



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

CONSTRUCCIONES Y DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS EN SECUNDARIA. REPLANIFICANDO LA GEOMETRÍA PLANA

Alumno/a: López Díaz, Daniel

Tutor/a: Prof. D. Julio Guerrero García
Dpto: Matemáticas

ÍNDICE

Resumen	3
Abstract	4
1. Introducción	5
2. Objetivos.....	6
3. Fundamentación epistemológica	7
3.1 Fundamentos	7
3.1.1 Puntos y rectas	7
3.1.2 Concepto de igualdad y coincidencia en geometría	8
3.1.3 Segmentos	9
3.1.4 Suma de longitudes	10
3.1.5 Circunferencias	10
3.1.6 Triángulos	14
3.2 Ángulos.....	17
3.2.1 Amplitudes.....	19
3.2.2 Suma de ángulos.....	20
3.2.3 Ángulos adyacentes y opuestos por el vértice	21
3.2.4 Ángulos rectos y rectas perpendiculares	22
3.3 Rectas paralelas.....	24
3.4 Resultados fundamentales.....	27
3.4.1 División de segmentos.....	28
3.5 Medida de segmentos y ángulos	30
3.6 Teorema de Tales y teorema de Pitágoras.	32
3.7 Trigonometría.....	36
3.7.1 Razones trigonométricas	36
4 Fundamentación curricular	39
4.1 Análisis del currículo	39
4.2 Análisis de libros de texto	48
5 Fundamentación didáctica	55
5.1 La desaparición de las demostraciones en la educación secundaria ...	55
5.2 El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele	58
5.3 Marco teórico de la metodología.....	63

5.4	Pruebas y problemas a través de software de geometría dinámica	64
6	Proyección didáctica	66
6.1	Título	66
6.2	Justificación	66
6.3	Contextualización del centro y del aula	67
6.4	Objetivos	67
6.4.1	Objetivos de etapa.....	67
6.4.2	Objetivos de área.....	69
6.4.3	Objetivos de materia	70
6.4.4	Objetivos específicos de la unidad didáctica.....	70
6.5	Competencias clave	71
6.6	Contenidos	73
6.7	Metodología	74
6.8	Actividades y recursos.....	75
6.9	Atención a la diversidad	76
6.10	Evaluación	77
6.11	Temporalización	79
7	Conclusiones.....	87
	Bibliografía.....	89

Resumen

Las demostraciones matemáticas han articulado, desde la aparición de los Elementos de Euclides alrededor del 300 a. C., el conjunto de conocimientos de esta disciplina. Tanto es así, que muchas de las virtudes que se le atribuyen al estudio de las matemáticas se destilan de los rasgos que caracterizan a las propias demostraciones: uso de un lenguaje preciso, sin ambigüedades, aplicación constante del razonamiento hipotético-deductivo, saber redactar un discurso donde las ideas se expongan de manera clara y ordenada, etc.

A pesar de ello, las pruebas matemáticas han sido casi erradicadas del currículo de Educación Secundaria. En los últimos tiempos, se ha dado prioridad a otro tipo de enfoque donde prima el uso de las matemáticas como una herramienta a aplicar en otros contextos y disciplinas.

El objetivo de este Trabajo de Fin de Máster es aprovechar las bondades de las que gozan las demostraciones geométricas (sencillez, belleza, carácter visual, etc.) para tratar de paliar esta situación en cierta medida, contribuyendo así a dar una visión de las matemáticas no sólo como herramienta sino como matriz del pensamiento racional.

PALABRAS CLAVE: Matemáticas, Geometría, Demostraciones, Unidad Didáctica, Educación Secundaria Obligatoria, Trabajo de Fin de Máster

Abstract

Since the appearance of Euclid's Elements around 300 BC, mathematical proofs have articulated the body of knowledge in this discipline. So much so that many of the virtues attributed to the study of mathematics are revealed from the features that characterise the demonstrations themselves: the use of precise, unambiguous language, the constant application of hypothetical-deductive model, how to write a discourse in which ideas are set out in a clear and ordered manner, and so on.

In spite of this, mathematical proofs have been almost eradicated from the Secondary Education curriculum. In recent times, priority has been given to another type of approach where the use of mathematics as a tool to be applied in other contexts and disciplines is given priority.

The aim of this Master's Thesis is to take advantage of the benefits enjoyed by geometric demonstrations (simplicity, beauty, visual character, etc.) to try to alleviate this situation to some extent, thus contributing to give a vision of mathematics not only as a tool but also as a matrix of rational thought.

