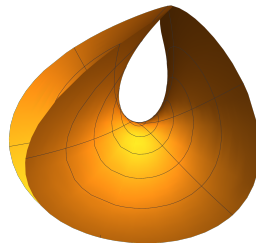




Universidad de Jaén

MATEMÁTICAS

**LA REPRESENTACIÓN DE
ENNEPER–WEIERSTRASS PARA
SUPERFICIES MÍNIMAS**



Proyecto Fin de Máster

Autor: Alba López Civantos
Tutor: José Miguel Manzano Prego

Octubre 2022

Índice general

Resumen	2
Abstract	2
Capítulo 1. Introducción	3
Capítulo 2. Preliminares: superficies regulares en el espacio	8
1. Plano tangente	9
2. Aplicación de Gauss	9
3. Primera y segunda formas fundamentales	10
4. Particularización de la curvatura media para grafos	13
Capítulo 3. Algunas propiedades de las superficies mínimas	16
1. Principio de minimización del área	16
Capítulo 4. Coordenadas isotermas y representación de Enneper–Weierstrass	24
1. Existencia de coordenadas isotermas	24
2. Reparametrización isoterma de un grafo	26
3. Las superficies mínimas como superficies de Riemann	29
4. Representación de Enneper–Weierstrass para superficies mínimas	32
Capítulo 5. Representación superficies mínimas	42
1. Representación a partir de la parametrización	42
2. Representación a partir de la representación de Enneper–Weierstrass	45
3. Librería mesh	48
Bibliografía	53
Apéndice A. Descripción de la librería mesh	55

Resumen

Este trabajo fin de máster trata algunos aspectos de las superficies mínimas y su relación con el análisis complejo. Mostraremos que las superficies mínimas tienen la estructura de superficie de Riemann al encontrar parametrizaciones locales por coordenadas isotermas. Esto permitirá desarrollar la representación de Enneper-Weierstrass, que consiste en recuperar cualquier superficie mínima a partir de una función holomorfa y otra función meromorfa definidas en un abierto del plano complejo. Finalmente, se utilizarán los resultados obtenidos para representar gráficamente superficies mínimas usando el software Mathematica.

Palabras clave: superficie mínima, coordenada isoterma, holomorfa, meromorfa y representación EnneperWeierstrass.

Abstract

This end-of-master project deals with some features of minimal surfaces in Euclidean space and their relation with complex analysis. We will show that minimal surfaces admit a Riemann surface structure by finding local charts by isothermal coordinates. This will help us develop the so-called Enneper-Weierstrass representation, which characterizes minimal surfaces in terms of a holomorphic function and a meromorphic function defined on an open subset of the complex plane. Finally, we will make use of the above results to plot minimal surfaces using the software Mathematica.

Key words: minimal surface, isothermal coordinate, holomorph, meromorph and Enneper-Weierstrass representation.

Introducción

Este Trabajo de Fin de Máster (TFM) se realiza como culminación del Máster de Matemáticas, durante el curso 2021/2022. Para su realización, nos hemos centrado en el estudio de superficies mínimas y la conexión de estas con el análisis de variable compleja. En este **primer capítulo** haremos una breve introducción histórica que pondrá de relevancia el papel de las superficies mínimas en la investigación matemática de los últimos 250 años.

Los primeros estudios sobre las superficies mínimas se remontan al siglo XVIII con el origen del Cálculo Variacional y la Geometría diferencial clásica. El primero en estudiar las superficies fue Leonhard Euler (matemático y físico suizo, 1707–1783), quien estudió las superficies a partir de sus propiedades analíticas; en concreto, como los puntos críticos del funcional de área. Aunque su principal precursor fue el matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736–1813), quien en 1762 puso en práctica la teoría de Euler para abordar diversos problemas, cabe destacar el papel central que jugó en la teoría el llamado *Problema de Plateau*. Este problema consiste en, dado un contorno curvo en el espacio, determinar si existe o no una superficie mínima bordeada por el mismo. En el plano físico, el problema se interpretó como la formación de una película de jabón al sumergir ciertas curvas cerradas de alambre en agua jabonosa, puesto que la superficie obtenida es una superficie mínima gracias a la ley de Laplace–Young, véase imagen 1

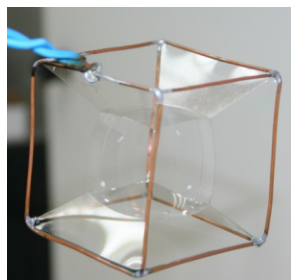


FIGURA 1. Pompa de jabón

Partiendo de esta premisa, hemos realizado un **segundo capítulo** donde plasmos unos preliminares asociados a la asignatura *Geometría de curvas y superficies* desarrollada durante el *Grado en Matemáticas*, con la finalidad de recordar conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo y fijar la notación usada.

Como consecuencia de ser un recordatorio no se muestran las demostraciones y se utilizará material del grado, véase referencias [1] y [8].

Cabe destacar el final de este segundo capítulo, donde hablaremos de las superficies de tipo grafo; en concreto, dado cualquier punto de una superficie regular Σ , existirá una parametrización de Σ alrededor de un punto $p \in \Sigma$ como un grafo diferenciable $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Esto será clave para obtener una expresión de la curvatura media asociada a los grafos que en capítulos posteriores será relacionada con el concepto de superficie mínima obteniendo así *ecuación de grafos mínimos* de Euler-Lagrange:

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0. \quad (1.1)$$

donde denotamos mediante subíndices las derivadas parciales correspondientes, véase 2.11. En particular, entrando en los desarrollos propios del trabajo, en un **tercer capítulo**, basándonos en [10], estableceremos aquello que entenderemos por minimizar un área con la finalidad de llegar a un concepto vertebral, el *superficie mínima*, es decir, aquella que posee curvatura media asociada nula. Aclaremos, que esto se establecerá como definición en dicho capítulo, véase la definición 3.4.

Necesitamos continuar con reseñas históricas para entender el desarrollo del trabajo; a pesar de los razonamientos de Lagrange, este no buscó soluciones concretas de la ecuación (1.1) y fue en 1776 el matemático alemán Jean Baptiste Meusnier (1754–1793) quien descubrió que superficies como el catenoide o el helicoide si verificaban dicha ecuación. Casi sesenta años después, Heinrich F.Scherk, con su idea de la integración separando variables en la ecuación (1.1) descubrió nuevas superficies mínima que llevan su nombre. En 1865, Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) obtuvo diversos métodos para resolver el problema de Plateau siendo esto un gran impulso para las superficies mínimas. Comenzaron a desarrollarse los primeros ejemplos y de ahí el desarrollo de la sección Ejemplos de superficies mínimas al final del capítulo dos, véase la sección 1.1. Algunos de estos ejemplos han sido motivados a partir de la visualización de la galería de superficies mínimas de Matthias Weber [3].

Los trabajos de todos estos matemáticos además de la ecuación de los grafos mínimos y sus propiedades, utilizaban también las fórmulas de representación para superficies de Weierstrass. Dichas fórmulas eran similares a las que había planteado A.Enneper en 1864, quien dio pie a una familia de superficies mínimas que hoy llevan su nombre, véase la imagen 2.

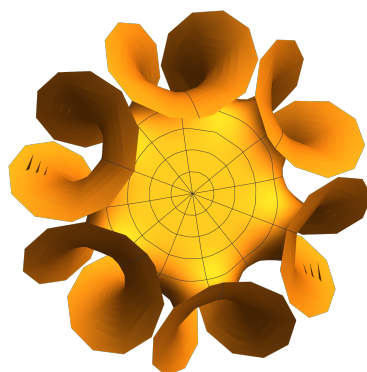


FIGURA 2. Una superficie de Enneper con simetría de orden 6.

Por su parte, Bernhard Riemann trabajó en el problema de Plateau obteniendo los llamados ejemplos de Riemann y desarrolló su propia teoría de superficies que desembocaría en la geometría riemanniana. Con el transcurso de los años y gracias a la aportaciones de Riemann, se descubrió la relación de la teoría de Superficies con el Análisis Complejo, en concreto, Riemann en geometría diferencial descubrió las coordenadas isotermas que comentaremos más adelante, si bien fue Gauss en 1822 quién demostró su existencia en distintas superficies. Debido a esta relación con el análisis complejo, este trabajo también se basa bibliográficamente en las referencias [13] y [14].

Cabe destacar que en 1875, L. Henneberg descubrió la primera superficie mínima no orientable. Debido a este hecho interesante, se ha decidido representarla en la sección 1.2. Durante los primeros años del siglo XX no hubo progresos significativos en el estudio de las superficies mínimas aunque una gran aportación de forma indirecta fue la teoría de integración y medida de E. Lebesgue, junto con los métodos analíticos de Hilbert y Lebesgue y el desarrollo tan rápido del Análisis Funcional debido a Hilbert, R. Fréchet y Hahn Banach, entre otros. En los años sesenta, como consecuencia de los trabajos de Robert Osserman que estrecharon más aún los lazos entre el análisis complejo y la teoría de superficies mínimas, se obtuvieron nuevos resultados sobre la clasificación de superficies mínimas completas y sobre la aplicación de Gauss de superficies mínimas, que toma en coordenadas isotermas la forma de una función meromorfa sobre la esfera de Riemann.

En base a esto, y teniendo como principal apoyo las referencias de Osserman [1] y Fang [2], véase también [4, 5, 6, 7], hemos desarrollado un **cuarto capítulo**, algo más denso, que nos lleva desde la introducción y existencia de las coordenadas isotermas unido a algunas consecuencias que favorecen y simplifican el cálculo de la curvatura de Gauss y la curvatura media, hasta la reparametrización de una superficie regular mínima por dichas coordenadas junto con el desarrollo de la representación de Enneper-Weierstrass.

Además, para poner en práctica todo lo plasmado, se ha desarrollado un **quinto capítulo** donde usando el programa Mathematica se han representado algunas de las superficies estudiadas a la largo del trabajo teniendo como apoyo diversos archivos de curvas y superficies algunas de ellas mínimas, [18] y [17]. Dicha representación se ha realizado de diversas formas, por un lado se han representado desde la parametrización de la superficie y por otro para poner en práctica la representación de Enneper–Weierstrass se ha representado la superficie de **Richmond**, descrita por primera vez por su creador Herbert William Richmond en 1904 (véase, dentro de ese capítulo, la sección 2.1) y la familia asociada del catenoide y el helicoides (véase la sección 1.3). En la actualidad, la obtención de nuevos ejemplos de superficies mínimas mediante las fórmulas de Enneper–Weierstrass sigue siendo un tema de investigación activo, véase [3].

Finalmente y antes de pasar al desarrollo del trabajo, por un lado aclarar el por qué de la elección de este tema y nuestra aportación. Por un lado, este tema ha sido elegido como consecuencia de ser un tema que comenzó a estudiarse hace más de 250 años, y aún así, en la actualidad sigue siendo un tema de investigación activo y con grandes aplicaciones en biología, química, arquitectura o ingeniería. Son muy diversas y podemos encontrarlas en [20], en concreto hemos recopilado algunas de las mismas:

- En arquitectura encontramos la Escalera de la Sagrada familia. Fue una obra de Antonio Gaudí que utilizó el helicoides, superficie mínima que será estudiada a lo largo de las secciones de nuestro trabajo. Véase imagen 3

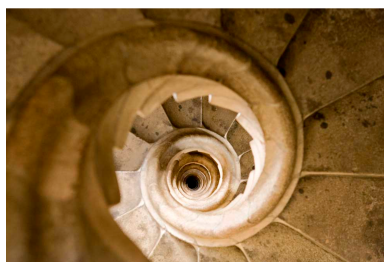


FIGURA 3. Escalera de la Sagrada Familia, Barcelona

- En ingeniería las aplicaciones poseen mayor diversidad, van desde la construcción de las primeras chimeneas de las centrales nucleares (véase imagen 4), pasando por ensamblaje de nanoestructuras periódicas hasta el uso de las superficies mínimas como la superficies Schwarz o el giroide en óptica donde han descubierto que algunos insectos tienen en sus alas y caparazones patrones triplemente periódicos (giroide) lo cuál favorece a la dirección de forma selectiva las longitudes de onda de luz; con lo que les ha llevado a una mejora para fabricar lentes o espejos. Además las superficies Schwarz–D o el giroide mejoran la transmisión del calor siendo útiles para la construcción

de intercambiadores de calor mientras que la superficie Schwarz–P favorece el rendimiento de una batería.



FIGURA 4. Primeras chimeneas, centrales nucleares

- En biomedicina como consecuencia de nuestra morfología ósea y la coincidencia de la misma con las superficies mínimas triplemente periódicas se favorece a la impresión 3D de rellenos de prótesis. Véase imagen 5

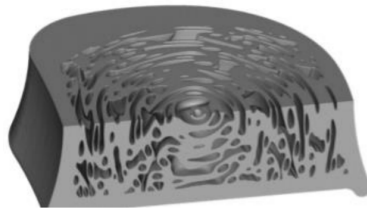


FIGURA 5. Sección de segmento vertebral, perspectiva

Por otro lado y para concluir me gustaría aclarar que nuestra aportación ha sido unificar estos conceptos complejos y adaptarlos para ser presentados como una continuación natural de la asignatura *Geometría de curvas y superficies*.

Preliminares: superficies regulares en el espacio

En este capítulo, introducimos la teoría de superficies útil para este trabajo. A groso modo, una superficie es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ donde cada punto tiene un entorno similar a un trozo del plano que ha sido curvado. Veamos, como en términos matemáticos, se define una superficie (regular) de $\mathbb{R}^3$:

DEFINICIÓN 2.1. Un subconjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada punto p en Σ , existe un entorno abierto V de p y una aplicación $X : U \rightarrow V \cap \Sigma$ de un dominio $U \subset \mathbb{R}^2$ en $V \cap \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. X es diferenciable,
2. X es un homeomorfismo,
3. la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$.

A X se le llama parametrización de Σ alrededor de p y (u, v) se llaman coordenadas locales del punto $X(u, v)$. En lo que sigue, escribiremos

$$X = X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Puntualizamos que, para que X sea diferenciable, cada función coordenada x, y, z debe ser de clase $C^\infty(U)$. Además, si $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable, en particular, será continua, luego $X : U \rightarrow V \cap \Sigma$ es continua. Por otro lado, que X sea un homeomorfismo exige que la aplicación $X : U \rightarrow V \cap \Sigma$ sea biyectiva y que exista la aplicación inversa $X^{-1} : V \cap \Sigma \rightarrow U$ continua, lo cual nos será de gran utilidad en el avance de este trabajo. Finalmente, por ser la aplicación dX_q inyectiva, lleva la base usual de $\mathbb{R}^2$ en dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ dados por

$$\left\{ dX_q(1, 0) = \frac{\partial X}{\partial u} = X_u, dX_q(0, 1) = \frac{\partial X}{\partial v} = X_v \right\}.$$

Esto nos da la expresión matricial en la base usual

$$dX_q \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u & X_v \end{pmatrix}.$$

PROPOSICIÓN 2.2. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ alrededor de un punto $p \in \Sigma$ y sea $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ un difeomorfismo. Entonces, $X \circ \varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra parametrización de Σ alrededor de p .

1. Plano tangente

El vector tangente a una superficie en un punto nos permite hablar de la diferencial de una aplicación diferenciable y poder estudiar la geometría con el cálculo diferencial. Para ello, necesitaremos el concepto de curva diferenciable en una superficie Σ , definido como una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, siendo $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, tal que $\alpha(t) \in \Sigma$ para todo $t \in I$.

DEFINICIÓN 2.3. Dado un punto p en una superficie regular $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, decimos que $v \in \mathbb{R}^3$ es un vector tangente a la superficie Σ en el punto p si existe una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

El mejor objeto lineal que aproxima una superficie Σ en un punto suyo p es el plano tangente. Se define como:

$$T_p\Sigma = \{v \in \mathbb{R}^3 / v \text{ es tangente a } \Sigma \text{ en } p\}.$$

LEMA 2.4. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de Σ alrededor de $p = X(q)$ para cierto $q \in U$. Entonces, $T_p\Sigma = dX_q(\mathbb{R}^2)$.

Como consecuencia, podemos restringir la diferencial para producir un isomorfismo $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p\Sigma$. Además, se deduce que $T_p\Sigma$ es el plano vectorial generado por $\{X_u(q), X_v(q)\}$.

