlación a gráficas de distribuciones bidimensionales.
- Reconocer las rectas de regresión como ajuste a una nube de puntos.
- Identificar y analizar la fiabilidad de las estimaciones realizadas a distintos casos de distribuciones bidimensionales
- Utilizar eficazmente la hoja de cálculo Excel para la graficación de distribuciones bidimensionales y obtención del coeficiente de correlación.

- *Contenidos actitudinales*

- Reconocimiento de la utilidad de la estadística en situaciones de la vida cotidiana y ayudar en su interpretación.
- Valoración positiva del trabajo en equipo para la realización de determinadas actividades de tipo estadístico.
- Valoración del uso de herramientas tecnológicas para la realización de problemas de distribución bidimensionales.

6.7 Metodología

En el desarrollo de esta unidad didáctica se van a aplicar distintas metodologías de enseñanza para obtener mejores resultados académicos por parte del alumnado de 4º de E.S.O.

En primer lugar, se piensa aplicar la enseñanza transmisiva, para la introducción al tema de Estadística Bidimensional y para la explicación de todos aquellos conceptos básicos enmarcados en la unidad didáctica.

Esta metodología se aplica mostrando énfasis a todos los contenidos conceptuales presentes durante todas las sesiones programadas y se apoyará en el libro de texto y/o en los apuntes realizados por el docente. Tales conceptos serán ilustrados mediante ejemplos bien contextualizados en la edad del alumnado. Además, para mantener la clase activa, se llevarán a cabo debates abiertos, diálogos y preguntas relacionadas con los conceptos explicados con el fin de comprobar el grado de atención y comprensión por parte del alumnado.

Se aplicará también la metodología del “aprendizaje cooperativo”, formando grupos de entre 2-4 alumnos, donde cada miembro tiene un rol determinado y para alcanzar los objetivos es necesario interactuar y trabajar de forma coordinada. El objetivo final del uso de esta metodología es ayudar al alumnado a una mejor integración y cooperación entre ellos para alcanzar un fin común.

También será utilizado el “aprendizaje basado en problemas”, que es un proceso de aprendizaje cíclico compuesto de muchas etapas diferentes, comenzando por hacer preguntas y adquirir conocimientos que, a su vez, llevan a más preguntas en un ciclo creciente de complejidad, para así propiciar en el alumnado el ejercicio de indagación y convertir ese ejercicio en datos e información útil.

Esta metodología ayudará a los alumnos a obtener grandes ventajas como lo son: el desarrollo del pensamiento crítico y competencias creativas, la mejora de las habilidades de resolución de problemas, el aumento de la motivación y la mejor capacidad de transferir conocimientos a nuevas situaciones.

Finalmente, se utilizará el “aprendizaje basado en el pensamiento” ó “*thinking-based learning (TBL)*” para enseñar al alumnado a contextualizar, analizar, relacionar, argumentar, etc. y no solamente a crear un aprendizaje “de memoria” sino que puedan ellos convertir información en conocimiento, y así generar en ellos destrezas del pensamiento más allá de la memorización.

6.8 Recursos

Se deben tomar en cuenta las indicaciones en relación al tipo de recursos que son establecidas en la Orden de Julio del 2016, ésta ley establece que se debe tener en cuenta el uso de los recursos TIC, las calculadoras y software específicos o el uso de blogs, wikis, etc, como herramientas habituales para la construcción del pensamiento matemático, introduciendo con ellos, elementos novedosos.

Se deben usar materiales cotidianos como el periódico y revistas para tomar de allí ejemplos para facilitar el estudio de las tablas y gráficas estadísticas. Además debe tenerse en cuenta que debe incrementarse el nivel de complejidad al alumnado de 4 de ESO mediante gráficos, tablas y diagramas y hacer uso de hojas de cálculo y recursos digitales para el desarrollo de la clase.

En el caso de este proyecto, los recursos utilizados para la realización de esta unidad didáctica son:

1. Recursos personales:

- Docente de matemáticas.
- Discentes.
- Profesorado del departamento de matemáticas.
- Equipo directivo y Departamento de Orientación.
- Familiares y personal del entorno.

2. Recursos Materiales:

- Libro de texto de la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas.
- Apuntes/Actividades externas al libro de texto.
- Cuaderno del alumnado.
- Pizarra.

3. Recursos ambientales:

- Aula.
- Aula de informática.