KEYWORDS: Mathematics, Geometry, Proofs, Didactic Unit, Secondary Education, Master's Thesis

1 Introducción

Este Trabajo de Fin de Máster supone, junto con las prácticas docentes en centros educativos, el culmen del Máster de Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. En el mismo se intenta poner en práctica lo aprendido en las asignaturas correspondientes a los distintos enfoques del proceso educativo: epistemológico, psicológico, sociológico y didáctico.

Para ello, se ha elaborado una unidad didáctica centrada el curso de 3º de ESO y en la materia de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. En este proceso, se ha partido de la idea de recuperar el estudio de ciertas demostraciones matemáticas elementales, prácticamente desaparecidas del currículo, gracias al carácter particular que tienen las pruebas matemáticas en geometría y al inmenso abanico de posibilidades que brindan los programas informáticos de geometría dinámica.

De esta manera, para dar fundamento a tales contenidos y al mencionado enfoque, se ha comenzado con un capítulo dedicado a la fundamentación epistemológica. En dicho capítulo se ha llevado a cabo una exposición detallada de los contenidos, centrándonos en la premisa de partida: las demostraciones geométricas, teniendo especial cuidado con el uso de un lenguaje preciso y abundantes figuras que ilustren los procedimientos de construcción.

A continuación, se ha redactado un capítulo en el que se da base a dos aspectos importantes de cara a la elaboración de la unidad: en primer lugar, se analiza el currículo de Educación Secundaria Obligatoria, más concretamente la parte correspondiente a Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO. Allí se especifican los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que nos guiarán y orientarán en el desarrollo de las sesiones de la unidad didáctica. En segundo lugar, se analizarán un par de libros de texto, centrándonos sobre todo en los temas que cubren los contenidos de nuestra unidad seleccionada. Atendiendo a ciertos criterios de idoneidad, se elige aquel que se adapta mejor a nuestro enfoque didáctico.

Es en el tercer capítulo cuando fundamentamos teóricamente nuestra idea principal: retomar las demostraciones, especialmente en el caso de la geometría, ha sido objeto de estudio para muchos especialistas en didáctica de las matemáticas. Explicamos entonces por qué se piensa que un retorno (aunque sea parcial) al estudio de las demostraciones puede resultar beneficioso para los alumnos, qué se podría hacer para implementar estas ideas, cómo se pueden aprovechar el software de geometría dinámica para ello y por qué este enfoque no es en realidad ajeno a las nuevas corrientes didácticas de aprendizaje activo.

En el último capítulo se expone la unidad didáctica propiamente dicha. Allí se conjugan todos los elementos expuestos en los capítulos anteriores, intentando así ofrecer una propuesta didáctica coherente y factible en base a nuestro enfoque.

Se adjunta en la parte final un anexo en el que se incluye el diseño de un cuaderno de demostraciones y construcciones geométricas guiadas.

2 Objetivos

Los objetivos de este Trabajo de Fin de Máster nacen de la aplicación de los conocimientos y habilidades adquiridos durante el desarrollo de las distintas asignaturas que se han cursado. En concreto, se pueden especificar atendiendo a las distintas fases del proceso de enseñanza y aprendizaje:

- Saber seleccionar adecuadamente los contenidos que se deseen transmitir dentro de un corpus de conocimiento matemático profesional (<<saber sabio>>).
- Poner en práctica el proceso de transposición didáctica, es decir, la transformación del <<saber sabio>> escogido por el profesor en <<saber aprendido>> por el alumno.
- Fundamentar el proceso anterior con una cierta metodología en base a investigaciones científicas reconocidas con resultados válidos.
- Adaptar el proceso de transposición al perfil de un alumnado concreto, situado en un cierto contexto y con ciertas características psicológicas y sociales.
- Saber aprovechar todos los recursos disponibles para implementar la metodología escogida, optimizando así el proceso de transposición didáctica.

3 Fundamentación epistemológica

3.1 Fundamentos

El objetivo que se pretende alcanzar es elaborar una introducción al desarrollo teórico de la geometría plana. Se comienza con la definición de conceptos básicos como punto o recta, enumerando los axiomas que abstraen las propiedades de los mismos y se culmina con el enunciado y demostración de los teoremas de Tales y Pitágoras.