2. Aplicación de Gauss

La recta normal a una superficie regular Σ en un punto $p \in \Sigma$ es la recta afín que pasa por p y es ortogonal a $T_p\Sigma$. Si tomamos una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de Σ que recubra un entorno de p , obtenemos el vector unitario perpendicular a $T_p\Sigma$ dado por

$$\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

Dicho vector es en realidad una aplicación definida en el abierto U . Para que esté definido en $X(u) \in \Sigma$, tomamos un campo normal unitario

$$N^X = \left(\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1} \right) : X(U) \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3. \quad (2.1)$$

Recordamos además las siguientes definiciones de objetos diferenciables sobre la superficie Σ :

- Una función $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ se dice diferenciable en $p \in \Sigma$ si para toda parametrización $Y : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $p \in Y(U)$ se tiene que $f \circ Y : W \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $Y^{-1}(p)$.
- Un campo $T : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice diferenciable en $p \in \Sigma$ si para toda parametrización $Y : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $p \in Y(U)$ se tiene que $f \circ Y : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable en $Y^{-1}(p)$.

Observemos que si U es conexo, también lo es $X(U)$, luego solo hay dos campos normales unitarios definidos en $X(U)$, que están dados por N^X y $-N^X$. Además, N^X introduce una orientación en $T_p\Sigma$ si establecemos que $\{X_u(q), X_v(q)\}$ está positivamente orientado cuando

$$\det(X_u(q), X_v(q), N^X(q)) > 0.$$

De esta forma, $-N^X$ induce la orientación opuesta a N^X . Más aún, si $\tilde{X} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ es otra parametrización de Σ alrededor del punto p , obtenemos otra dirección unitaria $N^{\tilde{X}}(p) = \pm N^X(p)$. La orientabilidad global de Σ se tiene cuando pueden elegirse un recubrimiento de Σ por parametrizaciones para las que los signos son todos positivos.

DEFINICIÓN 2.5. Una superficie regular $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ se dice orientable si existe un campo normal unitario definido globalmente $N : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ que llamamos aplicación de Gauss.

Si Σ es conexa y orientable, existen dos posibles aplicaciones de Gauss ($\pm N$). Fijar una de ellas equivale a elegir una orientación en cada plano tangente y diremos que Σ está orientada. Equivalentemente, una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ está orientada si puede recubrirse por entornos coordenados de forma que, cada vez que $p \in \Sigma$ pertenezca a dos de estos entornos coordenados, el cambio de parámetros tiene jacobiano positivo.

Dada una superficie regular $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ y una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, podemos considerar $N = N^X \circ X : U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$. La diferencial de N en un punto $(u, v) \in U$ es una aplicación $dN_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{N(u,v)}S^2$. Como $T_{N(u,v)}S^2$ es ortogonal a $N(u, v)$, se tiene que está generado por X_u y X_v . Por tanto, $dX_{X(u,v)}^{-1} \circ dN_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ está bien definida y es un endomorfismo.

DEFINICIÓN 2.6. Se define la curvatura de Gauss de Σ en $p = X(u, v)$ como

$$K(p) = \det(-dX_{X(u,v)}^{-1} \circ dN_{(u,v)}).$$

DEFINICIÓN 2.7. Se define la curvatura media de Σ en $p = X(u, v)$ respecto de N como

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{traza}(-dX_{X(u,v)}^{-1} \circ dN_{(u,v)}).$$

Estas definiciones no dependen de la elección de la parametrización X . Observamos que si cambiamos N por $-N$, $K(p)$ se mantiene mientras que $H(p)$ cambia de signo. En particular, $K(p)$ está bien definido para cualquier superficie (orientable y no) mientras que $H(p)$ solo es válido para superficies orientables.

3. Primera y segunda formas fundamentales

Sea una superficie regular $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, un punto $p \in \Sigma$ y $T_p\Sigma$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Dados dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma$, podemos calcular $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, donde

$\langle, \rangle$ es el producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Se define así la primera forma fundamental de Σ en p como la restricción de la métrica euclídea a $T_p\Sigma$, es decir,

$$I_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R} \quad I_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Dado un vector tangente $\vec{w} \in T_p\Sigma$, puede escribirse como un vector tangente a una curva de la superficie, es decir, existe una curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{w}$. Por tanto, si aplicamos la primera forma fundamental,

$$\begin{aligned} I_p(\vec{w}, \vec{w}) &= \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= \langle X_u, X_u \rangle (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle u'v' + \langle X_v, X_v \rangle (v')^2. \end{aligned}$$

En particular, se definen los coeficientes de la primera forma fundamental como

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \|X_u\|^2 \quad F = \langle X_u, X_v \rangle \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = \|X_v\|^2$$

Mediante estos coeficientes podemos expresar de forma matricial el producto escalar entre dos vectores y el plano tangente. Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es parametrización de Σ y $q \in U$, podemos expresar en la base $\{X_u(q), X_v(q)\}$ dos vectores genéricos como $\vec{v} = aX_u(q) + bX_v(q)$ y $\vec{w} = cX_u(q) + dX_v(q)$. Por lo tanto,

$$I_p(v, w) = \langle v, w \rangle = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Supongamos ahora que $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es orientable y está parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Dados un punto $p \in \Sigma$ y $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma$, se define la segunda forma fundamental de Σ en p como la forma bilineal,

$$II_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R} \quad II_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle -dN_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle.$$

Repitiendo el razonamiento que hemos realizado para la primera forma fundamental, un vector $\vec{w} \in T_p\Sigma$ puede escribirse como un vector tangente a una curva de la superficie, es decir, existe una curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{w}$. Si aplicamos la segunda forma fundamental, obtenemos que

$$\begin{aligned} II_p(\vec{w}, \vec{w}) &= \langle -dN_p \vec{w}, \vec{w} \rangle = \langle -dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - (\langle N_u, X_v \rangle + \langle N_v, X_u \rangle) u'v' - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como los vectores X_u y X_v son ortogonales a N , es cierto que $\langle N, X_u \rangle = 0$ y $\langle N, X_v \rangle = 0$. Derivamos estas igualdades respecto de u y v , obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle N, X_u \rangle &= \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0, & \frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_u \rangle &= \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} \langle N, X_v \rangle &= \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0, & \frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_v \rangle &= \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente, tenemos que

$$\begin{aligned} -\langle N_u, X_u \rangle &= \langle N, X_{uu} \rangle, & -\langle N_v, X_u \rangle &= \langle N, X_{uv} \rangle, \\ -\langle N_u, X_v \rangle &= \langle N, X_{vu} \rangle, & -\langle N_v, X_v \rangle &= \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Además, como $X_{uv} = X_{vu}$, se deduce $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$. Sustituyendo todo en (2.2), llegamos al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= \langle N, X_{uu} \rangle (u')^2 - 2\langle N, X_{uv} \rangle u' v' + \langle N, X_{vv} \rangle (v')^2. \end{aligned}$$

Deducimos así los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle \quad f = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle \quad g = \langle N, X_{vv} \rangle.$$

Existe una relación entre el diferencial del normal y los coeficientes de las formas fundamentales. Para obtenerla, utilizaremos expresiones matriciales.

$$\begin{aligned} -e &= -\langle N, X_{uu} \rangle = \langle N_u, X_u \rangle = \langle aX_u + bX_v, X_u \rangle = aE + bF, \\ -f &= -\langle N, X_{vu} \rangle = \langle N_u, X_v \rangle = \langle aX_u + bX_v, X_v \rangle = aF + bG, \\ -f &= -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle = \langle cX_u + dX_v, X_u \rangle = cE + dF, \\ -g &= -\langle N, X_{vv} \rangle = \langle N_v, X_v \rangle = \langle cX_u + dX_v, X_v \rangle = cF + dG, \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde hemos escrito $N_u = aX_u + bX_v$ y $N_v = cX_u + dX_v$. Como dN es un endomorfismo autoadjunto, se sigue que $c = b$. En consecuencia, las relaciones dadas por (2.3) se pueden expresar matricialmente como

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Para calcular la inversa $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$, en primer lugar comprobamos su existencia:

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = \|X_u \times X_v\|^2 \neq 0, \tag{2.5}$$

ya que se trata de una parametrización regular. Con esto, podemos expresar

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

luego

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ -eF + fE & -fF + gE \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Además, por ser $-dN_p$ endomorfismo autoadjunto, podemos diagonalizarlo. En otras palabras, existe $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de $T_p\Sigma$ tal que la matriz asociada

a $-dN_p$ en esta base es de la forma

$$\begin{pmatrix} \kappa_1(p) & 0 \\ 0 & \kappa_2(p) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Los números $\kappa_i(p)$ ($i = 1, 2$) se llaman curvaturas principales de Σ en p . Además, podemos reescribir la curvatura media y de Gauss de Σ en p como

$$K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p), \quad H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}. \quad (2.9)$$

Tomando trazas y determinantes en (2.7), obtenemos las siguientes expresiones en términos de los coeficientes de las formas fundamentales:

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H(p) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}. \quad (2.10)$$

4. Particularización de la curvatura media para grafos

Dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y una función diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, definimos el grafo de f como el conjunto

$$G(f) = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\}.$$

En tal caso, $G(f)$ admite la parametrización natural $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Es fácil comprobar que X es una parametrización de $G(f)$ alrededor de cualquier punto $p \in G(f)$.

PROPOSICIÓN 2.8. *Dado un punto p de una superficie regular Σ , existe una parametrización de un entorno de p en Σ como un grafo diferenciable en una de las direcciones usuales, es decir, de (al menos) una de las tres siguientes formas:*

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

$$X(u, v) = (f(u, v), u, v),$$

$$X(u, v) = (u, f(u, v), v).$$

Por tanto, los grafos van a ser suficientes para entender el comportamiento local de las superficies. En concreto, veamos como se establece la curvatura media de un grafo. En lo que sigue, denotaremos mediante subíndices las derivadas respecto de u y v , tal y como hemos hecho para los vectores X_u y X_v :

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{\partial f}{\partial u}, & f_v &= \frac{\partial f}{\partial v}, \\ f_{uu} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, & f_{vv} &= \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, & f_{uv} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

PROPOSICIÓN 2.9. *Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. La curvatura media de la parametrización $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ respecto al normal viene establecida por*

$$H = \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right), \quad (2.12)$$

siendo ∇ y div los operadores gradiente y divergencia usuales, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Dada la parametrización, calculemos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X(u, v)}{\partial u} = (1, 0, f_u), & X_v &= \frac{\partial X(u, v)}{\partial v} = (0, 1, f_v), \\ X_{uu} &= \frac{\partial X_u(u, v)}{\partial u} = (0, 0, f_{uu}), & X_{vv} &= \frac{\partial X_v(u, v)}{\partial v} = (0, 0, f_{vv}), \\ X_{uv} &= \frac{\partial X_u(u, v)}{\partial v} = (0, 0, f_{uv}) \end{aligned}$$

y el normal asociado

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1),$$

que nos da la aplicación de Gauss

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}.$$

Los coeficientes asociados a la primera y segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned} E &= \|X_u\|^2 = 1 + f_u^2, & G &= \|X_v\|^2 = 1 + f_v^2, & F &= \langle X_u, X_v \rangle = f_u f_v \\ e &= \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \\ f &= \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}. \end{aligned}$$

Apliquemos estos coeficientes a la fórmula de la curvatura media (2.10):

$$\begin{aligned} H &= \frac{(1 + f_v^2) \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} - 2f_u f_v \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} + (1 + f_u^2) \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}}{2((1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - (f_u f_v)^2)} \\ &= \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Finalmente, debemos desarrollar la divergencia en (2.12) para obtener la última fórmula. En concreto, consideremos el campo

$$T = \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} = \left(\frac{f_u}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \frac{f_v}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right)$$

cuya divergencia está dada por

$$\operatorname{div}(T) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right) = \left(\frac{f_u}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)_u + \left(\frac{f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)_v$$

$$\begin{aligned}
& \frac{f_{uu} \sqrt{1+f_u^2+f_v^2} - f_u \frac{2f_u f_{uu} + 2f_v f_{vu}}{2\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}}{(\sqrt{1+f_u^2+f_v^2})^2} + \frac{f_{vv} \sqrt{1+f_u^2+f_v^2} - f_v \frac{2f_u f_{uv} + 2f_v f_{vv}}{2\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}}{(\sqrt{1+f_u^2+f_v^2})^2} \\
&= \frac{f_{uu} (1+f_u^2+f_v^2) - f_u (f_u f_{uu} + f_v f_{vu})}{(1+f_u^2+f_v^2) \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} + \frac{f_{vv} (1+f_u^2+f_v^2) - f_v (f_u f_{uv} + f_v f_{vv})}{(1+f_u^2+f_v^2) \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \\
&= \frac{f_{uu} (1+f_v^2) + f_{vv} (1+f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv}}{(1+f_u^2+f_v^2)^{3/2}}. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Comparando las expresiones (2.13) y (2.14) es inmediato que ambas expresiones nos dan la identidad deseada (2.12). $\square$

Algunas propiedades de las superficies mínimas

El objetivo de este trabajo es entender algunas propiedades de las superficies mínimas, definidas como aquellas que tienen curvatura media idénticamente nula. En primer lugar, estudiaremos las superficies mínimas como puntos críticos del área para después analizar algunos ejemplos relevantes de la teoría.

1. Principio de minimización del área

Vamos a ver que las superficies que tienen curvatura media constante también son minimizantes locales del área bajo deformaciones que conservan el volumen. Aclaremos aquello que se entenderemos por minimizante del área.

DEFINICIÓN 3.1. Sea Σ una superficie regular que delimita una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si cualquier pequeña deformación de Σ que conserva el volumen encerrado hace aumentar el área de la superficie diremos que Σ minimiza localmente el área.

Para poder obtener el principio del mínimo necesitamos previamente el siguiente lema y la versión del teorema de la convergencia para superficies.

LEMA 3.2. Sean U es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $F \in C^\infty(U)$. Si $\int_U F \cdot g = 0$ para toda $g \in C^\infty(U)$ tal que $\int_U g = 0$, entonces F es constante.

DEMOSTRACIÓN. Razonaremos por reducción al absurdo, suponiendo que F no es constante, es decir, existen puntos $p, q \in U$ tal que $F(p) \neq F(q)$. Dado $\varepsilon > 0$ tal que las bolas $B(p, \varepsilon)$ y $B(q, \varepsilon)$ están contenidas en U , consideremos la función auxiliar $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } B(p, \varepsilon), \\ -1 & \text{en } B(q, \varepsilon), \\ 0 & \text{en } U - (B(p, \varepsilon) \cup B(q, \varepsilon)). \end{cases}$$

Como el espacio de funciones diferenciables de soporte compacto $\mathcal{C}_0^\infty(U)$ es denso en el espacio de Hilbert $L^2(U)$ de funciones medibles de cuadrado integrable, podemos considerar una sucesión $g_n \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ convergiendo a h en la norma L^2 y esta sucesión puede elegirse de forma que $\int_U g_n = 0$ (basta aproximar la función en h en $B(p, 2\varepsilon)$ por una función diferenciable de soporte compacto y luego tomar la función opuesta en $B(q, 2\varepsilon)$).

Como F es continua, podemos elegir ε suficientemente pequeño tal que $|F(x) - F(p)| < \frac{1}{4}|F(q) - F(p)|$ en $B(p, \varepsilon)$ y $|F(x) - F(q)| < \frac{1}{4}|F(q) - F(p)|$ en $B(q, \varepsilon)$. Por tanto, se tiene que

$$\left| \int_U F \cdot h \right| = \left| \int_{B(p, \varepsilon)} f - \int_{B(q, \varepsilon)} f \right| \geq \pi \varepsilon^2 |F(q) - F(p)| > 0.$$

Usando que $g_n \rightarrow h$ en $L^2(U)$, se tiene que

$$\int_U F \cdot g_n = \langle F, g_n \rangle_{L^2(U)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle F, h \rangle_{L^2(U)} = \int_U F \cdot h \neq 0.$$

Así pues, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\int_U F \cdot g_n \neq 0$, contradiciendo la hipótesis de partida, por lo que la función F ha de ser constante. $\square$

PROPOSICIÓN 3.3. *Si una superficie conexa Σ minimiza localmente el área, entonces tiene curvatura media constante.*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que la superficie Σ minimiza localmente el área, luego dado $p \in \Sigma$ comprobemos que la curvatura H es constante en un entorno de p . Para ello, aplicamos si es necesario un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ para suponer que $p = (0, 0, 0)$ y $T_p(\Sigma)$ es el plano de ecuación $z = 0$ (observemos que los movimientos rígidos no cambian la curvatura media). Consideraremos un disco $U \subset \mathbb{R}^2$ centrado en el origen de forma que podemos parametrizar un entorno de p en Σ como $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, para cierta $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{U})$. La hipótesis sobre el plano tangente nos dice que $f(0, 0) = 0$ y $f_u(0, 0) = f_v(0, 0) = 0$.