4. Recursos tecnológicos/Informáticos:

- Pizarra digital.
- Calculadora.
- Laptops.
- Paquete Office (Hoja de Cálculo Excel).
- Proyector y altavoces en clase.

5. Recursos Web:

- <https://unitube.netlify.app/blog/2013/02/22/practica-variable-bidimensional-05-05-regresio%CC%81n-lineal-simple-con-datos-agregados/>
- <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/estadistica/disbidimension/ejercicios-de-regresion-y-correlacion.html>
- <https://www.youtube.com/watch?v=Nud5vrAjf4>
- <https://excelyvba.com/graficos-excel-guia-completa/>

6.9 Atención a la diversidad

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, tiene establecido que los centros educativos tienen la obligación de realizar procedimientos y estrategias oportunas y correctas para garantizar la equidad e inclusión de aquellas personas que requieran una atención educativa diferente a la ordinaria. Se debe tener en cuenta a aquellos estudiantes que presentan trastornos, que poseen déficit de aprendizaje, que se han incorporado al centro educativo fuera del tiempo establecido, que son superdotados o que posean algún otro tipo de discapacidad. Estos procedimientos tendrán como objetivo o la finalidad que el alumno pueda desarrollar sus capacidades al máximo y pueda alcanzar los objetivos generales de etapa, al igual que cualquier otro alumno con completa normalidad.

No se puede ignorar que ciertos alumnos pueden requerir una atención o trato especial por parte del profesorado al momento de ejercer la labor de la docencia. Hay tanto alumnos con mucha capacidad cognitiva, como otros con poca; no todos pueden ser atendidos de la misma manera y a la misma vez. Es necesario diseñar un programa que permita que todo estudiante pueda trabajar y aprender de acuerdo a sus

limitaciones y habilidades; ser adaptados si es necesario.

La misión del docente con respecto a todos sus estudiantes es permitirles progresar educativamente sin excepción, pero éste no podrá ser capaz si no está consciente de los distintos tipos de casos que puede hallar entre su alumnado:

- Dificultades de aprendizaje.
- Altas capacidades.
- Falta de motivación.
- Incorporación tardía al sistema educativo.
- Necesidades específicas de apoyo educativo (NEAE).
- Trastorno por déficit de atención (TDA).
- Trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH).

Cada caso tiene un tratamiento metodológico particular que debe ser estudiado para poder efectuarse efectivamente en la práctica, y estos requieren ser impuestos en todo docente.

Como se puede observar, hay distintos tipos de casos, y estos además se ven alterados de acuerdo a la edad y al desarrollo previo del tratamiento especial. Por eso, es primero importante establecer los grados de complejidad de los ejercicios y la actual capacidad de ciertos estudiantes para resolverlos, con el fin de aplicar el método de enseñanza adecuado.

Algunos de los programas más efectivos son aquellos que incluyen la creación de actividades adicionales a las propuestas organizadas en dos grupos, actividades de refuerzo y actividades de ampliación para que todo el alumnado pueda trabajar el mismo contenido, aunque tenga distintas necesidades.

Otro aspecto importante es la velocidad del aprendizaje por parte del alumnado. No todos progresan a la misma velocidad; sin embargo, es absolutamente necesario que todos estén al mismo nivel mínimo para poder avanzar la complejidad de las clases. Por eso, la programación, además de asegurar un nivel mínimo para todo el alumnado de un mismo grupo, debe ofrecer al alumnado la oportunidad de recuperar los contenidos que no han conseguido afianzar a lo largo del curso.

Por lo tanto, metodológicamente hablando, el profesor debe esforzarse en detectar los conocimientos previos del alumnado durante el desarrollo de cada uno de los temas tratando de identificar posibles carencias, procurando que los nuevos contenidos sean enlazados con los contenidos anteriores y, además, sean adecuados al nivel cognitivo del alumnado.

Así mismo necesita estructurar los programas de modo que la comprensión de cada uno de los contenidos estudiados durante el curso sea suficiente para que el alumnado pueda hacer una mínima aplicación de dicho contenido y enlazarlos con otros contenidos similares. Además de fomentar el trabajo en grupos, lo cual puede promover el aprendizaje del alumnado en conjunto, con la gran posibilidad de poder también crear conciencia entre todos de los distintos tipos de persona con quienes se podrían ver comprometidos a trabajar una vez finalizados los estudios.