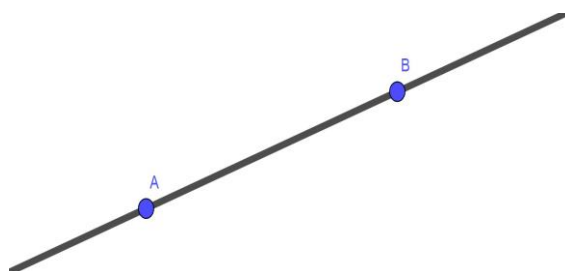
3.1.1 Puntos y rectas

Partiremos de un conjunto no vacío, P , que llamaremos *plano* y a cuyos elementos llamaremos *puntos*. Consideraremos una familia no vacía, R , formada por subconjuntos no vacíos de P que llamaremos *rectas* y que verifican la siguiente propiedad:

Para cada $A, B \in P$, $A \neq B$, existe $r \in R$ única tal que $A, B \in r$.

Con el objetivo de facilitar la lectura de la exposición introduciremos el siguiente convenio: diremos que una recta r pasa por un punto A si $A \in r$. De esta manera, la propiedad anterior puede enunciarse de modo más natural como sigue:¹

Por cada par de puntos distintos del plano pasa una única recta.



Esta última afirmación es la que Euclides eligió como el primero de sus postulados a la hora de axiomatizar la geometría plana en su obra Elementos, hacia el 300 a. C.

De la misma se destila la idoneidad de la notación AB cuando queramos referirnos a una recta r que pase por los puntos A y B , pues r es la única recta que pasa por dichos puntos.

Como podemos ver en la imagen anterior, toda recta divide al plano en dos subconjuntos que llamaremos *semiplanos*. Convendremos en que la recta que determina los semiplanos pertenece a los mismos. Elegido uno de los dos semiplanos, al restante lo llamaremos *semiplano opuesto*. A la recta que determina ambos semiplanos la llamaremos *frontera*. De esta manera, dos semiplanos se intersecan en su frontera.

¹ Todas las figuras que aparecen en este Trabajo de Fin de Grado han sido generadas con el programa informático de geometría dinámica <<GeoGebra>> y son de elaboración propia.

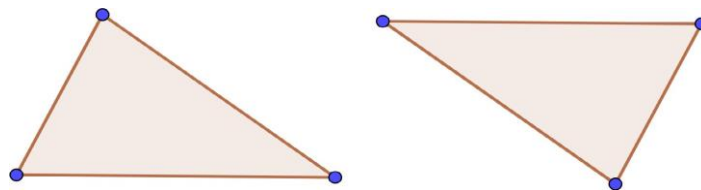
Análogamente, todo punto de una recta divide a la misma en dos subconjuntos que llamaremos *semirrectas*. Como en el caso de los semiplanos, elegida una de las semirrectas, a la restante la llamaremos *semirrecta opuesta*. Al punto que determina ambas semirrectas lo llamaremos *origen*. Al igual que antes, dos semirrectas opuestas se intersecan en su origen.

Dada una recta y un punto A sobre ella, es claro que si B es otro punto distinto sobre la misma recta, entonces B está en una y solo una de las semirrectas determinadas por A . Parece adecuado entonces nombrar por $\overrightarrow{AB}$ a la única semirrecta con origen en A que pasa por B .

Si consideramos ahora subconjuntos de recta determinados por dos puntos sobre ella en lugar de uno, obtendremos lo que llamamos *segmentos*: dados puntos distintos A y B sobre una recta, llamaremos *segmento de extremos A y B* al subconjunto de puntos de la recta situados entre A y B , incluyendo los extremos. Al igual que ocurre en los casos anteriores, es claro que un segmento queda determinado por sus extremos, de manera que usaremos la notación $\overline{AB}$ para referirnos al segmento que tiene por extremos A y B .

3.1.2 Concepto de igualdad y coincidencia en geometría

Observemos las siguientes figuras:



Parece natural asumir que ambos triángulos son <<iguales>>, en el sentido de que si se toma uno de ellos y se gira y traslada convenientemente, encaja exactamente en el otro.

Conviene matizar esta expresión, pues en el lenguaje de la teoría de conjuntos se dice de dos conjuntos que son <<iguales>> si uno está contenido en el otro y viceversa, es decir, cuando son idénticos.

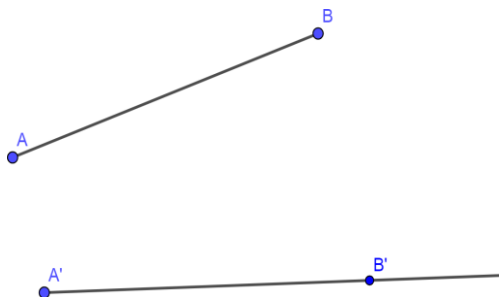
En este sentido, los triángulos anteriores no serían <<iguales>>. En términos modernos, lo que se suele decir para evitar confusión es que ambos son <<congruentes>>.