Sea $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ una función arbitraria tal que $g \equiv 0$ en $\mathbb{R}^2 - U$ y $\int_U g = 0$. Tomamos una variable $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y definimos la combinación $f + tg \in \mathcal{C}^\infty(\bar{U})$. Por tanto, tenemos la variación de Σ que consiste en sustituir $X(U)$ por $X_t(U)$, siendo $X_t(u, v) = (u, v, f(u, v) + tg(u, v))$. La condición $\int_U g = 0$ asegura que no se cambia el volumen que encierra la superficie.

Como Σ minimiza el área, la función $t \rightarrow \text{área}(f + tg)$ tiene un mínimo en $t = 0$ y, en particular, su derivada en $t = 0$ debe anularse. Veamos qué información nos da dicha afirmación:

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{área}(f + tg), \quad (3.1)$$

Comenzaremos usando el área del grafo de una función f está dada por

$$\text{área}(f) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2},$$

tenemos que (3.1) queda como

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{área}(f + tg) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_U \sqrt{1 + \|\nabla(f + tg)\|^2} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_U \sqrt{1 + (f_u + tg_u)^2 + (f_v + tg_v)^2}. \end{aligned}$$

Como estamos integrando funciones uniformemente continuas en el compacto $\bar{U}$ y estas dependen diferenciablemente de t , podemos conmutar integral y derivada

con respecto a t . Obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{área}(f + tg) = \\ &= \int_U \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sqrt{1 + (f_u + tg_u)^2 + (f_v + tg_v)^2} \\ &= \int_U \frac{g_u(f_u + tg_u) + g_v(f_v + tg_v)}{\sqrt{1 + (f_u + tg_u)^2 + (f_v + tg_v)^2}} \Big|_{t=0} = \int_U \frac{g_u f_u + g_v f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \end{aligned}$$

Esta igualdad se puede reescribir usando el operador gradiente como

$$0 = \int_U \left\langle \left(\frac{f_u}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \frac{f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right), (g_u, g_v) \right\rangle = \int_U \left\langle \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \nabla g \right\rangle.$$

Buscando la relación entre la anterior integral y el resultado a demostrar es necesario realizar un paso previo relacionado con el concepto de divergencia. Por simplicidad, escribiremos $T = \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}$ en lo que sigue y aplicaremos el operador divergencia al producto $g \cdot T$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(g \cdot T) &= \operatorname{div}(gT_1, gT_2) = \frac{\partial(gT_1)}{\partial u} + \frac{\partial(gT_2)}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial u} g + \frac{\partial g}{\partial v} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial v} g \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) (T_1, T_2) + \left(\frac{\partial T_1}{\partial u} + \frac{\partial T_2}{\partial v} \right) g = \langle \nabla g, T \rangle + \operatorname{div}(T) \cdot g \end{aligned}$$

y de forma inmediata despejamos

$$\langle \nabla g, T \rangle = -\operatorname{div}(T) \cdot g + \operatorname{div}(g \cdot T). \quad (3.2)$$

Usando la ecuación (3.2) en el desarrollo de (3.1),

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{área}(f + tg) = \int_U \langle T, \nabla g \rangle = - \int_U g \operatorname{div}(T) + \int_U \operatorname{div}(gT).$$

El teorema de la divergencia en el abierto U nos asegura que $\int_U \operatorname{div}(gT) = 0$ ya que gT es un campo de soporte compacto contenido en U . Por tanto, usando la arbitrariedad de g con $\int_U g = 0$, el lema 3.2 y la fórmula (2.12) (en concreto, su segunda parte), nos dicen que $H = \operatorname{div}(T)$ es constante en U , esto es, Σ tiene curvatura media constante en un entorno de p . Como la superficie es conexa, se deduce que la curvatura media es constante en todo Σ . $\square$

1.1. Ejemplos de superficies mínimas.

DEFINICIÓN 3.4. Sea Σ una superficie regular. Si su curvatura media se anula en todos los puntos de Σ , decimos que la superficie es mínima.

1.1.1. Planos. Sea la parametrización $X(u, v)$ asociada a un plano, vamos a comprobar que estamos ante una superficie mínima.

$$X(u, v) = (u, v, au + bv) \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Calculemos las derivadas parciales y el normal asociado:

$$X_u = (1, 0, a) \quad X_v = (0, 1, b) \quad X_{uu} = (0, 0, 0) = 0 \quad X_{vv} = 0 \quad X_{uv} = 0$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = (-a, b, 1) \quad N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-a, b, 1)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

En primer lugar, calculemos los coeficientes asociados a la primera y segunda formas fundamentales:

$$\begin{aligned} E = \|X_u\|^2 &= 1 + a^2, & G = \|X_v\|^2 &= 1 + b^2, & F = \langle X_u, X_v \rangle &= ab, \\ e = \langle X_{uu}, N \rangle &= 0, & g = \langle X_{vv}, N \rangle &= 0, & f = \langle X_{uv}, N \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Comprobemos que la curvatura media es nula,

$$H = \frac{(1 + a^2) \cdot 0 + 0 \cdot (1 + b^2) - 2 \cdot 0 \cdot ab}{2 \cdot ((1 + a^2)(1 + b^2) - (ab)^2)} = 0.$$

Así pues, los planos son superficies mínimas.

1.1.2. Helicoides. Un helicoides es una superficie que surge al rotar una recta respecto de uno de sus puntos a la vez que se traslada en una dirección ortogonal al plano de giro. La parametrización usual de un helicoides es la dada por

$$X(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), av) \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Calculemos las derivadas parciales,

$$\begin{aligned} X_u &= (\cos(v), \sin(v), 0), & X_v &= (-u \sin(v), u \cos(v), a), & X_{uu} &= 0, \\ X_{vv} &= (-u \cos(v), -u \sin(v), 0), & X_{uv} &= (-\sin(v), \cos(v), 0). \end{aligned}$$

Utilizando las derivadas anteriores, calculamos el producto vectorial asociado,

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u \sin(v) & u \cos(v) & a \end{vmatrix} = (a \sin(v), -a \cos(v), u),$$

y de forma directa su normal correspondiente,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(a \sin(v), -a \cos(v), u)}{\sqrt{a^2 + u^2}}.$$

A partir de esto, los coeficientes asociados a la primera y segunda formas fundamentales son

$$\begin{aligned} E = \|X_u\|^2 &= 1, & G = \|X_v\|^2 &= u^2 + a^2, & F = \langle X_u, X_v \rangle &= 0, \\ e = \langle X_{uu}, N \rangle &= 0, & g = \langle X_{vv}, N \rangle &= 0, & f = \langle X_{uv}, N \rangle &= \frac{-a}{\sqrt{a^2 + u^2}}. \end{aligned}$$

Comprobemos pues que la curvatura media es nula

$$H = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot (u^2 + a^2) - 2 \cdot 0 \cdot \frac{-a}{\sqrt{a^2 + u^2}}}{2(1 \cdot (u^2 + a^2) - 0^2)} = 0,$$

siendo así el helicoides una superficie mínima.

1.1.3. Catenoides. Los catenoides son las superficies de revolución de las curvas llamadas catenarias. Vamos a comprobar que son también superficies mínima partiendo de la parametrización

$$X(u, v) = \left(c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \cdot \cos(u), c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \cdot \sin(u), v \right),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ representa el parámetro de la catenaria. Calculemos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} X_u &= c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) (-\sin(u), \cos(u), 0), \\ X_v &= \left(\sinh\left(\frac{v}{c}\right) \cdot \cos(u), \sinh\left(\frac{v}{c}\right) \cdot \sin(u), 1 \right), \\ X_{uu} &= c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) (-\cos(u), -\sin(u), 0), \\ X_{vv} &= \frac{1}{c} \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) (\cos(u), \sin(u), 0), \\ X_{uv} &= \sinh\left(\frac{v}{c}\right) (-\sin(u), \cos(u), 0). \end{aligned}$$

Con esto, calculamos el producto vectorial

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) (-\sin(u)) & c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \cdot \cos(u) & 0 \\ \sinh\left(\frac{v}{c}\right) \cdot \cos(u) & \sinh\left(\frac{v}{c}\right) \cdot \sin(u) & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \cos(u), c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \sin(u), -c \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \sinh\left(\frac{v}{c}\right) \right), \end{aligned}$$

lo que nos da el normal asociado esta parametrización:

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \frac{(\cos(u), \sin(u), -c \sinh\left(\frac{v}{c}\right))}{c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{v}{c}\right)}}.$$

A partir de esto, podemos calcular los coeficientes asociados a la primera y segunda formas fundamentales:

$$\begin{aligned} E = \|X_u\|^2 &= c^2 \cosh^2\left(\frac{v}{c}\right) & G = \|X_v\|^2 &= \sinh^2\left(\frac{v}{c}\right) + 1 & F = \langle X_u, X_v \rangle &= 0 \\ e = \langle X_{uu}, N \rangle &= \frac{-c^2 \cosh^2\left(\frac{v}{c}\right)}{c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{v}{c}\right)}} \\ g = \langle X_{vv}, N \rangle &= \frac{\cosh^2\left(\frac{v}{c}\right)}{c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{v}{c}\right)}} \\ f = \langle X_{uv}, N \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Comprobamos que la curvatura media es nula:

$$H = \frac{\frac{c^2 \cosh^4\left(\frac{v}{c}\right)}{c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{v}{c}\right)}} + \frac{-c^2 \cosh^2\left(\frac{v}{c}\right)}{c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{v}{c}\right)}} \cdot \left(\sinh^2\left(\frac{v}{c}\right) + 1 \right) - 2 \cdot 0 \cdot 0}{2 \left(c^2 \cosh^2\left(\frac{v}{c}\right) \cdot \left(\sinh^2\left(\frac{v}{c}\right) + 1 \right) - 0^2 \right)}$$

$$= \frac{\frac{c^2 \cosh^2(\frac{v}{c})}{c \cdot \cosh(\frac{v}{c}) \sqrt{1 + \sinh^2(\frac{v}{c})}} \left(\cosh^2(\frac{v}{c}) - \sinh^2(\frac{v}{c}) - 1 \right)}{2 \left(c^2 \cosh^2(\frac{v}{c}) \cdot (\sinh^2(\frac{v}{c}) + 1) \right)} = 0.$$

1.1.4. *Superficie de Scherk doblemente periódica.* La superficie de Scherk doblemente periódica está parametrizada por

$$X(u, v) = \left(u, v, \log \frac{\cos(u)}{\cos(v)} \right).$$

Esta parametrización define un grafo sobre el dominio

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\cos(u)}{\cos(v)} > 0\},$$

que está formado por los cuadrados alternos de una teselación de $\mathbb{R}^2$ por cuadrados de lado π . En los vértices de tales cuadrados, la superficie no está definida como grafo, pero se extiende diferenciablemente asumiendo que toda la recta vertical que se proyecta sobre el vértice forma parte de la superficie. El hecho de que se llame doblemente periódica es que $f(u, v) = \frac{\cos(u)}{\cos(v)}$ verifica claramente que $f(u + 2\pi, v) = f(u, v + 2\pi) = f(u, v)$ para todo $(u, v) \in U$. Calculemos las derivadas parciales y el normal asociado en U :

$$\begin{aligned} X_u &= \left(1, 0, \frac{-\sin(u)}{\cos(u)} \right), & X_v &= \left(0, 1, \frac{\sin(v)}{\cos(v)} \right), & X_{uu} &= \left(0, 0, \frac{-1}{\cos^2(u)} \right), \\ X_{vv} &= \left(0, 0, \frac{1}{\cos^2(v)} \right), & X_{uv} &= (0, 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Repetimos el proceso, producto vectorial,

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{-\sin(u)}{\cos(u)} \\ 0 & 1 & \frac{\sin(v)}{\cos(v)} \end{vmatrix} = \left(\frac{\sin(u)}{\cos(u)}, \frac{-\sin(v)}{\cos(v)}, 1 \right),$$

y de forma inmediata el normal asociado,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{\left(\frac{\sin(u)}{\cos(u)}, \frac{-\sin(v)}{\cos(v)}, 1 \right)}{\sqrt{\frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} + \frac{\sin^2(v)}{\cos^2(v)} + 1}}.$$

Los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales vienen dados por

$$\begin{aligned} E &= \|X_u\|^2 = \frac{1}{\cos^2(u)}, & G &= \|X_v\|^2 = \frac{1}{\cos^2(v)}, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \frac{-\sin(u) \sin(v)}{\cos(u) \cos(v)}, & e &= \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{\frac{-1}{\cos^2(u)}}{\sqrt{\frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} + \frac{\sin^2(v)}{\cos^2(v)} + 1}}, \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{\frac{1}{\cos^2(v)}}{\sqrt{\frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} + \frac{\sin^2(v)}{\cos^2(v)} + 1}}, & f &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la curvatura media es nula:

$$H = \frac{\frac{\frac{1}{\cos^2(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(v)}}{\sqrt{\frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} + \frac{\sin^2(v)}{\cos^2(v)} + 1}} + \frac{\frac{-1}{\cos^2(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)}}{\sqrt{\frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} + \frac{\sin^2(v)}{\cos^2(v)} + 1}} - 2 \cdot \frac{-\sin(u)\sin(v)}{\cos(u)\cos(v)} \cdot 0}{2 \left(\frac{1}{\cos^2(u)} \cdot \frac{1}{\cos^2(v)} - \frac{\sin^2(u)\sin^2(v)}{\cos^2(u)\cos^2(v)} \right)} = 0,$$

de donde deducimos que la superficie de Scherk es mínima.

1.1.5. *Superficie de Enneper.* La superficie Enneper está dada por la parametrización

$$X(u, v) = \left(\frac{u}{3} \left(1 - \frac{u^2}{3} + v^2 \right), \frac{-v}{3} \left(1 - \frac{v^2}{3} + u^2 \right), \frac{u^2 - v^2}{3} \right).$$

Previamente, simplificamos la superficie,

$$X(u, v) = \frac{1}{3} \left(\left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \right), \left(-v + \frac{v^3}{3} - vu^2 \right), u^2 - v^2 \right)$$

y tiene la particularidad de que cada una de las componentes anteriores es un polinomio. Calculemos las derivadas parciales,

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{1}{3} (1 - u^2 + v^2, -2vu, 2u), & X_v &= \frac{1}{3} (2uv, -1 + v^2 - u^2, -2v), \\ X_{uu} &= \frac{2}{3} (-u, -v, 1), & X_{vv} &= \frac{2}{3} (u, v, -1), \\ X_{uv} &= \frac{2}{3} (v, -u, 0). \end{aligned}$$

Sea el producto vectorial,

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 - u^2 + v^2 & -2vu & 2u \\ 2uv & -1 + v^2 - u^2 & -2v \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{9} (2v^2u + 2u + 2u^3, 2v + 2u^2v + 2v^3, -1 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2) \end{aligned}$$

así el normal asociado a la parametrización es,

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \\ &= \frac{(2v^2u + 2u + 2u^3, 2v + 2u^2v + 2v^3, -1 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2)}{9\sqrt{(2v^2u + 2u + 2u^3)^2 + (2v + 2u^2v + 2v^3)^2 + (-1 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2)^2}}. \end{aligned}$$

Como en cada uno de los ejemplos anteriores, obtengamos los coeficientes asociados a la primera y segunda formas fundamentales:

$$E = \|X_u\|^2 = \frac{1 + 2u^2 + 2v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4}{9},$$

$$G = \|X_v\|^2 = \frac{1 + 2u^2 + 2v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4}{9},$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \frac{1}{9} \left(2vu - 2vu^3 + 2v^3u + 2uv - 2uv^3 + 2vu^3 - 4uv \right) = 0$$

$$e = \frac{-2v^2u^2 - 2u^2 - u^4 - 2v^2 - v^4 - 1}{9\sqrt{(2v^2u + 2u + 2u^3)^2 + (2v + 2u^2v + 2v^3)^2 + (-1 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2)^2}},$$

podemos observar que $X_{vv} = -X_{uu}$ luego de forma inmediata tendremos que los coeficientes de la segunda forma asociados a dichos vectores son opuestos, es decir, $g = -e$.

$$g = \frac{2v^2u^2 + 2u^2 + u^4 + 2v^2 + v^4 + 1}{9\sqrt{(2v^2u + 2u + 2u^3)^2 + (2v + 2u^2v + 2v^3)^2 + (-1 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2)^2}},$$

$$f = \frac{2(2v^3u + 2uv + 2vu^3 - 2uv - 2u^3v - 2uv^3)}{18\sqrt{(2v^2u + 2u + 2u^3)^2 + (2v + 2u^2v + 2v^3)^2 + (-1 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2)^2}} = 0.$$

Comprobemos que la curvatura media es nula, lo cual es casi inmediato ya que $F = f = 0$ y $g = -e$,

$$H = \frac{Eg + eG - 2Ff}{2(EG - F^2)} = \frac{E(-e) + eG}{2EG} = \frac{e(-E + G)}{2EG} = 0.$$

Por tanto, también se trata de una superficie mínima.