Así, en resumen, se pueden enumerar los distintos recursos a ser aplicados con respecto a la atención a la diversidad, como:

- Actividades de refuerzo y de ampliación.
- Diferentes procedimientos de evaluación del aprendizaje.
- Mecanismos de recuperación.
- Trabajo en grupos.
- Variedad metodológica.

Estos instrumentos pueden complementarse además con otras medidas que permitan la atención a la diversidad como:

- Realizar una evaluación inicial.
- Fomentar un buen clima de aprendizaje en el aula.
- Hacer uso de los refuerzos positivos para mejorar la autoestima del alumnado.
- Intentar una integración y cohesión entre todo el grupo.

Cabe mencionar que existen casos extremos de discapacidades, como pueden ser altas deficiencias de lectura, de expresión o comprensión, así como alguna dificultad causada por una incapacidad física o psíquica, que llegarían a requerir la efectucción de procedimientos institucionales, imprescindibles para tales casos.

6.10 Temporalización, sesiones y actividades

El alumnado del centro educativo “Colegio Madre del Divino Pastor” tiene 4 clases de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas por semana de 60 minutos de duración. La unidad didáctica propuesta está programada para ser desarrollada en 8 sesiones de 55 minutos de duración, es decir, para ser abordada en dos semanas de clase.

Sesión 1

Esta sesión se enfocará con el fin de introducir al alumno en la estadística bidimensional.

Se explicará a modo de introducción, cómo influye la estadística en muchos aspectos de la vida cotidiana y se definirá lo qué es una distribución bidimensional mediante ejemplos prácticos. Se hablará acerca de los primeros hombres en la historia que aplicaron conceptos de estadística bidimensional.

Se realizarán preguntas para conocer el nivel del alumnado, si tiene buen conocimiento de términos estadísticos previos al curso de 4º de E.S.O. y si tiene alguna idea de conceptos básicos como: Distribución bidimensional, tabla bidimensional y sus tipos.

En la clase se explicará la diferencia entre una distribución unidimensional y una distribución bidimensional, y la tabulación correcta en distribuciones bidimensionales. Se hará la conceptualización de una relación funcional y una relación estadística para poder diferenciar con claridad la una de la otra.

Se expondrán algunos ejemplos cotidianos e ilustraciones para una mejor comprensión de los términos estadísticos.

Para finalizar la sesión, se realizarán las siguientes actividades para que los alumnos afiancen los conceptos aprendidos:

Actividad 1.1

En una investigación sobre la relación entre la masa, , en kg, y la altura, , en centímetros, de los integrantes de un grupo de deportistas se han obtenido los siguientes resultados:

(86, 189), (77, 179), (82, 184), (75, 172), (80, 183), (83, 178), (68, 161), (84, 195), (73, 178), (76, 180), (81, 194), (74, 179), (85, 193), (90, 190), (88, 180), (76, 180), (73, 172), (77, 179), (65, 172), (75, 181), (67, 170), (82, 188), (86, 193), (77, 180), (71, 178).

a) Realiza la tabulación de los valores utilizando intervalos.

- b) *Obtén la distribución de las variables e .*
- c) *¿Cuál es la distribución marginal del rango de masa (75, 80)?*
- d) *¿Y la distribución del rango de altura (185, 190)?*

Actividad 1.2

Indica el tipo de dependencia que crees que puede existir en las siguientes variables bidimensionales:

- a) *Las horas de un trabajador y su salario obtenido.*
- b) *El cambio de divisas entre los dólares y euros.*

Se les mandará la siguiente actividad para sus hogares:

Actividad 1.3

En el marco de un estudio sobre educación se le ha realizado un test a 24 personas para así relacionar el número de faltas de ortografía cometidas en un dictado () y los años de estudio superados ():

(4, 8), (6, 9), (5, 11), (5, 10), (7, 7), (4, 12), (3, 12), (5, 9), (6, 7), (7, 7), (4, 11), (3, 12), (6, 8), (3, 11), (4, 11), (5, 9), (6, 7), (7, 8), (5, 10), (3, 12), (5, 9), (4, 11), (5, 8), (5, 9)

- a) *Mediante una tabla simple registra los valores dados de ambas variables.*
- b) *Expresa mediante una tabla de doble entrada los valores de cada una de las dos variables.*
- c) *Determinar la distribución de las variables e .*

Sesión 2

En los primeros minutos de la clase se corregirá la actividad mandada para casa. El docente llevará algunos ejemplos encontrados en revistas o periódicos en los que se observen algún tipo de distribución bidimensional y considerará si aplica algún tipo de dependencia o relación.