Sin embargo, en términos geométricos (especialmente de geometría sintética) se sigue reservando el vocablo <<igual>> para indicar la congruencia de ambas figuras. Cuando se quiere hablar de dos figuras idénticas se dice que son *coincidentes*.

3.1.3 Segmentos

El siguiente resultado alude a un problema de los llamados <<de regla y compás>> para copiar un segmento dado:

Teorema 1. Sean $\overline{AB}$ un segmento y $\overrightarrow{A'P}$ una semirrecta. Existe un único segmento $\overline{A'B'}$ igual a $\overline{AB}$ tal que B' está sobre $\overrightarrow{A'P}$.



Para la construcción del segmento $\overline{A'B'}$ basta con pinchar las puntas de un compás en los puntos A y B y trasladar dicha apertura pinchando en A' para, a continuación, determinar el punto B' sobre $\overrightarrow{A'P}$. El método de construcción determina claramente la unicidad del nuevo segmento.

Nótese que este resultado permite comparar segmentos: sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos. Elijamos una semirrecta. Sobre ella, transportamos los segmentos fijando un extremo de ambos en el origen de la semirrecta. Se tendrá que $\overline{AB}$ es igual a $\overline{CD}$ si, y solo si, los segmentos transportados son coincidentes.

Cuando no nos refiramos a los segmentos por su posición en el plano, diremos de ellos que son *longitudes*. De esta manera, se dirá que dos segmentos *tienen la misma longitud* si son iguales.

Retomando la comparación de segmentos a la que hemos aludido antes, si dos segmentos están sobre una misma semirrecta y comparten como extremo el origen de la semirrecta, entonces tienen la misma longitud si, y solo si, son coincidentes.

Además, si dos segmentos están sobre una misma semirrecta y comparten como extremo el origen de la misma, es claro que uno de ellos debe estar contenido en el otro. Este hecho nos lleva a decir que una longitud α es *menor* que otra longitud β , y lo denotaremos por $\alpha \leq \beta$, si sus segmentos asociados sobre una misma semirrecta, de cuyo origen comparten un extremo, verifican que el segmento asociado a la longitud α está contenido (considerando la inclusión no estricta) en el segmento asociado a la longitud β .

Es claro que esta comparación de longitudes no depende del representante (segmento) elegido. Se puede comprobar que $\leq$ definida sobre el conjunto de longitudes es, de hecho, una relación de orden.

Esta comparación de longitudes la trasladaremos de manera natural a la comparación de segmentos, de manera que si tenemos los segmentos de la siguiente figura diremos que $\overline{AB} \leq \overline{AC}$:



3.1.4 Suma de longitudes

Consideremos dos longitudes α y β . Tomemos sendos segmentos que representen a α y β . Es claro que dichos segmentos pueden tomarse sobre una misma recta y con un extremo común en dicha recta, de manera que cada uno de ellos se encuentre en una semirrecta distinta respecto del punto en común. La longitud del segmento que determinan los extremos no comunes es llamada la *suma* de α y β y la representamos por $\alpha + \beta$.



Es claro que la suma de longitudes no depende de los representantes elegidos y, por tanto, define una operación binaria sobre el conjunto de longitudes. En particular, es claro que la suma de longitudes verifica las propiedades conmutativa y asociada.

Por motivos operativos convendremos en definir la *longitud nula* 0 como aquella que tiene por representantes a los puntos del plano. Se cumple que, para cada longitud α ,

$$0 \leq \alpha, \quad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

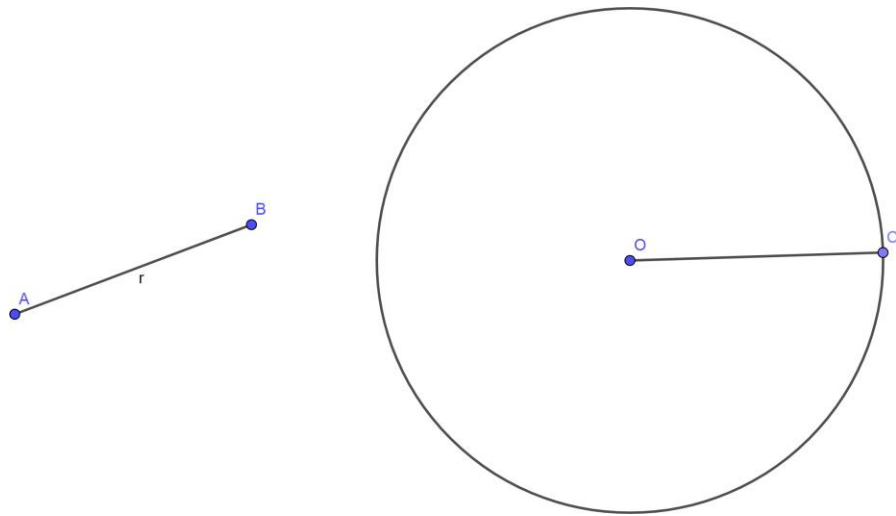
Por otro lado, dadas dos longitudes α y β , definimos su resta del modo siguiente: consideramos segmentos representantes de α y β y los situamos en una misma recta de manera que compartan un extremo y estén situados sobre la misma semirrecta respecto de dicho punto común. Se define la *resta* de α y β como la longitud del segmento determinado por los extremos no comunes de ambos segmentos. Si $\alpha \leq \beta$, representaremos su resta como $\beta - \alpha$.