Coordenadas isotermas y representación de Enneper–Weierstrass

En este capítulo trabajaremos con superficies regulares y orientables con la hipótesis adicional de que son mínimas. Nuestro primer objetivo es encontrar parametrizaciones adecuadas que nos permitan estudiar de forma más sencilla las propiedades geométricas de las superficies. Concretamente, buscaremos cartas que conserven los ángulos medidos en la superficie mínima a través de la parametrización. Como esta propiedad seguirá siendo cierta para cualquier cambio entre cartas conformes, encontraremos una conexión entre las superficies mínimas y la teoría de funciones holomorfas del plano complejo sin más que identificar las coordenadas reales (u, v) con el número complejo $u + iv$. En este sentido, daremos una representación de cualquier superficie mínima a partir de funciones holomorfas que nos permitirá entender y simplificar algunas cuestiones sobre superficies mínimas.

1. Existencia de coordenadas isotermas

En primer lugar, recordemos qué son las coordenadas isotermas junto con algunos de sus resultados.

DEFINICIÓN 4.1. Sea Σ una superficie regular parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Diremos que X es una parametrización isoterma o conforme si los coeficientes de la primera forma fundamental verifican

$$E = G \quad \text{y} \quad F = 0.$$

En otras palabras, en una parametrización isoterma se cumple que $\|X_u\| = \|X_v\|$ y $\langle X_u, X_v \rangle = 0$, luego la primera forma fundamental está completamente determinada por el llamado factor conforme $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(U)$ definido por la relación

$$\lambda^2 = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Observemos que podemos escribirlo al cuadrado ya que se trata de una función estrictamente positiva por ser la superficie regular. A partir de las parametrizaciones isotermas, podemos expresar la curvatura de Gauss en función únicamente del factor conforme. Antes de dar el siguiente resultado, recordemos que el operador laplaciano es el dado por $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ y actúa sobre funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en abiertos de $\mathbb{R}^2$.

LEMA 4.2. *Dada un parametrización regular e isoterma $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, su curvatura de Gauss puede expresarse como*

$$K = \frac{-\Delta(\log(\lambda))}{\lambda^2}. \quad (4.1)$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a particularizar la demostración del teorema egregium de Gauss al caso de parámetros isotermos. Para ello, expresamos las segundas derivadas de X en la base $\{X_u, X_v, N\}$ como

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, \end{aligned}$$

donde las funciones Γ_{ij}^k son los llamados símbolos de Christoffel. Tomando el producto escalar de estas expresiones por X_u y X_v y usando que $E = G = \lambda^2$ y $F = 0$, no es difícil llegar a que

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{\lambda_u}{\lambda}, \quad -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{\lambda_v}{\lambda}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} N_u &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} X_u + \frac{gF - fG}{EG - F^2} X_v = -\frac{e}{\lambda^2} X_u - \frac{f}{\lambda^2} X_v, \\ N_v &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} X_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} X_v = -\frac{f}{\lambda^2} X_u - \frac{g}{\lambda^2} X_v. \end{aligned}$$

Tomando las tercera derivadas de X , nos quedamos con la igualdad entre las componentes de X_{uuv} y X_{uvu} en X_v , la cual nos da la relación:

$$\frac{-\lambda_{vv}\lambda - \lambda_v^2 - eg}{\lambda^2} = \frac{\lambda_u^2 + \lambda_{uu}\lambda - f^2}{\lambda^2}.$$

De aquí podemos despejar

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{\lambda^4} = -\frac{\lambda_{uu} + \lambda_{vv}}{\lambda^3} + \frac{\lambda_u^2 + \lambda_v^2}{\lambda^4} \\ &= \frac{-1}{\lambda^2} \left(\left(\frac{\lambda_u}{\lambda} \right)_u + \left(\frac{\lambda_v}{\lambda} \right)_v \right) = \frac{-1}{\lambda^2} (\log(\lambda)_{uu} + \log(\lambda)_{vv}) = \frac{-\Delta(\log(\lambda))}{\lambda^2}. \quad \square \end{aligned}$$

LEMA 4.3. *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ superficie, si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es parametrización regular e isoterma se verifica*

$$\Delta X = X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 H N,$$

donde $N : \Sigma \rightarrow S^2$ es la aplicación de Gauss de la superficie, H es la curvatura media respecto de N y λ el factor conforme.

DEMOSTRACIÓN. Partiendo de la parametrización isoterma X tenemos

$$E = G = \lambda^2 = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

e imponiendo esto en la curvatura media (2.10) se simplifica a

$$H = \frac{eG + gE}{2EG} = \frac{E(e + g)}{2E^2} = \frac{e + g}{2E} = \frac{e + g}{2\lambda^2},$$

así $e + g = 2\lambda^2 H$. A continuación, derivamos E y F con respecto a u y v , respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_u \rangle &= \frac{\partial}{\partial u} \langle X_v, X_v \rangle, & \frac{\partial}{\partial v} \langle X_u, X_u \rangle &= 0, \\ \langle X_{uu}, X_u \rangle &= \langle X_{vu}, X_v \rangle, & \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Así, uniendo ambas expresiones tenemos $\langle X_{uu}, X_u \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle$. Teniendo en cuenta que $X_{uv} = X_{vu}$ deducimos $\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0$, lo cual nos lleva a deducir que el vector $X_{uu} + X_{vv}$ es perpendicular a X_u ; de forma análoga se comprueba que $X_{uu} + X_{vv}$ también es perpendicular a X_v . Por lo que, dicho vector, es paralelo al vector normal, N . Finalmente, utilizando la expresión mencionada al principio de esta demostración,

$$e + g = 2\lambda^2 H \Leftrightarrow \langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle = 2\lambda^2 H$$

y multiplicando la misma por el normal concluimos con la demostración,

$$N \langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle = 2\lambda^2 H N \Leftrightarrow X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 H N,$$

afirmación que es cierta por el paralelismo ya mencionado junto a que el vector normal es unitario y forma una base en $\mathbb{R}^3$ con X_u y X_v . $\square$

2. Reparametrización isoterma de un grafo

En esta sección vamos a ver resultados que relacionan directamente la parametrización por grafos con las coordenadas isotermas. Por ello, trabajaremos en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto con una función $f \in C^\infty(U)$ y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ será la parametrización $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ del grafo asociado a f .

LEMA 4.4. *En las condiciones anteriores, si la superficie parametrizada por X es mínima, entonces se cumple que*

$$\left(\frac{1 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)_u = \left(\frac{f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)_v \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)_u = \left(\frac{1 + f_u^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)_v \quad (4.3)$$

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos demostrando (4.2) realizando en primer lugar las derivadas de ambas partes de la igualdad. Por un lado, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)_u &= \frac{2f_v f_{vu} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} - (1 + f_v^2) \frac{f_u f_{uu} + f_v f_{vu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}}{1 + f_u^2 + f_v^2} \\
&= \frac{2f_v f_{vu} (1 + f_u^2 + f_v^2) - (1 + f_v^2) (f_u f_{uu} + f_v f_{vu})}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2f_v f_{vu} (1 + f_v^2) + 2f_v f_{vu} f_u^2 - (1 + f_v^2) (f_u f_{uu} + f_v f_{vu})}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2f_v f_{vu} f_u^2 - (1 + f_v^2) f_u f_{uu} + (1 + f_v^2) f_v f_{vu}}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Aplicando que la superficie es mínima ($H = 0$) y está parametrizada por un grafo, por la igualdad (2.12) tenemos

$$H = 0 \Leftrightarrow (1 + f_v^2) f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2) f_{vv} = 0.$$

Así, $(1 + f_v^2) f_{uu} = 2f_u f_v f_{uv} - (1 + f_u^2) f_{vv}$ y finalmente sustituimos esto en la expresión (4.4):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)_u &= \frac{2f_v f_{vu} f_u^2 - f_u (2f_u f_v f_{uv} - (1 + f_u^2) f_{vv}) + (1 + f_v^2) f_v f_{vu}}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{(1 + f_u^2) f_v f_{vu} + (1 + f_v^2) f_v f_{vu}}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)_v &= \frac{(f_{uv} f_v + f_u f_{vv}) \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} - (f_u f_v) \frac{f_u f_{uv} + f_v f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}}{(1 + f_u^2 + f_v^2)} \\
&= \frac{(f_{uv} f_v + f_u f_{vv}) (1 + f_u^2 + f_v^2) - (f_u f_v) (f_u f_{uv} + f_v f_{vv})}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{f_{uv} f_v (1 + f_v^2) + f_u f_{vv} (1 + f_u^2)}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Vemos como las expresiones (4.5) y (4.6) son iguales, por tanto la expresión (4.2) queda probada. La ecuación (4.3) se demuestra de forma análoga. $\square$

LEMA 4.5. *Si Σ es una superficie mínima, entonces todo punto de Σ tiene un entorno que puede reparametrizarse en coordenadas isotermas.*

DEMOSTRACIÓN. Seleccionamos un entorno de un punto $p \in \Sigma$, que podemos suponer que es $p = (0, 0, 0)$ y con plano tangente $T_p \Sigma$ de ecuación $z = 0$ (tras aplicar un movimiento rígido). Entonces, existe $R > 0$ tal que Σ es el grafo de una función $f(u, v)$ definida en el disco $D(R) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < R\}$.

En este caso la condición de minimalidad atendiendo a (2.12) sería

$$H = 0 \Leftrightarrow (1 + f_v^2) f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2) f_{vv} = 0.$$

Además, en el disco $D(R)$ la función f satisface las ecuaciones del lema 4.4, por lo que a partir de dicho lema y del lema de Schwarz podemos afirmar la existencia de dos funciones $F(u, v)$ y $G(u, v)$ en dicho disco $F, G : D(R) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que,

$$\begin{aligned} F_u &= \frac{f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, & F_v &= \frac{1 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \\ G_u &= \frac{1 + f_u^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, & G_v &= \frac{f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \end{aligned}$$

puesto que $D(R)$ es simplemente conexo. Tomamos la aplicación $\varphi : D(R) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(u, v) = (u + G(u, v), v + F(u, v))$. Expresando en componentes $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, tenemos las derivadas parciales

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_u &= 1 + G_u = 1 + \frac{1 + f_u^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} & (\varphi_1)_v &= G_v = \frac{f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ (\varphi_2)_u &= F_u = \frac{f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} & (\varphi_2)_v &= 1 + F_v = 1 + \frac{1 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \end{aligned}$$

luego la matriz del jacobiano de φ es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} (\varphi_1)_u & (\varphi_1)_v \\ (\varphi_2)_u & (\varphi_2)_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1 + f_u^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} & \frac{f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ \frac{f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} & 1 + \frac{1 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \end{pmatrix}$$

Denotemos por J al determinante de la matriz $\text{Jac}(\varphi)$, esto es,

$$\begin{aligned} J &= \det(\text{Jac}(\varphi)) = (1 + G_u)(1 + F_v) - G_v F_u \\ &= 1 + \frac{1 + f_u^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} + \frac{1 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} + \frac{(1 + f_u^2)(1 + f_v^2)}{1 + f_u^2 + f_v^2} - \frac{f_u^2 f_v^2}{1 + f_u^2 + f_v^2} \\ &= 1 + \frac{1 + f_u^2 + 1 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} + \frac{1 + f_u^2 + f_v^2}{1 + f_u^2 + f_v^2} = 2 + \frac{2 + f_u^2 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} > 0 \end{aligned}$$

Como el determinante J es positivo, podemos aplicar el teorema de la función inversa que nos proporciona la existencia de un $R_0 > 0$ tal que la aplicación $\varphi|_{D(R_0)} : D(R_0) \rightarrow \varphi(D(R_0)) \subset \mathbb{R}^2$ tiene inversa diferenciable $\psi : \varphi(D(R_0)) \rightarrow D(R_0)$. Calculamos el jacobiano asociado a dicha aplicación,

$$\begin{aligned} \text{Jac}(\psi) &= \begin{pmatrix} (\psi_1)_u & (\psi_1)_v \\ (\psi_2)_u & (\psi_2)_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_1)_u & (\varphi_1)_v \\ (\varphi_2)_u & (\varphi_2)_v \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} (\varphi_2)_v & -(\varphi_1)_v \\ -(\varphi_2)_u & (\varphi_1)_u \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} & \frac{-f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ \frac{-f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} & 1 + \frac{1 + f_u^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{J \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \begin{pmatrix} 1 + f_v^2 + \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} & -f_u f_v \\ -f_u f_v & 1 + f_u^2 + \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $z = f(\psi(u, v))$, la regla de la cadena nos dice que

$$\text{Jac}(z) = \text{Jac}(f) \cdot \text{Jac}(\psi),$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\left(1 + f_v^2 + \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\right) f_u - f_u f_v^2}{J\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{-f_u^2 f_v + \left(1 + f_u^2 + \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\right) f_v}{J\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.\end{aligned}$$

Podemos simplificar:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\left(1 + \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\right) f_u}{J\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\left(1 + \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\right) f_v}{J\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

En la nueva parametrización $\hat{X}(u, v) = (u, v, f(\psi(u, v)))$ tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{X}_u &= \left(1 + \frac{1 + f_v^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \frac{-f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \frac{\left(1 + \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\right) f_u}{J\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}\right), \\ \hat{X}_v &= \left(\frac{-f_u f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, 1 + \frac{1 + f_u^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \frac{\left(1 + \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\right) f_v}{J\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}\right).\end{aligned}$$

Finalmente, dichas coordenadas son isotermas ya que, tomando productos escalares en estas últimas expresiones, los símbolos de la primera forma fundamental asociados a $\hat{X}$ verifican

$$\hat{E} = \hat{G} = \frac{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}{J}, \quad \hat{F} = 0. \quad \square$$

3. Las superficies mínimas como superficies de Riemann

Dada una superficie topológica M , se tiene que es un espacio topológico localmente euclídeo, lo que garantiza que para cada punto $q \in M$ existe un abierto U entorno de q y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$, siendo V un abierto de $\mathbb{R}^2$. Llamaremos carta al par (U, φ) y la propiedad fundamental de ser variedad topológica es que las aplicaciones de cambio de carta son homeomorfismos. En el caso de una superficie diferenciable en $\mathbb{R}^3$, las cartas se eligen diferenciables. En particular, las inversas de las parametrizaciones son cartas locales cuyo aplicación de cambio de carta es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^2$.

Una aplicación diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, siendo U abierto, se dice que es conforme (también se dice que conserva los ángulos) si, dadas dos curvas diferenciables $\alpha, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ tales que $\alpha(0) = \beta(0)$, los vectores $(f \circ \alpha)'(0)$ y $(f \circ \beta)'(0)$ forman el mismo ángulo que los vectores $\alpha'(0)$ y $\beta'(0)$ (esto quiere decir que la diferencial $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal que conserva los ángulos entre vectores).

PROPOSICIÓN 4.6. *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sean $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizaciones isotermas, donde $U, V \subset \mathbb{R}^2$ son abiertos. Entonces, X e Y*

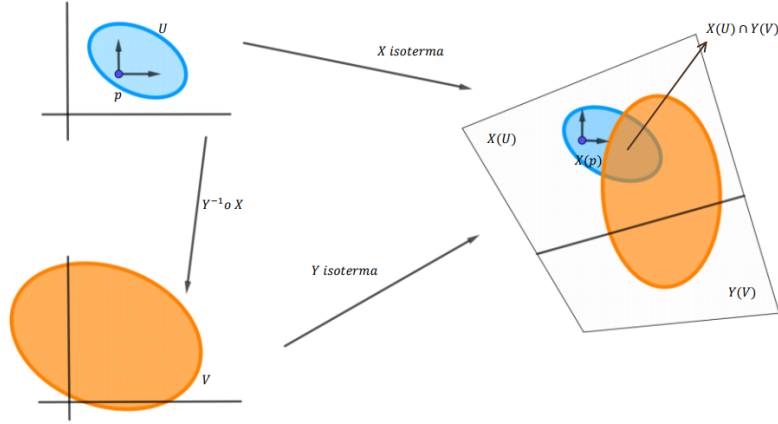


FIGURA 1. Conservación de ángulos (coordenadas isotermas)

son conformes; en particular, el cambio de cartas $\varphi = Y^{-1} \circ X : X^{-1}(X(U) \cap Y(V)) \rightarrow Y^{-1}(X(U) \cap Y(V))$ es una aplicación diferenciable y conforme entre abiertos de $\mathbb{R}^2$.