Se explicarán nuevamente de una forma muy breve los términos y conceptos aprendidos en la clase anterior para así empezar a definir los términos de: Diagrama de dispersión o nube de puntos, y correlación.

Se realizará la graficación de algunas variables bidimensionales y se le enseñará al alumnado la manera correcta de graficar datos en un plano cartesiano.

Se hablará acerca del grado de correlación que puede haber entre dos variables.

Para finalizar la clase se realizarán las siguientes actividades:

Actividad 2.1

Un estudio intenta determinar si existe alguna relación entre las siguientes variables: Número de horas semanales dedicadas a jugar videojuegos () y edad del jugador (), arrojando los siguientes resultados:

Número de horas	14	21	18	9	25	4	0	2	5
Edad	14	17	25	32	20	41	55	50	38

- a) *Mediante una nube de puntos representa gráficamente los valores dados.*
- b) *¿Hay relación entre las variables? Razona tu respuesta.*

Actividad 2.2

Se ha realizado un estudio para determinar la relación entre el número de días de ausencia semanales en un centro educativo y la edad de los alumnos que se ausentan, con la finalidad de mejorar el plan de absentismo escolar. Se han obtenido los siguientes resultados:

Número de días	2	4	1	5	3	4	2
Edad	12	16	14	12	13	11	16

- a) *Mediante un diagrama de dispersión realiza la representación gráfica.*
- b) *Determina con la nube de puntos el grado de correlación que existe entre ambas variables.*

Se le mandará la siguiente actividad para casa:

Actividad 2.3

Esta es la tabla de los quince primeros clasificados en una liga de fútbol:

POS	J	G	E	P	F	C	PTOS
Tucanes	34	22	5	7	53	37	71
Reyes	34	20	9	5	62	30	69
Leones	34	20	8	6	53	28	68
Tigres	34	17	8	9	45	47	59
Rayados	34	17	4	13	45	40	55
América	34	14	9	11	50	35	51
Culebras	34	12	11	11	42	41	47
Águilas	34	13	8	13	41	43	47
Tiburones	34	11	11	12	41	35	44
Navegantes	34	12	8	14	45	47	44
Colmenas	34	10	13	11	42	44	43
Panteras	34	10	12	12	42	38	42
Abejas	34	11	8	15	44	47	41
Pericos	34	11	7	16	44	60	40
Hienas	34	11	6	17	30	44	39

Las distintas columnas significan:

- *Pos. Posición final*
- *J. Partido jugados*
- *G. Partidos ganados*
- *E. Partidos empatados*
- *P. Partidos perdidos.*
- *F. Total de goles marcados (a favor).*
- *C. Total de goles recibidos (en contra).*
- *PTOS. Puntos.*

Analizar las siguientes distribuciones bidimensionales, representarlas y determinar el grado de correlación:

- a) *Pos-P*
- b) *Pos-G*
- c) *Pos-E*

Sesión 3

Se revisarán los cuadernos de los alumnos para así corregir la actividad enviada para la casa. En esta sesión se explicarán los distintos tipos de correlación que puede haber presente en un estudio estadístico bidimensional.

Para la realización de la clase se hará uso de la metodología “aprendizaje cooperativo”. Los alumnos se van a organizar en grupos de 4 y se hará una dinámica grupal para el aprendizaje de este contenido. La dinámica consistirá en distinguir correctamente el tipo de correlación en varios diagramas de dispersión proyectados mediante un video, se le dará 1 minuto a cada grupo para que discutan qué tipo de correlación creen que es y por qué; y el grupo que responda correctamente y en el menor tiempo posible será el ganador.