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos comprobando que la parametrización isoterma X conserva los ángulos (lo mismo se aplica a Y). Dado $p \in \Sigma$, consideramos vectores $w_1 = (a_1, b_1)$ y $w_2 = (a_2, b_2)$ cualesquiera en $\mathbb{R}^2$. La parametrización transforma a w_1 y w_2 mediante su diferencial, esto es,

$$dX_p(w_1) = a_1 X_u + b_1 X_v, \quad dX_p(w_2) = a_2 X_u + b_2 X_v,$$

luego

$$\begin{aligned} \angle_{\mathbb{R}^3}(dX_p(w_1), dX_p(w_2)) &= \arccos \frac{\langle dX_p(w_1), dX_p(w_2) \rangle}{\|dX_p(w_1)\| \|dX_p(w_2)\|} \\ &= \arccos \frac{\langle a_1 X_u + b_1 X_v, a_2 X_u + b_2 X_v \rangle}{\|a_1 X_u + b_1 X_v\| \|a_2 X_u + b_2 X_v\|} \\ &= \arccos \frac{a_1 a_2 E + (a_1 b_2 + b_1 a_2) F + b_1 b_2 G}{(a_1^2 E + b_1^2 G + 2a_1 b_1 F)^{\frac{1}{2}} (a_2^2 E + b_2^2 G + 2a_2 b_2 F)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

donde hemos usado los símbolos de la primera forma fundamental. Como X es isoterma, sabemos que $E = G$ y $F = 0$, así que concluimos que:

$$\begin{aligned} \angle_{\mathbb{R}^3}(dX_p(w_1), dX_p(w_2)) &= \arccos \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) E}{((a_1^2 + b_1^2) E)^{\frac{1}{2}} ((a_2^2 + b_2^2) E)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \arccos \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{(a_1^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}} (a_2^2 + b_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \angle_{\mathbb{R}^2}(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Finalmente, como la composición conserva la propiedad de ser conforme, se deduce que el cambio de carta φ también es conforme. $\square$

Esto conecta directamente con la teoría de funciones complejas al identificar $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ de la forma usual $(u, v) \mapsto u + iv$. Antes de continuar, recordemos algunas definiciones pertinentes. Decir que el cambio de cartas

$$\varphi = Y^{-1} \circ X : X^{-1}(X(U) \cap X(V)) \subset \mathbb{C} \rightarrow X^{-1}(X(U) \cap X(V))$$

es holomorfo quiere decir que verifica las ecuaciones de Cauchy–Riemann, es decir,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \quad (4.7)$$

donde $\varphi_1 = \operatorname{Re}(\varphi)$ y $\varphi_2 = \operatorname{Im}(\varphi)$. Por su parte, decir que φ es antiholomorfa es lo mismo que decir que su conjugada $\bar{\varphi} \equiv (\varphi_1, -\varphi_2)$ es holomorfa. De esta forma, tenemos que sustituir las ecuaciones de Cauchy–Riemann por las siguientes:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}. \quad (4.8)$$

Resulta que las únicas aplicaciones conformes entre abiertos de $\mathbb{C}$ son las holomorfas y las antiholomorfas. En este sentido, probamos el siguiente resultado para obtener una descripción más completa.

LEMA 4.7. *Una aplicación diferenciable y conforme $\varphi : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa o antiholomorfa.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es conforme y fijemos $p \in U$. En lo que sigue identificaremos φ con (φ_1, φ_2) para verla como una aplicación en un abierto de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$. En primer lugar, $\varphi_u = d\varphi_p(1, 0)$ y $\varphi_v = d\varphi_p(0, 1)$ han de ser ortogonales ya que $(1, 0)$ y $(0, 1)$ lo son. Dado ahora el vector $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que cumplir que

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \angle(d\varphi_p(1, 1), d\varphi_p(1, 0)) = \arccos \frac{\langle \varphi_u + \varphi_v, \varphi_u \rangle}{\|\varphi_u + \varphi_v\| \|\varphi_u\|} \\ &= \arccos \frac{\|\varphi_u\|}{\sqrt{\|\varphi_u\|^2 + \|\varphi_v\|^2}}, \end{aligned}$$

luego $\frac{\|\varphi_u\|^2}{\|\varphi_u\|^2 + \|\varphi_v\|^2} = \frac{1}{2}$. De aquí se deduce que $\|\varphi_u\| = \|\varphi_v\|$. Ahora bien, las condiciones $\|\varphi_u\| = \|\varphi_v\|$ y $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$ nos dicen que $\varphi_u = \varphi_v = 0$ en p (en tal caso, φ es tanto holomorfa como antiholomorfa en p), o bien existe $r > 0$ tal que $\{r^{-1}\varphi_u, r^{-1}\varphi_v\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, luego existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que la matriz de $d\varphi_p$ en la base usual de $\mathbb{R}^2$ es de uno de los siguientes dos tipos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La primera expresión lleva a que φ cumple las ecuaciones de Cauchy–Riemann y es holomorfa según (4.7), mientras que la segunda expresión nos dice que φ es antiholomorfa, según (4.8). $\square$

En particular, todos los cambios de cartas isotermales son holomorfos o antiholomorfos. Si suponemos además que la superficie es orientable, podemos escoger

entornos coordenados especiales para que todos los cambios de carta sean holomorfos y ninguno antiholomorfo.

La orientabilidad nos asegura la existencia de un normal unitario global (aplicación de Gauss) $N : \Sigma \rightarrow S^2$. En cada punto $p \in \Sigma$ tomamos una parametrización $X : U_p \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ isoterma con $p \in X(U)$. Si $\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = N$ mantenemos la parametrización X establecida. En caso contrario, tendremos que $\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = -N$ y cambiamos la parametrización X por la parametrización $X \circ c$; donde c es la conjugación $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(a, b) = (a, -b)$. Diremos que la carta X es compatible con el normal N .

PROPOSICIÓN 4.8. *Todos los cambios entre cartas isotermas compatibles con un normal unitario global N son holomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos cartas isotermas $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ compatibles con el normal prefijado N y que recubren un punto $p \in \Sigma$. Entonces, $Y^{-1} \circ X : X^{-1}(X(U) \cap Y(V)) \rightarrow Y^{-1}(X(U) \cap Y(V))$ es conforme. Esto quiere decir que podemos pasar de la base ortogonal $\{X_u, X_v\}$ de $T_p \Sigma$ a la base ortogonal $\{Y_u, Y_v\}$ mediante la composición de una rotación y una homotecia, ya que $\|X_u\| = \|X_v\|$ y $\|Y_u\| = \|Y_v\|$. Así, el cambio de base está dado por el jacobiano

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(\varphi)}{\partial u} & \frac{\partial \operatorname{Re}(\varphi)}{\partial v} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(\varphi)}{\partial u} & \frac{\partial \operatorname{Im}(\varphi)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

de donde se comprueban de forma inmediata las ecuaciones de Cauchy–Riemann

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial \operatorname{Im}(\varphi)}{\partial s} \quad \frac{\partial \operatorname{Re}(\varphi)}{\partial s} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(\varphi)}{\partial r}$$

Esto nos lleva a concluir que φ es holomorfa tal y como queríamos probar. $\square$

DEFINICIÓN 4.9. Una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie de Riemann si se puede recubrir por cartas locales de forma que los cambios de carta sean funciones holomorfas.

COROLARIO 4.10. *Toda superficie mínima en $\mathbb{R}^3$ es una superficie de Riemann.*

4. Representación de Enneper–Weierstrass para superficies mínimas

Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada y escribamos en coordenadas

$$X(\zeta) = (x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

donde $\zeta = u + iv$ es el parámetro complejo que surge al identificar $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$. Definimos las funciones $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : U \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\phi_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \phi_2 = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \phi_3 = \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v}. \quad (4.9)$$

Estas funciones permiten caracterizar fácilmente cuándo X es isoterma y cuándo es una parametrización regular (esto es, su jacobiano tiene rango máximo).

- LEMA 4.11. (a) X es isoterma si, y sólo si, $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$.
 (b) Si X es isoterma, entonces X es regular si, y sólo si, $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar el apartado (a), observemos que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \|X_u\|^2 - \|X_v\|^2 - 2i\langle X_u, X_v \rangle = (E - G) - 2iF,$$

por lo que esta suma es nula si, y sólo si, $E = G$ y $F = 0$, es decir, cuando la parametrización es isoterma.

Para probar el apartado (b), suponemos ahora que X es isoterma. Entonces,

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = \|X_u\|^2 + \|X_v\|^2 = E + G.$$

Si $E + G = 0$, entonces $E = G = 0$ (luego $X_u = X_v = 0$) y la parametrización no es regular. Recíprocamente, si $E + G \neq 0$, entonces $E = G \neq 0$ y X_u y X_v son vectores ortogonales no nulos, luego linealmente independientes. $\square$

Más aún, la holomorfía de las funciones ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 determina cuándo X parametriza una superficie mínima y establece la conexión deseada entre la teoría de superficies mínimas y el análisis complejo.

- PROPOSICIÓN 4.12. (a) Si X es una parametrización regular (mínima) e isoterma de una superficie mínima, entonces ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 son holomorfas.
 (b) Sean $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : U \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas tales que $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ y $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$. Si U es simplemente conexo, entonces existe una parametrización isoterma y regular $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ verificando (4.9) dada por

$$X(\zeta) = X(\zeta_0) + \left(\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(w) dw \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar el apartado (a), observemos que las ecuaciones de Cauchy–Riemann para ϕ_1 son equivalentes a que $\Delta x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0$, esto es, que la función $x : U \rightarrow \mathbb{C}$ sea armónica. De forma análoga, ϕ_2 y ϕ_3 son holomorfas cuando $\Delta y = 0$ y $\Delta z = 0$. Por tanto, probaremos que el campo $\Delta X = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = X_{uu} + X_{vv}$ es nulo, y haremos esto viendo que su producto por los elementos de la base $\{X_u, X_v, N\}$ es nulo. Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle &= \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_{vv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_u \rangle + \frac{\partial}{\partial v} \langle X_v, X_u \rangle - \langle X_v, X_{uv} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_u \rangle + \frac{\partial}{\partial v} \langle X_v, X_u \rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle X_v, X_v \rangle = F_v + \frac{1}{2}(E_u - G_u) = 0, \end{aligned}$$

ya que $E = G$ y $F = 0$ por ser X isoterma. Análogamente,

$$\begin{aligned} \langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle &= \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_v \rangle - \langle X_u, X_{uv} \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle X_v, X_v \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_v \rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle X_u, X_u \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle X_v, X_v \rangle = F_u + \frac{1}{2}(G_v - E_v) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle = \langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_{vv}, N \rangle = e + g = 0,$$

puesto que, al ser X isoterma, la condición de mínimaidad $eG + Eg - 2Ff = 0$ se traduce en que $e + g = 0$. Esto concluye la demostración del apartado (a).

Para probar el apartado (b), comenzaremos trabajando con la función holomorfa $\phi_1 : U \rightarrow \mathbb{C}$ (para ϕ_2 y ϕ_3 es similar), para la que las ecuaciones de Cauchy–Riemann nos dicen que

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(\phi_1)}{\partial u} = \frac{\partial \operatorname{Im}(\phi_1)}{\partial v}, \quad \frac{\partial \operatorname{Re}(\phi_1)}{\partial v} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(\phi_1)}{\partial u}.$$

Al estar trabajando en un abierto simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$, el lema de Poincaré nos asegura que existen funciones diferenciables $x, x^* : U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re}(\phi_1) = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x^*}{\partial v}, \quad \operatorname{Im}(\phi_1) = -\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x^*}{\partial u}. \quad (4.10)$$

Estas funciones son *armónicas conjugadas* ya que son la parte real e imaginaria de una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f = x + ix^*$. En efecto, usando (4.10), deducimos que f cumple las ecuaciones de Cauchy–Riemann:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x^*}{\partial v} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial v}, \quad \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial v} = -\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial x^*}{\partial u} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial u}.$$

Usando (4.10) de nuevo, la derivada compleja de f está dada por

$$f' = \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial u} + i \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial x^*}{\partial u} = \operatorname{Re}(\phi_1) + i \operatorname{Re}(\phi_1) = \phi_1.$$

El teorema fundamental del cálculo para funciones de variable compleja nos asegura que, dados $\zeta_0, z \in U$ y un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ con $\gamma(a) = \zeta_0$ y $\gamma(b) = z$, se cumple que

$$f(z) - f(\zeta_0) = \int_{\gamma} f'(w) dw = \int_{\gamma} \phi_1(w) dw.$$

En particular, esta última integral no depende del camino elegido. Tomando la parte real de la expresión anterior, se obtiene la primera componente de la fórmula dada en el enunciado. La segunda y tercera componentes se obtienen de forma análoga razonando con ϕ_2 y ϕ_3 . Observemos finalmente que esta parametrización es isoterma y regular por el lema (4.11) ya que estamos asumiendo que $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ y $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$. $\square$

Observando la demostración anterior vemos como las superficies mínimas guardan relación con las funciones armónicas y podemos expresarlo como sigue.

COROLARIO 4.13. *Si $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización armónica e isoterma, entonces la superficie parametrizada definida por X es mínima.*

4.1. Expresión de las parametrizaciones isotermas en términos de funciones complejas. A continuación, vamos a encontrar una forma de obtener todas las funciones $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas que verifican $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ y $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$ en términos de sólo dos funciones holomorfas. De esta manera, tendremos un procedimiento genérico para producir superficies mínimas sin más que elegir dichas funciones holomorfas.

Partimos de $U \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo para poder aplicar la proposición 4.12, la cual nos permite integrar ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 para obtener la superficie mínima en el espacio euclídeo en la cual la parametrización X es

$$X(\zeta) = X(\zeta_0) + \left(\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(w) dw \right).$$

El término $X(\zeta_0)$ no es más que la constante de integración, luego podemos redefinir esta expresión para un $p_0 \in \mathbb{R}^3$ arbitrario:

$$X(\zeta) = p_0 + \left(\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(w) dw \right).$$

En un punto en que $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = 0$, la parametrización $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ deja de ser una superficie parametrizada y se dice que X tiene un punto de ramificación. A veces, se estudian superficies mínimas con puntos de ramificación, llamadas superficies mínimas ramificadas. Para dichas superficies, debido a que ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 son funciones holomorfas, los puntos de ramificación están aislados. A pesar de esta mención, nos centraremos en las superficies no ramificadas y evitaremos estos puntos al considerar ejemplos simplemente eliminándolos del dominio.

Escribimos $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ de forma equivalente como

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = (\phi_1 + i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) + \phi_3^2 = 0. \quad (4.11)$$

Definimos la función $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} \neq 0,$$

que está bien definida y es holomorfa salvo posiblemente en los puntos en que $\phi_1 - i\phi_2 = 0$, en los que puede presentar polos si ϕ_3 no tiene un cero que compense al cero del denominador (en particular, g no puede tener singularidades esenciales). Por tanto, podemos extender abusando de la notación $g : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ y decir que es una función meromorfa. A partir de g y de la expresión (4.11), obtenemos que

$$g^2 = \frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = \frac{-(\phi_1 + i\phi_2)}{\phi_1 - i\phi_2}$$

Definimos también $f = \phi_1 - i\phi_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$, que sí es una función holomorfa ya que ϕ_1 y ϕ_2 son holomorfas. Con todo esto, buscamos expresar ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 en términos únicamente de las funciones f y g :

$$g^2 = \frac{-(\phi_1 + i\phi_2)}{\phi_1 - i\phi_2} = \frac{-(\phi_1 + i\phi_2)}{f}; \quad g^2 f = -(\phi_1 + i\phi_2)$$

Así pues,

$$\left. \begin{array}{l} g^2 f = -\phi_1 - i\phi_2 \\ f = \phi_1 - i\phi_2 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \phi_2 = \frac{1}{-2i} f(g^2 + 1) = \frac{i}{2} f(g^2 + 1) \\ \phi_1 = \frac{1}{2} f(1 - g^2) \end{array} \right\}.$$

Por otro lado, como $g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} = \frac{\phi_3}{f}$ tenemos que $\phi_3 = fg$. Como ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 son holomorfas, los productos fg y fg^2 también deben serlo, si bien observamos que la holomorfía de fg^2 implica la de fg . Por tanto, si $\zeta_0 \in U$ es un polo de g de orden m , entonces ζ_0 debe ser un cero f de orden al menos $2m$. Tenemos así que

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(g^2 + 1), \quad \phi_3 = fg.$$

Esta elección de funciones verifica la condición requerida puesto que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = f^2 \left(\frac{1}{4}(1 - g^2)^2 - \frac{1}{4}(g^2 + 1)^2 + g^2 \right) = f^2 [-g^2 + g^2] = 0.$$

Además, $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = \frac{1}{2}|f|^2(1 + |g|^2)^2$. Estos resultados nos llevan a enunciar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.14. *Sea un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y sean $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : U \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas cualesquiera verificando $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$. Entonces, existen $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ funciones tales que*

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2) \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(g^2 + 1) \quad \phi_3 = fg, \quad (4.12)$$

siendo f holomorfa y g meromorfa tales que fg^2 es holomorfa.

Recíprocamente, dadas $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, holomorfa y meromorfa respectivamente, tales que fg^2 es holomorfa y U es simplemente conexo, la aplicación

$$X(\zeta) = \left(\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{f(w)(1 - g(w)^2)}{2} dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{if(w)(1 + g(w)^2)}{2} dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(w)g(w)dw \right)$$

es una parametrización isoterma y regular de una superficie mínima en los puntos en que $|f|^2(1 + |g|^2)^2 \neq 0$ (en caso contrario, se produce ramificación).

Tenemos expresado así, a partir de los parámetros anteriores, una superficie parametrizada que es mínima salvo puntos de ramificación los cuales tendremos que eliminar. Esta forma de expresar la superficie se llama representación de Enneper-Weierstrass y a las funciones f y g se las conoce como datos de Weierstrass. podemos obtener resultados ya vistos pero en este caso en función de las funciones f y g mencionadas en este capítulo.

Observemos que los vectores X_u y X_v asociados a una parametrización de esta forma están dado por (4.9) como

$$X_u = (\operatorname{Re} \phi_1, \operatorname{Re} \phi_2, \operatorname{Re} \phi_3), \quad X_v = (\operatorname{Im} \phi_1, \operatorname{Im} \phi_2, \operatorname{Im} \phi_3).$$

PROPOSICIÓN 4.15. *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, U un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y $X : U \rightarrow \Sigma$ un parametrización isoterma. Consideremos las funciones f y g junto con la parametrización de Enneper-Weierstrass y su conjugada donde ambas parametrizaciones serán mínimas e isotermas, entonces el factor conforme λ verifica,*

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}|f|^2(1 + |g|^2)^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que las parte real e imaginaria de una función analítica son armónicas, sabemos que su laplaciano se anula, es decir, el campo $\Delta X = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = X_{uu} + X_{vv}$ es nulo y $x_{uu} + x_{vv} = y_{uu} + y_{vv} = z_{uu} + z_{vv} = 0$. tenemos así que ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 expresadas como en (4.12) son funciones holomorfas que además verifican $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ por ser X es isoterma.

Como además, las parametrizaciones son regulares, por el ítem (b) del lema (4.11) sabemos que

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = \|X_u\|^2 + \|X_v\|^2 = E + G$$

y por ser isoterma $E = G$, luego

$$\begin{aligned} |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 &= 2E = 2\langle X_u, X_u \rangle = 2\lambda^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(|f|^2 |1 - g^2|^2 + |f|^2 |1 + g^2|^2 + 4|fg|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|f|^2 (1 + |g|^2) \right)^2 \end{aligned}$$

Así, despejamos $\lambda^2 = \frac{1}{4}|f|^2(1 + |g|^2)^2$, que es la expresión que estábamos buscando $\square$

Teniendo en cuenta el lema (4.2), se deduce además la siguiente expresión para la curvatura de Gauss.

PROPOSICIÓN 4.16. *Bajo las condiciones preestablecidas de la parametrización de Enneper-Weierstrass, la curvatura de Gauss para viene determinada por*

$$K = - \left(\frac{4|g'|}{|f|(1 + |g|^2)^2} \right)^2.$$

Como $0 = 2H = \kappa_1 + \kappa_2$ y $\kappa_1 \kappa_2 = K$, deducimos además las siguientes expresiones de forma inmediata para las curvaturas principales:

$$\kappa_1 = \frac{-4|g'|}{|f|(1 + |g|^2)^2} \quad \kappa_2 = \frac{4|g'|}{|f|(1 + |g|^2)^2}.$$

En ocasiones basta con conocer parte de la superficie y a partir de movimientos rígidos conseguir el resto de la misma si sabemos que esta tiene ciertas simetrías. El siguiente teorema de reflexión y rotación no lo demostraremos pero es útil a la hora de analizar ejemplos concretos. Su demostración puede encontrarse, por ejemplo, en [2].

TEOREMA 4.17 (simetría de superficies mínimas). *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie mínima y sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ una curva regular en la superficie.*

- (a) *Si α es un segmento de línea recta, entonces Σ es invariante por la simetría axial respecto de dicha recta.*
- (b) *Si α es una curva contenida en un plano P y Σ es ortogonal a P a lo largo de α , entonces Σ es invariante por la simetría especular respecto de P*

Si en cualquiera de los dos supuestos anteriores, la curva se halla en la frontera de Σ , entonces pueden usarse estos movimientos rígidos para extender Σ de forma diferenciable.

4.2. Ejemplos.

4.2.1. *Plano.* Sean las funciones $f(z) = 1$, holomorfa en $\mathbb{C}$ y $g(z) = 1$, holomorfa en $\mathbb{C}$.

Calculamos $fg^2 = 1$, que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. A partir (4.12) obtenemos que

$$\phi_1 = \frac{1}{2}1(1 - 1^2) = 0 \quad \phi_2 = \frac{i}{2}1(1 + 1) = i \quad \phi_3 = 1.$$

Tomando el valor inicial $\zeta_0 = 0$ y $X(\zeta_0) = 0$, podemos integrar

$$\begin{aligned} X(\zeta) &= X(\zeta_0) + \left(\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(w) dw \right) \\ &= \left(\operatorname{Re} \int_0^{\zeta} 0 dw, \operatorname{Re} \int_0^{\zeta} i dw, \operatorname{Re} \int_0^{\zeta} 1 dw \right) \\ &= \operatorname{Re} \left([0]_0^{\zeta}, [iw]_0^{\zeta}, [w]_0^{\zeta} \right) = \operatorname{Re} (0, i\zeta, \zeta) \end{aligned}$$

En términos de las variables reales (u, v) , podemos expresar

$$X(u, v) = (0, -v, u).$$

Comprobamos de forma inmediata que se verifica la condición $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ y que X es isoterma puesto que dadas las derivadas

$$X_u = (0, 0, 1), \quad X_v = (0, -1, 0),$$

calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental asociados

$$E = \|X_u\|^2 = 1, \quad G = \|X_v\|^2 = 1, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

4.2.2. *Helicoides.* Sean las funciones $f(z) = i$, holomorfa en $\mathbb{C}$ y $g(z) = \frac{1}{z}$, meromorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Obtenemos $fg^2 = \frac{i}{z^2}$ holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$. A partir (4.12) de obtenemos

$$\phi_1 = \frac{i}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \quad \phi_2 = \frac{-1}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2} \right) \quad \phi_3 = \frac{i}{z},$$

Suponemos $\zeta_0 = 0$ y $X(\zeta_0) = 0$,

$$\begin{aligned} X(\zeta) &= X(\zeta_0) + \left(\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(w) dw \right) \\ &= \left(\operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{i}{2} \left(1 - \frac{1}{w^2} \right) dw, \operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{-1}{2} \left(1 + \frac{1}{w^2} \right) dw, \operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{i}{w} dw \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{2} \left[w + \frac{1}{w} \right]_0^{\zeta}, \frac{-1}{2} \left[w - \frac{1}{w} \right]_0^{\zeta}, i [\ln(w)]_0^{\zeta} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{2} \left[\zeta + \frac{1}{\bar{\zeta}} \right], \frac{-1}{2} \left[\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right], i \ln(\zeta) \right) \end{aligned}$$

Como $\zeta = u + iv$ y $\operatorname{Re}(i \ln(\zeta)) = \operatorname{Re}(i(\ln|\zeta| + i \arg(\zeta))) = -\arg(u, v)$ con $u > 0$, podemos extrapolar esta reparametrización a términos de (u, v)

$$X(u, v) = \left(\frac{1}{2} \left(-v + \frac{1}{v} \right), \frac{-1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right), -\arg(u, v) \right) \quad u > 0.$$

Realicemos la comprobación de las hipótesis,

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \left(\frac{i}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{z^2} \right)^2 + \left(\frac{i}{z} \right)^2 = 0,$$

y por otro lado, comprobamos que X es isoterma. Calculemos en primer lugar las derivadas parciales,

$$X_u = \left(0, \frac{-1}{2} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right), 0 \right), \quad X_v = \left(\frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{v^2} \right), 0, 0 \right).$$

De forma inmediata tenemos,

$$E = \|X_u\|^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{u^4} \right) + \frac{1}{2u^2},$$

$$G = \|X_v\|^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{v^4} \right) + \frac{1}{2v^2},$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

4.2.3. *Catenoide.* Sean $f(z) = 1$ holomorfa en $\mathbb{C}$ y $g(z) = \frac{1}{z}$ meromorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Calculamos fg^2 ; $fg^2 = \frac{1}{z^2}$ holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$. Luego

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \quad \phi_2 = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z^2} + 1 \right) \quad \phi_3 = \frac{1}{z},$$

Suponemos $\zeta_0 = 0$ y $X(\zeta_0) = 0$,

$$\begin{aligned} X(\zeta) &= X(\zeta_0) + \left(\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(w) dw \right) \\ &= \left(\operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{w^2} \right) dw, \operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{i}{2} \left(\frac{1}{w^2} + 1 \right) dw, \operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{1}{w} dw \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \left[w + \frac{1}{w} \right]_0^{\zeta}, \frac{i}{2} \left[\frac{-1}{w} + w \right]_0^{\zeta}, [\ln(w)]_0^{\zeta} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \frac{i}{2} \left(\frac{-1}{\zeta} + \zeta \right), \ln(\zeta) \right). \end{aligned}$$

Como $\zeta = u + iv$ podemos extrapolar esta parametrización a términos (u, v) :

$$X(u, v) = \left(\frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v} - v \right), \ln(u) \right)$$

Realicemos la comprobación de las hipótesis, por un lado

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)^2 + \left(\frac{i}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{z^2} + 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{z} \right)^2 = 0,$$

y por otro lado, comprobamos que X es isoterma. Repetimos el método anterior, derivadas parciales,

$$X_u = \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right), 0, \frac{1}{u} \right), \quad X_v = \left(0, \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{v^2} - 1 \right), 0 \right).$$

De forma inmediata, los coeficientes de la primera forma fundamental vienen dados por

$$\begin{aligned} E &= \|X_u\|^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{u^4} \right) + \frac{1}{2u^2}, \\ G &= \|X_v\|^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{v^4} \right) + \frac{1}{2v^2}, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0. \end{aligned}$$

4.2.4. Caso general: familia asociada al catenoide y el helicoides. Sean las funciones $f(z) = e^{i\theta}$ holomorfa en $\mathbb{C}$ y $g(z) = \frac{1}{z}$ meromorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Calculamos fg^2 ; $fg^2 = \frac{e^{i\theta}}{z^2}$ holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$. Luego

$$\phi_1 = \frac{1}{2} e^{i\theta} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \quad \phi_2 = \frac{i}{2} e^{i\theta} \left(\frac{1}{z^2} + 1 \right) \quad \phi_3 = e^{i\theta} \frac{1}{z},$$

Suponemos $\zeta_0 = 0$ y $X(\zeta_0) = 0$,

$$\begin{aligned} X(\zeta) &= X(\zeta_0) + \left(\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(w) dw \right) \\ &= \left(\operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{1}{2} e^{i\theta} \left(1 - \frac{1}{w^2} \right) dw, \operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{i}{2} e^{i\theta} \left(\frac{1}{w^2} + 1 \right) dw, \operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{e^{i\theta}}{w} dw \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \left(\frac{1}{2} \left[w + \frac{1}{w} \right]_0^{\zeta}, \frac{i}{2} \left[\frac{-1}{w} + w \right]_0^{\zeta}, [\ln(w)]_0^{\zeta} \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \left(\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \frac{i}{2} \left(\frac{-1}{\zeta} + \zeta \right), \ln(\zeta) \right) \right). \end{aligned}$$

Como $\zeta = u + iv$ y $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ podemos extrapolar esta parametrización a términos (u, v) y θ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \left(\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right) \right) &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \left(\frac{1}{2} \left(u + iv + \frac{1}{u + iv} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos(\theta) \left(u + \frac{u}{u^2 + v^2} \right) - \sin(\theta) \left(v - \frac{v}{u^2 + v^2} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \left(\frac{i}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right) \right) &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \left(\frac{i}{2} \left(u + iv - \frac{1}{u + iv} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos(\theta) \left(-v - \frac{v}{u^2 + v^2} \right) - \sin(\theta) \left(u - \frac{u}{u^2 + v^2} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \ln(\zeta) \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \ln(u + iv) \right) = \cos(\theta) \ln(u)$$

Así la familia asociada viene dada por la siguiente parametrización,

$$\begin{aligned} X_\theta(u, v) = & \left(\frac{1}{2} \left(\cos(\theta) \left(u + \frac{u}{u^2 + v^2} \right) - \sin(\theta) \left(v - \frac{v}{u^2 + v^2} \right) \right), \right. \\ & \frac{1}{2} \left(\cos(\theta) \left(-v - \frac{v}{u^2 + v^2} \right) - \sin(\theta) \left(u - \frac{u}{u^2 + v^2} \right) \right), \\ & \left. \cos(\theta) \ln(u) \right) \end{aligned}$$

4.2.5. *Enneper*. Dadas las funciones $f(z) = 1$ holomorfa en $\mathbb{C}$ y $g(z) = z$ holomorfa en $\mathbb{C}$.

Calculemos fg^2 ; $fg^2 = z^2$, holomorfa en $\mathbb{C}$. Luego

$$\phi_1 = \frac{1 - z^2}{2} \quad \phi_2 = \frac{i(z^2 + 1)}{2} \quad \phi_3 = z,$$

Suponemos $\zeta_0 = 0$ y $X(\zeta_0) = 0$,

$$\begin{aligned} X(\zeta) &= X(\zeta_0) + \left(\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(w) dw \right) \\ &= \left(\operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{1 - w^2}{2} dw, \operatorname{Re} \int_0^{\zeta} \frac{i(w^2 + 1)}{2} dw, \operatorname{Re} \int_0^{\zeta} w dw \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \left[w - \frac{w^3}{3} \right]_0^{\zeta}, \frac{i}{2} \left[\frac{w^3}{3} + w \right]_0^{\zeta}, \left[\frac{w^2}{2} \right]_0^{\zeta} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^3}{6}, i \left(\frac{\zeta^3}{6} + \frac{\zeta}{2} \right), \frac{\zeta^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Como $\zeta = u + iv$ podemos extrapolar esta parametrización a estos términos:

$$X(u, v) = \left(\frac{u}{2} - \frac{u^3 - 3uv^2}{6}, \frac{-3u^2v + v^3}{6} - \frac{v}{2}, \frac{u^2 - v^2}{2} \right)$$

Operando en la misma podemos simplificarlo,

$$X(u, v) = \frac{1}{2} \left(u \left(1 - \frac{u^2}{3} + v^2 \right), v \left(-u^2 + \frac{v^2}{3} - 1 \right), u^2 - v^2 \right)$$

Finalmente comprobamos las hipótesis,

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \frac{(1 - z^2)^2}{4} + \left(\frac{i}{2} \right)^2 (z^2 + 1)^2 + z^2 = 0,$$

X es isoterma,

$$X_u = \frac{1}{2} \left(1 - u^2 + v^2, -2vu, 2u \right), \quad X_v = \frac{1}{2} \left(2vu, -u^2 + v^2 - 1, -2v \right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} E &= \|X_u\|^2 = \frac{1}{4} \left(1 + 2u^2 + 2v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4 \right) \\ G &= \|X_v\|^2 = \frac{1}{4} \left(2u^2v^2 + u^4 + 2u^2 + v^4 + 2v^2 + 1 \right) \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \frac{1}{4} \left((1 - u^2 + v^2)(2vu) + (-u^2 + v^2 - 1)(-2vu) - 4uv \right) = 0. \end{aligned}$$

Representación superficies mínimas

En esta sección vamos a mostrar el uso del Mathematica para la representación de diversas superficies mínimas. En el mismo, vamos a mostrar las funciones programadas y la generación de las figuras correspondientes.

1. Representación a partir de la parametrización

En el caso de conocer las parametrizaciones, basta con introducir las mismas y ejecutar el comando `ParametricPlot3D` para su esbozo.