Se le mandará la siguiente actividad para casa:

Actividad 3.1

El peso y la altura de un grupo de deportistas es:

Peso (Kg)	80	75	70	76	72
Altura (Cm)	185	170	175	161	168

- a) *Usa el diagrama de puntos para representar los datos gráficamente.*
- b) *¿Hay correlación entre las variables? ¿De qué tipo es? Justifica tu respuesta.*

Sesión 4

En esta sesión se trabajará para cumplir con los objetivos de calcular el valor del coeficiente de correlación lineal e interpretarlo; y asignar valores de coeficientes de correlación a gráficas de distribuciones bidimensionales. Primero se revisarán los cuadernos para asegurarnos de la realización de la actividad anterior enviada para el hogar. Después, se explicará la definición del coeficiente de correlación lineal y la fórmula para obtener dicho valor.

El enfoque principal en esta sesión debe ser que el alumnado pueda desarrollar un análisis crítico y pueda así asignar correctamente diferentes valores de coeficientes de correlación lineal a distintos diagramas de dispersión. No debe ser el enfoque principal que el alumnado pueda realizar un largo y tedioso cálculo matemático sino que pueda analizar correctamente los datos que se le proporcionarán para así llegar a conclusiones adecuadas.

Actividad 4.1

Representa gráficamente los siguientes valores tabulados mediante un diagrama de dispersión e indica cuál de los siguientes valores crees tú que es el más apropiado para el coeficiente de correlación:

1 0.2 -0.7 -0.4

x	2	4	5	6	8	9
y	6	2	1	15	12	7

Actividad 4.2

Explica que significan los siguientes valores de coeficientes de correlación en una distribución bidimensional:

- a. $r = 1$
- b. $r = -0.1$
- c. $r = 0.25$
- d. $r = 0.92$
- e. $r = 0$
- f. $r = -1$

Se le mandará la siguiente actividad para casa:

Actividad 4.3

La siguiente tabla muestra características socioeconómicas de diez países

Pa	Po	Ex	RPC	IP	Me
a	318	9.6	60	14.9	5.3
b	198	7.8	11.5	22.8	2.3
c	136	0.49	43	21	2.8
d	117	1.8	14	9	1.9
e	89	0.43	42	10.9	5.2
f	59	0.71	39	8.1	4.5
g	58	0.55	42	5	4.2
h	42	0.2	16.4	9.6	2.2
i	12	1.5	1.9	51	0.05
j	7	0.9	3.1	39	0.11

Las columnas significan:

- Pa. País
- Po. Población (en millones de personas)
- Ex. Extensión (en millones km²)
- RPC. Renta Per Cápita (en miles de dólares)
- IP. Índice de Pobreza (en %)
- Me. Número de Médicos por mil habitantes

Analizar las distribuciones siguientes:

- a) Po-IP
- b) RCP-Me
- c) Po-RCP

Conociendo las correlaciones, no respectivamente, -0.8; 0.74 y 0.93, estimar cuál corresponde a cada una de ellas.

Sesión 5

En esta sesión se trabajará para alcanzar los objetivos de reconocer las rectas de regresión como mejor ajuste a una nube de puntos y calcular la ecuación de las rectas de regresión como mejor ajuste a una nube de puntos.

Se revisará el cuaderno de los alumnos para calificar la actividad que fue mandada para casa en la sesión anterior.

Se explicarán los conceptos de regresión lineal y recta de regresión, y se explicarán las fórmulas para el cálculo de las rectas de regresión.

Se usarán varios ejemplos prácticos para que el alumnado pueda aprender mucho más fácil estos complejos términos.

Actividad 5.1

Se ha analizado el número de líneas móviles contratadas en pequeñas empresas y el número de trabajadores con el que cuentan las empresas.

Líneas	1	3	2	4	1
Empleados	3	9	5	11	4

- a) Halla el coeficiente de correlación lineal.

b) *Calcula la recta de regresión de sobre .*

Actividad 5.2

En los siguientes apartados se da un valor de coeficiente de correlación lineal; indica en cuáles tiene sentido calcular la recta de regresión. Justifica tus respuestas.

a) $r = 0.7$

b) $r = -0.3$

c) $r = -1$

d) $r = -0$

Se le mandará la siguiente actividad para la casa:

Actividad 5.3

Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) *¿Cuál crees tú que sea el punto que tienen en común las dos rectas de regresión de una variable bidimensional?*

b) *Si el valor absoluto del coeficiente de correlación lineal se aproxima a 1, ¿Cuál es la tendencia de las dos rectas de regresión de una variable bidimensional?*

Sesión 6

En esta sesión se considera alcanzar el objetivo de que el alumnado pueda realizar estimaciones a partir de una recta de regresión entre dos variables.