1.1. Primera superficie de Scherk. Introducimos la parametrización de la superficie Scherk:

```
scherk[a_][u_, v_] := {u, v, (1/a)Log[Cos[av]/Cos[au]]}
```

A continuación, generamos la superficie en $\mathbb{R}^3$ (véase la figura 1):

```
ParametricPlot3D[Evaluate[scherk[1][u, v]],  
  {u, -Pi/2 + 0.01, Pi/2 - 0.01}, {v, -Pi/2 + 0.01, Pi/2 - 0.01},  
  PlotPoints->{30, 20}, PlotStyle->{Hue[0.09, 0.78, 0.87]},  
  Axes->None, Boxed->False  
]
```

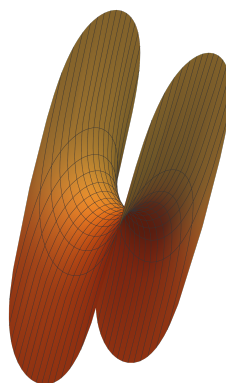


FIGURA 1. Primera superficie de Scherk con $a = 1$

1.2. Superficie mínima de Henneberg. Introducimos la parametrización de la superficie mínima de Henneberg:

```
henneberg[u_, v_] := {2 Sinh[u] Cos[v] - (2/3) Sinh[3u] Cos[3v],
  2 Sinh[u] Sin[v] + (2/3) Sinh[3u] Sin[3v], 2 Cosh[2u] Cos[2v]}
```

Esbozamos ahora una región en la que se puede apreciar una banda de Möbius, que revela la no orientabilidad global:

```
ParametricPlot3D[Evaluate[henneberg[u, v]],
  {u, 0.35, 0.85}, {v, -Pi, Pi},
  PlotPoints -> {12, 56}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> {Hue[0.99, 0.75, 0.53]},
  Axes -> None, Boxed -> False
]
```

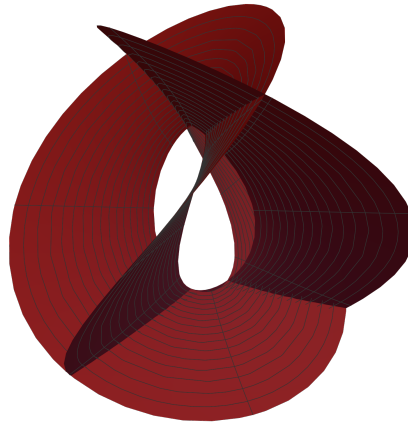


FIGURA 2. Superficie mínima Henneberg

1.3. Familia asociada al helicoides y catenoide. El helicoides se puede deformar en un catenoide, como consecuencia de ello hemos introducido la transformación, denominada *helicate*, que nos permite su realización. En dicha transformación, la variable t oscila entre 0 y $\frac{\pi}{2}$; en el caso de ser cero tenemos un helicoides y en el otro caso un catenoide. Veamos dicha deformación,

```
helicate[t_][u_, v_] :=
  Cos[t] {Sinh[v] Sin[u], -Sinh[v] Cos[u], u}
  + Sin[t] {Cosh[v] Cos[u], Cosh[v] Sin[u], v}
```

Comenzamos representando un helicoides, que se obtiene para $t = 0$:

```
ParametricPlot3D[Evaluate[helicate[0][u, v]],
  {u, -Pi/2 + 0.01, Pi/2 - 0.01}, {v, -Pi/2 + 0.01, Pi/2 - 0.01},
  PlotPoints -> {50, 30}, PlotStyle -> {Hue[0.12, 0.88, 0.93]},
  Axes -> None, Boxed -> False
]
```

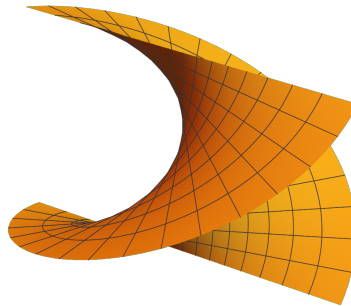
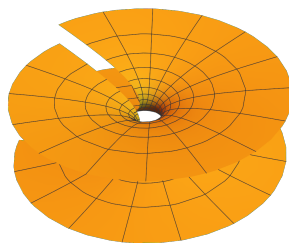


FIGURA 3. Helicoide

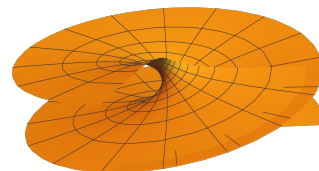
Veamos como variando t , varía la superficie:

```
ParametricPlot3D[Evaluate[helicate[Pi/5][u, v]],
  {u, -Pi, Pi}, {v, -Pi, Pi},
  PlotPoints -> {20, 20}, PlotStyle -> {Hue[0.12, 0.88, 0.93]},
  Axes -> None, Boxed -> False
]

ParametricPlot3D[Evaluate[helicate[2Pi/5][u, v]],
  {u, -Pi, Pi}, {v, -Pi, Pi},
  PlotPoints -> {20, 20}, PlotStyle -> {Hue[0.12, 0.88, 0.93]},
  Axes -> None, Boxed -> False
]
```



(A) Superficie asociada al
helicoide con $t = \frac{\pi}{5}$



(B) Superficie asociada al heli-
coide con $t = \frac{2\pi}{5}$

FIGURA 4. Helicoide – Catenoide

Finalmente para $t = \frac{\pi}{2}$, tenemos el catenoide:

```
ParametricPlot3D[Evaluate[helicate[Pi/2][u, v]],
  {u, -Pi, Pi}, {v, -Pi, Pi},
  PlotPoints -> {20, 20}, PlotStyle -> {Hue[0.12, 0.88, 0.93]},
  Axes -> None, Boxed -> False
]
```

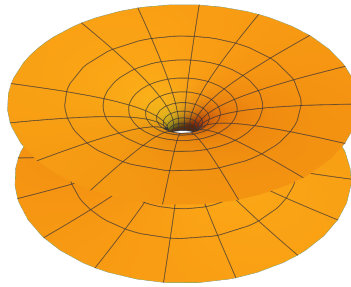


FIGURA 5. Helicoide

2. Representación a partir de la representación de Enneper-Weierstrass

2.1. Superficie de Richmond. Para conseguir implementar la representación de Enneper-Weierstrass ha sido necesario implementar algunas funciones adicionales. En primer lugar, definimos la función **X** que no será más que el vector de funciones complejas (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) de la parametrización de Enneper-Weierstrass dado por 4.12:

```
X[f_, g_][z_] := Module[{zz, phi},
  phi = Integrate[{(1-g[zz]^2)f[zz]/2, I(1+g[zz]^2)f[zz]/2,
    f[zz]g[zz]}, zz];
  Simplify[phi /. zz -> z]
]
```

Para obtener la parametrización deseada necesitamos definir otra función, en este caso **minimal** donde a partir de una función analítica **Psi** y aplicada a la función anterior **X** nos proporciona una parametrización mínima e isoterma donde su parte real se corresponde con la parametrización

$$X(\zeta) = X(\zeta_0) + \left(\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(w) dw, \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(w) dw \right).$$

```
minimal[Psi_][t_][u_, v_] := ComplexExpand[Re[E^(-It)Psi[u + I v]]]
```

Para ponerlo en practica vamos a representar la superficie mínima de **Richmond**. Comenzamos introduciendo los datos f y g :

```
f[z]=1/z^2
g[z]=z^(n+1)
```

A continuación, calculamos las funciones ϕ asociadas

```
richmond[n_][z_] = X[1 / #^2 &, #^(n + 1) &][z]
```

En este caso, obtenemos la siguiente integral explícita:

$$\left\{ -\frac{1+2n+z^{2+2n}}{2z+4nz}, \frac{1}{2}i \left(-\frac{1}{z} + \frac{z^{1+2n}}{1+2n} \right), \frac{z^n}{n} \right\}$$

Esto nos da la parametrización deseada pero en este caso trabajaremos en coordenadas polares alrededor del polo que la función f tiene en $z = 0$:

```
richmondpolar[n_][t_][r_, theta_] =
  PowerExpand[
    Simplify[
      ComplexExpand[minimal[richmond[n]]][t]
      [r Cos[theta], r Sin[theta]],
      TargetFunctions -> {Re, Im}]
    /. {ArcTan[r^2, 0] -> 0, ArcTan[r Cos[theta], r Sin[theta]] -> theta}
  ]
```

De esta manera, llegamos a la parametrización en coordenadas polares

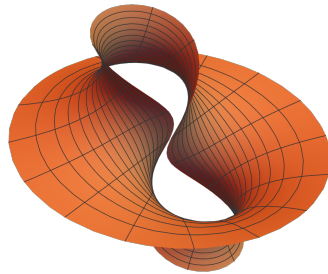
$$x(r, t) = -\frac{\cos[t + \theta] + \frac{r^{2(1+n)}\cos[t+\theta-2(1+n)\theta]}{1+2n}}{2r},$$

$$y(r, t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin[t + \theta]}{r} + \frac{r^{2(\frac{1}{2}+n)}\sin[t - (1+2n)\theta]}{1+2n} \right),$$

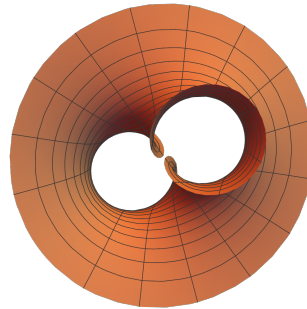
$$z(r, t) = \frac{r^n \cos[t - n\theta]}{n}$$

y finalmente representamos la superficie mediante

```
ParametricPlot3D[Evaluate[richmondexppolar[1][0][r, theta]],
  {r, 0.3, 1.3}, {theta, 0, 2 Pi},
  PlotPoints -> {20, 40},
  Axes -> None, Boxed -> False,
  PlotStyle -> {Hue[0.06, 0.65, 0.88]}
]
```

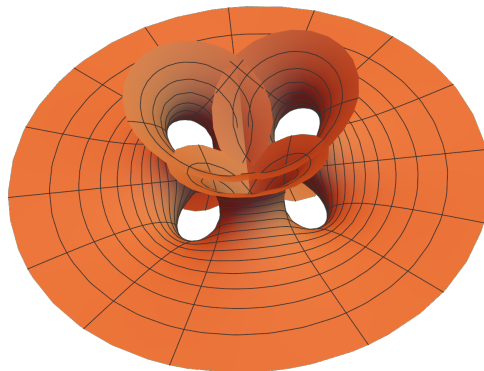


(A)



(B)

```
ParametricPlot3D[Evaluate[richmondexpolar[3][0][r, theta]],
  {r, 0.3, 1.3}, {theta, 0, 2 Pi},
  PlotPoints -> {20, 40},
  Axes -> None, Boxed -> False,
  PlotStyle -> {Hue[0.06, 0.65, 0.88]}
]
```



3. Libreria mesh

3.1. Superficie de Chen–Gackstatter de género 2. Esta superficie fue generalizada para cualquier género por López–Martín–Rodríguez, pero en nuestro caso solo lo haremos de género 2. Elegimos la simetría e introducimos los datos de Weierstrass;

$$k = 4;$$

$$a = 7.68912;$$

$$ro = 1/0.241507;$$

$$f[z_] = ro \left(\text{Sqrt}[-1+z] z^{(-1+1/k)} \text{Sqrt}[1+z] \right) / \left(\text{Sqrt}[-a+z] \text{Sqrt}[a+z] \right)$$

$$g[z_] = \left(\text{Sqrt}[-a+z] \text{Sqrt}[a+z] \right) / \left(ro \text{Sqrt}[-1+z] z^{(-1+1/k)} \text{Sqrt}[1+z] \right)$$

$$\frac{ro \sqrt{z-1} \sqrt{z+1} z^{\frac{1}{k}-1}}{\sqrt{z-a} \sqrt{a+z}}$$

$$\frac{\sqrt{z-a} \sqrt{a+z} z^{1-\frac{1}{k}}}{ro \sqrt{z-1} \sqrt{z+1}}$$

y obtenemos la parametrización Enneper–Weierstrass siguiendo

$$X(\zeta) = X(\zeta_0) + \left(\text{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(w) dw, \text{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(w) dw, \text{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(w) dw \right).$$

$$\text{phi1} = 1 / 2 (1 - (g[x])^2) f[x]$$

$$\text{phi2} = I / 2 (1 + (g[x])^2) f[x]$$

$$\text{phi3} = f[x] g[x]$$

$$\frac{ro \sqrt{z-1} \sqrt{z+1} \left(1 - \frac{z^{\frac{2}{k}-2} (-a+z)(a+z)}{(-1+z)(1+z)ro^2} \right) z^{\frac{1}{k}-1}}{2 \sqrt{z-a} \sqrt{a+z}}$$

$$\frac{i ro \sqrt{z-1} \sqrt{z+1} \left(1 - \frac{z^{\frac{2}{k}-2} (-a+z)(a+z)}{(-1+z)(1+z)ro^2} \right) z^{\frac{1}{k}-1}}{2 \sqrt{z-a} \sqrt{a+z}}$$

1

Debido que al intentar esbozar la superficie con los anteriores cálculos sin antes simplificar se complica demasiado previamente simplificamos las funciones, para ello definimos las siguientes funciones y volvemos a parametrizar a partir de funciones auxiliares.

$$\text{aux1}[z_] := z^{(1/k-1)} (z-1)^{(1/2)} (z+1)^{(1/2)} (z-a)^{(-1/2)} (z+a)^{(-1/2)}$$

$$\text{aux2}[z_] := z^{(1/k-1)} (z-1)^{(1/2)} (z+1)^{(1/2)} (z-a)^{(-1/2)} (z+a)^{(-1/2)}$$

$$\text{phi1aux} = 1 / 2 (1/ro \text{aux2}[z] - ro \text{aux1}[z])$$

$$\text{phi2aux} = I / 2 (1/ro \text{aux2}[z] + ro \text{aux1}[z])$$

$$\text{phi3aux} = f[x] g[x]$$

$$\frac{1}{2} \left(-ro \left(\frac{1}{2} \sqrt{\text{Cot}[x]} (1 - \text{Tan}[x]) \right) [z] + \frac{\left(\frac{i}{2} \sqrt{\text{Cot}[x]} (1 + \text{Tan}[x]) \right) [z]}{ro} \right)$$

$$\frac{i}{2} \left(\text{ro} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\text{Cot}[x]} (1 - \text{Tan}[x]) \right) [z] + \frac{\left(\frac{i}{2} \sqrt{\text{Cot}[x]} (1 + \text{Tan}[x]) \right) [z]}{\text{ro}} \right)$$

1

Establecemos las constantes,

```
cp = 1.+I;
f0[z_] := Re[NIntegrate[{phi1aux[w], phi2aux[w], phi3aux[w]},
    {w, cp, z}]]
delta = f0[0]
```

```
{1, 28776, 0, 937297, -1.}
```

y calculamos el normal de la superficie a partir de la función `StereographicProjection` establecida en la librería *mesh*.

```
f1[z_] := f0[z] - delta
n[z_] := StereographicProjection[g[z]]
```

Es necesario un dominio en coordenadas polares para una correcta representación, así fijamos las constantes necesarias y calculamos dicho dominio de nuevo con una función de la librería ya mencionada, `PolarDomain`.

```
e = 0,0000000001;
nx1 = 3;
nx2 = 3;
nx3 = 4;
ny = 12;
m1 = PolarDomain[Union[NRange[e, 1, nx1]^2, NRange[1, a, nx2],
    NRange[a, 10., nx3], SameTest -> AlmostEqual],
    NRange[e, Pi/2 - e, ny]];
```

Finalmente, encadenamos una serie de funciones descritas en el apéndice de este trabajo para obtener la superficie deseada.

```
fr1 = MeshPlot3D[{f1[x+Iy], n[x+Iy]}, {x, y}, m1];
fr2 = MeshJoin[fr1, MeshRotate[fr1, StraightLine[{0, 0, 0}, f[1.I]]]];
fr3 = MeshJoin[fr2, MeshReflect[fr2, Plane[{1, 0, 0}, 0]]];
fr4 = MeshJoin@@Table[MeshRotateZ[fr3, i2Pi/k, 0], {i, 0, k-1}];
Show[gr = Mesh3DToGraphics3D[fr4]]
```