Después de revisar el cuaderno de los alumnos y evaluar la actividad realizada, se procederá a explicar cómo se pueden realizar estimaciones o aproximaciones de valores de una variable correspondientes a unos valores concretos de otra variable.

Es de suma importancia mostrar al alumnado ejemplos donde no pueden realizarse este tipo de estimaciones para que puedan comprender que no siempre es factible realizar este tipo de aproximaciones y que dependiendo del valor del coeficiente de regresión lineal se harán o no.

Actividad 6.1

Se ha registrado los siguientes datos en una comunidad de España que ha tenido últimamente gran número de incendios y se relaciona con las temperaturas medias ambientales registradas durante esos días. Los datos obtenidos son:

Número de Incendios	2	6	9	5	3	1	6
Temperatura media en °C	30	35	39	34	32	29	36

- a) Halla el coeficiente de correlación lineal.
- b) Calcula la recta de regresión de sobre .
- c) Si se produjeran 14 incendios, ¿qué previsión de temperatura media se podría realizar?
- d) ¿Es la estimación correcta? Justifica.

Actividad 6.2

La longitud de un raíl de vía de tren a 0 °C es de 10m. La siguiente tabla nos muestra los alargamientos, A (en mm), a distintas temperaturas, T (en °C).

T (°C)	0	8	15	25	40	50	60	75
A (mm)	0	1	2	3	5	6	7	9

Calcula:

- a) El alargamiento que se obtendría para temperaturas de 32 °C y 95 °C.
- b) ¿Son fiables estas estimaciones? Justifique su respuesta.

Se le mandará la siguiente actividad para casa:

Actividad 6.3

Las estaturas, E (en cm), y los pesos, P (en kg), de 8 jugadores de fútbol americano vienen dados en la siguiente tabla:

E (cm)	186	189	190	192	193	198	201	205
P (kg)	85	85	86	90	91	93	102	101

Estime mediante el método que considere más apropiado el peso de un nuevo fichaje al equipo cuya altura es de 210 cm. Justifique la fiabilidad del valor obtenido.

Sesión 7

Se hará uso de las TICs para la realización de esta sesión ya que en ella, se le enseñará al alumnado el uso del paquete de Office 365, específicamente de la hoja de cálculo Excel, para la tabulación y graficación de distribuciones bidimensionales.

Además, se explicarán los pasos para realizar la recta de regresión y obtener el valor del coeficiente de correlación lineal mediante el uso de la hoja de cálculo Excel.

Es necesario impartir la sesión en el aula de informática para que cada alumno pueda hacer uso de un ordenador.

Sesión 8

En esta sesión se le realizará al alumnado una prueba final escrita para evaluar el aprendizaje obtenido en la unidad didáctica “Estadística Bidimensional”. Se evaluará todo lo aprendido en las sesiones anteriores a excepción de la sesión 7. El examen tendrá una duración de 45 minutos que estará compuesto por 4 ejercicios donde algunos tendrán varios apartados para así poder evaluar los conocimientos adquiridos por el alumnado de todo el contenido impartido.

Mientras el alumnado realiza el examen, el docente pasará por cada uno de los estudiantes para pedirle su cuaderno de clase y revisará si ha hecho las actividades, las faltas de ortografía, el orden, la limpieza, etc. con el fin de evaluar el cuaderno de clase.

Los instrumentos de evaluación utilizados en esta unidad son la participación y la actitud en la clase, el trabajo en grupo y la dinámica, las tareas realizadas por parte del alumnado y la prueba escrita.

A continuación, se muestra (Tabla 8), a modo de resumen, los criterios de calificación utilizados y el tanto por ciento adjudicado a cada uno de ellos:

Criterios de Calificación	%	Criterios evaluables
Actitud y comportamiento en el aula	5	- Estar en silencio mientras se imparte la clase - Respeto al docente y compañeros - Compañerismo
Participación	15	- Participar de manera activa en las preguntas que plantea el docente y en los debates creados en la impartición de las sesiones
Trabajo en grupo y dinámica	10	- Interés en la dinámica - La argumentación de los resultados - Respeto a los compañeros de grupo
Tareas para el hogar	10	- Realiza las actividades de repaso de contenidos y la tarea práctica
Tareas en el aula de clase	5	- Realizar las actividades propuestas en el aula
Presentación del cuaderno	5	- Presentar el cuaderno de manera limpia, legible y ordenada.
Prueba Final Escrita	50	- Realizar los problemas propuestos en el ejercicio - Cumplir con los objetivos propuestos

Tabla 8. Criterios de calificación (Elaboración propia)

7. Conclusiones

Los objetivos establecidos en la elaboración de este trabajo han sido exitosamente cumplidos, representando una extensa y precisa contextualización de los puntos más importantes de la docencia en matemáticas en 4° de E.S.O.