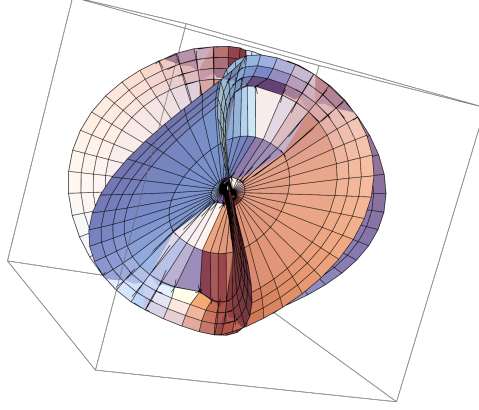


FIGURA 6. Superficie de Chen-Gackstatter de género 2

3.2. Superficie Hoffman-Wohlgemuth. Repetimos en parte el proceso seguido con la anterior superficie, comenzando por definir los datos de Weierstrass;

$$f[z_-] = ((-a+z)^{(3/2)} \text{Sqrt}[1+z]) / ((-b+z)^{(3/2)} (a+z)^{(3/2)} \text{Sqrt}[-1+z] \text{Sqrt}[b+z])$$

$$g[z_-] = ((a+z)^{(3/2)} \text{Sqrt}[-b+z] \text{Sqrt}[-1+z]) / (\text{Sqrt}[b+z] (-a+z)^{(3/2)} \text{Sqrt}[1+z])$$

$$\frac{(-a+z)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+z}}{(-b+z)^{\frac{3}{2}} (a+z)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-1+z} \sqrt{b+z}}$$

$$\frac{\sqrt{-b+z} (a+z)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-1+z}}{(-a+z)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+z} \sqrt{b+z}}$$

y obtenemos la parametrización Enneper-Weierstrass,

$$\text{phi1} = 1 / 2 (1 - (g[x])^2) f[x]$$

$$\text{phi2} = I / 2 (1 + (g[x])^2) f[x]$$

$$\text{phi3} = f[x] g[x]$$

$$\frac{\sqrt{1+z} (-a+z)^{3/2} \left(1 - \frac{(-1+z)(a+z)^3 (-b+z)}{(1+z)(-a+z)^3 (b+z)} \right)}{2\sqrt{-1+z} (a+z)^{3/2} (-b+z)^{3/2} \sqrt{b+z}}$$

$$\frac{i\sqrt{1+z} (-a+z)^{3/2} \left(1 + \frac{(-1+z)(a+z)^3 (-b+z)}{(1+z)(-a+z)^3 (b+z)} \right)}{2\sqrt{-1+z} (a+z)^{3/2} (-b+z)^{3/2} \sqrt{b+z}}$$

$$\frac{1}{(-b+z)(b+z)}$$

Con los datos anteriores, esbozar la superficie sin simplificar no puede dar errores, por ello previamente simplificamos siguiendo la estrategia ya mencionada, definimos funciones y volvemos a parametrizar a partir de funciones auxiliares.

$$\text{aux1}[z_-, a_-, b_-] := (z-a)^{(3/2)} (z-b)^{(-3/2)} (1/\text{sqrt}[z-1]) \\ (z+a)^{(-3/2)} (1/\text{sqrt}[z+b]) \text{sqrt}[z+1]$$

$$\text{aux2}[z_-, a_-, b_-] := (z-a)^{(-3/2)} (1/\text{sqrt}[z-b]) \text{sqrt}[z-1] \\ (z+a)^{(3/2)} (z+b)^{(-3/2)} (1/\text{sqrt}[z+1])$$

$$\frac{\sqrt{z+1} (z-a)^{3/2}}{\sqrt{z-1} (a+z)^{3/2} (z-b)^{3/2} \sqrt{b+z}}$$

$$\frac{\sqrt{z-1}(a+z)^{3/2}}{\sqrt{z+1}(z-a)^{3/2}\sqrt{z-b}(b+z)^{3/2}}$$

```
phi1aux := 1 / 2 (aux1[z]+aux2[z])
phi2aux := I / 2 (aux1[z]+aux2[z])
phi3aux := f[x] g[x]
```

Establecemos constantes, e integramos

```
cp = I;
tst[a_,b_] := {Im[NIntegrate[(aux1[z,a,b]+aux2[z,a,b]),{z,cp,(a + b)/2}]
  - NIntegrate[(aux1[z,a,b]+aux2[z,a,b]), {z,cp,2.}]],
  Re[NIntegrate[(aux1[z,a,b]-aux2[z,a,b]), {z,cp,(1 + b)/2}]
  - NIntegrate[(aux1[z,a,b]-phi2[z,a,b]), {z,cp,0}]]}
FindRoot[tst[xx,yy] == 0, {{xx,3}, {yy, ,4}}]
```

```
{xx → 0,593658,yy → 0,824079}
```

```
a = 0.593658;
b = 0.824079;
tst[a,b]
```

```
{2.886579864025407*^-15,5.4751536637809295*^-11}
```

Calculamos una parametrización auxiliar,

```
para = Re[{NIntegrate[phi1[z],{z,cp,0}], NIntegrate[phi2[z], {z,cp,0}],
  NIntegrate[phi3[z], {z,cp,0}]]}
```

```
{0.636306,0.739251,0.}
```

y usando la parametrización anterior obtenemos la deseada y el normal.

```
X[w_] := Re[{NIntegrate[phi1[z],{z,cp,w}], NIntegrate[phi2[z],{z,cp,w}],
  NIntegrate[phi3[z],{z,cp,w}]]} - para;
n[z_] := StereographicProjection[1/g[z]]
```

Por otro lado, establecemos los parámetros necesarios para obtener el dominio necesario para esbozar la superficie junto con la función `RectangularDomain` establecida en la librería *mesh*.

```
e = 0,00000001;
xa = -1,5;
xb = 5.;
n1 = 8;
n2 = 4;
xr = Union[NRange[xa,0,n1], NRange[0,t1,n2], NRange[t1,t0,n2],
  NRange[t0,xb,n1], SameTest -> AlmostEqual];
```

```
dm1 = RectangularDomain[xr, NRange[e,Pi-e,12]];
moeb[z_] := (pb^2z+a^2)/(pz + 1)
dm2 = MeshApply[Sqrt[moeb[E #]]&, dm1];
```

Finalmente, de nuevo, encadenamos una serie de funciones descritas en el apéndice de este trabajo para obtener la superficie deseada.

```
Show[DomainToGraphics[dm2], AspectRatio Automatic, Axes True]
fr1 = MeshPlot3D[{ f[x + Iy], n[x + Iy]}, {x,y}, dm2];
fr2 = MeshJoin[fr1, MeshReflect[fr1, Plane[{0,0,1}, 0]]];
fr3 = MeshJoin[fr2, MeshReflect[fr2, Plane[{1, 0, 0}, 0]]];
fr4 = MeshJoin[fr3, MeshReflect[fr3, Plane[{0, 1, 0}, f [(a + b)/2][[2]]]]];
Show[gr = Mesh3DToGraphics3D[fr4]]
```

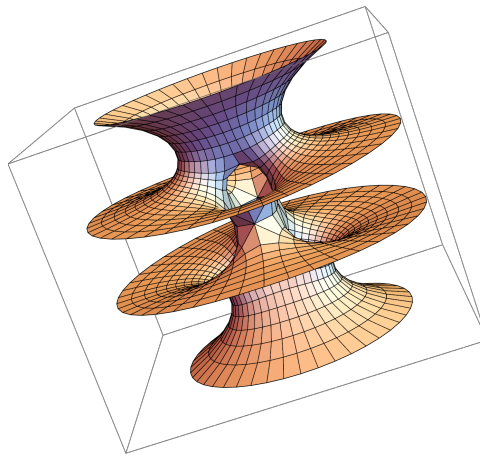


FIGURA 7. Superficie de Wohlgemuth de género 2

Bibliografía

- [1] Osserman, R. A survey of mínima surfaces. *Dover Phoenix editions*. Dover publications, 2002. ISBN: 9780486495149.
- [2] Fang, Y. Lectures on mínima Surfaces in $\mathbb{R}^3$. Proceedings of the Centre for Mathematics and Its Applications, Australian National University, 1996. ISBN: 9780731524433.
- [3] Weber, Matthias. Classical mínima Surfaces in Euclidean Space by Examples. 2001
- [4] Rodríguez, M. Introducción a la teoría de Superficies mínimas. Representación de Weierstrass. Recurso disponible en <http://wpd.ugr.es/~geometry/seminar/files/talks/20050208MRodr%C3%ADguez.pdf>
- [5] Rodríguez, M. Topología y curvatura de superficies mínimas de $\mathbb{R}^3$. 2001–2003. Recurso disponible en <https://www.ugr.es/~magdarp/Collin.pdf>
- [6] Martín, Francisco.; Pérez, Joaquín. Superficies mínimas foliadas por circunferencias: los ejemplos de Riemann. Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Granada. Recurso disponible en <https://wpd.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/riemann.pdf>
- [7] Pérez, Joaquín. A survey on classical mínima surface theory. Recurso disponible en <https://www.ugr.es/~jperez/papers/monograph-book2.pdf>
- [8] Pérez, Joaquín. Curvas y superficies. Recurso disponible en <http://wpd.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/curvas-y-superficies.pdf>
- [9] Costa, A.F; Gamboa, M.; y Porto, A.M Notas de geometría diferencial de curvas y superficies. Editorial, Sanz y Torres, Madrid, 1977. ISBN:8488667299.
- [10] Manzano, José M. Un viaje de la física a la geometría a través de las pompas de jabón. 2020. Recurso disponible en <https://www4.ujaen.es/~jmprego/material/ACM-Notas.pdf>
- [11] Alarcón López, Antonio Introducción a las Superficies de Riemann. Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Granada, 2005. Recurso disponible en <http://wpd.ugr.es/~geometry/seminar/files/talks/20050125AAlarc%C3%B3n.pdf>
- [12] Alarcón López, Antonio Superficies mínimas completas en el Espacio Euclídeo. Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Granada, 2008. Recurso disponible en <https://www.ugr.es/~alarcon/papers/tesis.pdf>
- [13] Pérez Gonzalez, Francisco Javier. Curso de análisis complejo. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada. Junio, 2004. Recurso disponible en https://www.ugr.es/~fjperez/textos/funciones_variable_compleja.pdf
- [14] Pérez Gonzalez, Francisco Javier. Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada. Recurso disponible en https://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf
- [15] Ránde, Luis Introducción a Latex. Departamento de Matemática aplicada. Universidad de Zaragoza, 2020.
- [16] Cordero, L.A.; Fernández, Marisa, coaut.; Gray, Alfred Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica. Proceedings of Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Wilmington, Delaware, E.U.A. Estados Unidos, 1995. ISBN: 0201653648.
- [17] <https://mathcurve.com/surfaces.gb/surfaces.shtml>
- [18] <https://mínima.sitehost.iu.edu/archive/index.html>
- [19] <https://www.wolfram.com/language/fast-introduction-for-math-students/es//>

- [20] Abad Sánchez, Juana María. Superficies mínimas y su aplicación en ingeniería. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial. Universidad Politécnica de Cartagena. Recurso disponible en https://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf <https://repositorio.upct.es/bitstream/handle/10317/10871/tfg-aba-sup.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Descripción de la librería mesh

Esta librería fue desarrollada por Weber. No ha sido usada en su totalidad y puede encontrarse en su archivo de superficies mínimas, [18].

Vamos a describir las funciones utilizadas en la última sección del quinto capítulo,

- `StereographicProjection[z]`, es función devuelve la imagen de z bajo la proyección estereográfica y se define tal que

$$\text{StereographicProjection}[z_]:= \{(2*\text{Re}[z])/(1+\text{Abs}[z]^2), \\ (2*\text{Im}[z])/(1+\text{Abs}[z]^2), 1-2/(1 + \text{Abs}[z]^2)\};$$
- `Domain` es un formato de gráficos bidimensionales para mallas triangulares. Usando esta base se definen dos funciones asociadas,
 - `RectangularDomain[x,y]`; *Domain* unido a *Rectangular* creará un dominio que representa un rectángulo cuadrícula con líneas verticales y horizontales dada por las listas de puntos x e y .

$$\text{RectangularDomain}[x_,y_]:= \text{Domain}@@\text{Outer}[\text{List},x,y];$$
 - `PolarDomain[x,y]`; *Domain* unido a *Polar* creará un dominio usando coordenadas polares, así representa una cuadrícula con radios y ángulos dados por las listas x e y .

$$\text{PolarDomain}[x_,y_]:= \text{Domain}@@\text{Outer}[\#1 \{\text{Cos}[\#2], \text{Sin}[\#2]\} \\ \&, x, y];$$
 - `DomainToGraphics`; *Domain* unido a *ToGraphics* convierte un dominio en gráfico.

$$\text{DomainToGraphics}[v_]:= \\ \text{Graphics}[\text{Join}[\text{Map}[\text{Line},\text{List}@@v], \\ \text{Map}[\text{Line},\text{Transpose}[\text{List}@@v]]]];$$
- `AlmostEqual` devuelve verdadero si los dos argumentos son casi iguales.

$$\text{AlmostEqual}[x_, y_]:= \text{Abs}[x - y] < 0.00001;$$
- `Nrange`,

$$\text{NRange}[a_, b_, n_]:= \\ \text{Range}[\text{N}[a],\text{N}[b],\text{N}[b - a]/\text{N}[n - 1]];$$
- `Plane[n-d]` representa un plano con vector normal (n) y distancia (d) desde el origen.
- `StraightLine[u,v]` representa una línea recta a través de u y v .

- `MeshApply[f,mesh]` evalúa la función compleja que introducimos, f , en una malla bidimensional y devuelve la malla de la imagen. Para poder definirla, es necesario previamente definir dos funciones.

- `reim[z]`; separa un número complejo en su parte real y parte imaginaria.

```
reim[z_] := {Re[z], Im[z]};
```

- `ComplexForm`; junto con la anterior función separarán una función compleja, f , en su parte real e imaginaria.

```
ComplexForm[fn_] [{x_, y_}] := reim[fn[x + I y]];
```

Así la función principal, se define como,

```
MeshApply[fn_, v_] := Domain@Map[ComplexForm[fn],
  List@@v, {2}];
```

- `Mesh3D` gráficos tridimensionales para mallas rectangulares. Unido a otras características nos permite ampliar las funciones.

- `MeshPlot3D[f,m]`, evalúa la función f en los vértices de una malla m y devuelve un objeto `Mesh3D`.

```
MeshPlot3D[{fn_,nn_}, {x_,y_}, v_] := Module[{f1,n1},
  f1 = Function[{x,y},fn];
  n1 = Function[{x,y},nn];
  Mesh3D[{Apply[f1,List@@v,{2}], Apply[n1,List@@v,{2}]]];
```

- `Mesh3DToGraphics3D[m]`, convierte un objeto `Mesh3D` en un gráfico en 3D. Para definirlo es necesario una función que genera un polígono.

```
trp[{{a_, b_}, {c_, d_}}] := Polygon[{c, d, b, a}];
```

Así la función buscada es,

```
Mesh3DToGraphics3D[msh_] :=
  Graphics3D[Flatten[Map[Map[trp,
    Flatten[Map[Partition[#,2,1] &,
      Transpose[Map[Partition[#,2,1] &,
        #[[1]]]]],1]] &, List@msh],1]]
```

- `MeshJoin[mesh1,mesh2]` une dos mallas, uniendo así los puntos por parejas. Para poder definirla, es necesario previamente definir una función asociada y después manipularla.

```
(*MeshJoin[m1_,m2_] := Mesh3D@Join[List@m1,List@m2];*)
```

Así la función principal, se define como,

```
MeshJoin[m1_] := Mesh3D@Join[m1];
```

- `MeshRotate[mesh,borde]` rota una malla alrededor de un borde. Para poder definirla, es necesario previamente definir otras,

- Gira un punto p sobre la línea a través de v_1 y v_2

```
rotate[p_,{v1_,v2_}] := -p+2v1+2(p-v1).(v1-v2)
  / ((v1-v2).(v1-v2))(v1-v2);
```

- Es necesario calcular el diferencial del mapa anterior, para ello,

```
nrotate[p_,{v1_,v2_}] := -p+2p.(v1-v2)
/ ((v1-v2).(v1-v2))(v1-v2);
```

- Rotación inicial,

```
meshrotate0[{v_,n_}, {v1_, v2_}] :=
  {Map[rotate[#, {v1,v2}] &,v,{2}],
  -Map[nrotate[#, {v1,v2}] &,n,{2}]};
```

Uniendo todas la función se define como,

```
MeshRotate[l_, StraightLine[v1_,v2_]] :=
  Mesh3D@@Map[meshrotate0[#, {v1,v2}] &,List@@l];
```

- **MeshRotateZ[mesh,phi,trans]**; realiza un giro de ángulo phi y traslada la superficie a lo largo del eje z. Para poder definirla, es necesario:

```
zrotate0[{x_,y_,z_},phi_,trans_] :=
  {Cos[phi]x + Sin[phi]y,
  -Sin[phi]x + Cos[phi]y,
  z + trans};
zrotate[{v_,n_},phi_,trans_] :=
  {Map[zrotate0[#,phi,trans]&,v,{2}],
  Map[zrotate0[#,phi,0]&,n,{2}]};
```

Así,

```
MeshRotateZ[l_, phi_, trans_] :=
  Mesh3D@@Map[zrotate[#,phi,trans] &, l];
```

- **MeshTranslate[mesh,v]**, define la malla como un vector. Para poder definirla, es necesario previamente definir la inicial,

```
meshtranslate0[{v_, n_}, lm_] := {Map[lm + # &, v, {2}], n};
MeshTranslate[l_, lm_] :=
  Mesh3D@@Map[meshtranslate0[#, lm] &, l];
```