Las distintas fundamentaciones presentes en este trabajo son resultado de la experiencia adquirida a través de la lectura de distintas fuentes informativas de educación, además de la propia experiencia como docente en prácticas y el conocimiento adquirido durante la realización de este Máster.

A través de este trabajo se puede garantizar un efectivo método de enseñanza y aprendizaje para los estudiantes de 4° de E.S.O., con respecto al apropiado desarrollo de los temas y conceptos como la *Estadística bidimensional*, el *Coeficiente de correlación* y *Regresión y correlación lineal*; los cuales representan una parte de la enseñanza en el año escolar en cuestión.

Cabe mencionar la especial importancia de la consideración del grado cognitivo de cada estudiante y la particular capacidad que puede presentar para aprender y retener la información enseñada, y cuánto es importante permitir el desarrollo y progreso conjunto de cada alumno por parte del docente.

8. Bibliografía

1. Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V. Pedro Gómez (Ed).
2. Colera, J. (2016). Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4 (Trimestres). Anaya (Ed).
3. Espejo, I., Fernández, F., López, M.A., Muñoz, M., Rodríguez, A.M., Sánchez, A. y Valero, C. (2006). Estadística Descriptiva y Probabilidad. Universidad de Cádiz.
4. Gea, M., Batanero, C., López-Martín, M. y Contreras, J. (2015). Los recursos tecnológicos en la estadística bidimensional en los textos españoles de bachillerato. Revista Facultad de Ciencia y Tecnología, 38(7), 113-132.
5. González, T. (2000). Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas: Un estudio evaluativo. Revista de Investigación Educativa, 18(1), 175-199.
6. Herrera, N., Montenegro, W. y Poveda, S. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 35(2), 254-287.
7. Hernández-Ávila, M., Garrido, F. y Salazar-Martínez, E. (2000). Sesgos en estudios epidemiológicos. Recuperado en: <https://scielosp.org/article/spm/2000.v42n5/438446/#:~:text=El%20sesgo%20de%20informaci%C3%B3n%20se,de%20la%20hip%C3%B3tesis%20que%20se>
8. Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(3), 383-406.
9. López, J.F. Historia de la estadística. (Mayo 2020). Recuperado de: <https://economipedia.com/historia/historia-de-la-estadistica.html>
10. Martín, A. y Álvarez, R. Enseñar estadística bidimensional en ESO y Bachillerato. (Abril 2003). Recuperado de http://www.aulamatematica.com/Revistas/pdf_revistas/Sigma/SIGMA_24_SD_BIDI.pdf
11. Montero, J., Larraz, B., Fernández-Avilés, G., Alfaro, J., Mondéjar, J., y Martín, A. (2007). Estadística descriptiva. Thomson-Paraninfo (Ed).
12. Peralta, J. (1995). Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática. Huerga y Fierro (Ed).
13. Sánchez-Bermejo, D. (2016). Matemáticas académicas 4.º ESO (Tres Volúmenes). Edelvives (Ed).

14. Torres, M., Paz, K. y Salazar, F.G. (2006), Métodos de Recolección de Datos para una Investigación., Facultad de Ingeniería – Universidad Rafael Landívar.
15. Vargas Sabadías, A. (1995). Estadística Descriptiva e Inferencial. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha (Ed).

8.1 Legislación

1. España, (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. Boletín Oficial del Estado (BOE), núm. 295, 10 de diciembre de 2013.
2. España, (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado (BOE), núm. 3, 3 de enero de 2015.
3. Andalucía, (2016). Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (BOJA), núm. 122, 28 de junio de 2016.
4. Andalucía, (2016). Orden de 14/7/2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación en el proceso de aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (BOJA), núm. 144, 28 de julio de 2016.
5. España, (2015). Orden de ECD/65/2015, de 21 de enero, por el que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado (BOE), núm. 23, 29 de enero de 2015.