3.1.5 Circunferencias

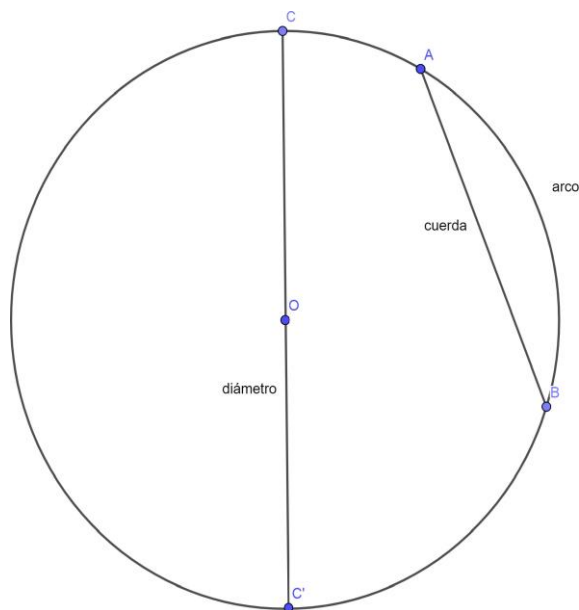
Sea O un punto del plano y sea $\overline{AB}$ un segmento. Es posible entonces pinchar las puntas de un compás sobre los extremos A y B para, a continuación, transportar la longitud obtenida pinchando una de las puntas sobre el punto O . Si ahora giramos el compás, la otra punta describe los extremos de todos los segmentos posibles con

extremo en O y longitud la de $\overline{AB}$. Llamando r a la longitud de $\overline{AB}$, la figura geométrica obtenida es lo que llamamos *circunferencia de centro O y radio r* .



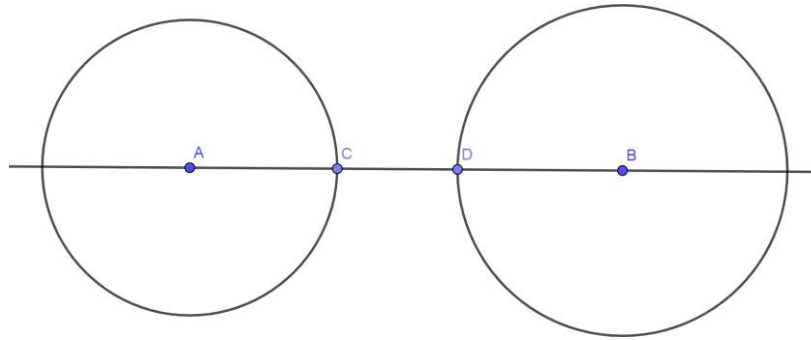
Toda circunferencia divide al plano en dos regiones. La región que contiene al punto O es llamada *círculo* y de sus puntos se dice que son *interiores* a la circunferencia. De los puntos restantes se dice que son *exteriores* a la circunferencia.

Dados dos puntos A y B sobre la circunferencia dividen a la misma en dos partes que llamamos *arcos*. El segmento $\overline{AB}$ que vemos a continuación es llamado *cuerda*. Cuando una cuerda pasa por el centro de la circunferencia se dice de ella que es un *diámetro* de la circunferencia y de sus puntos extremos que son *diametralmente opuestos*.



A continuación, estudiaremos la intersección de circunferencias. Sean A y B puntos del plano. Sean C y D puntos en la semirrecta $\overrightarrow{AB}$. Consideremos sendas

circunferencias de centros A y B , con radios $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, respectivamente. Veamos que las circunferencias determinadas no tienen por qué tener ningún punto en común:



Esta situación se mantendrá siempre y cuando los puntos elegidos C y D cumplan que

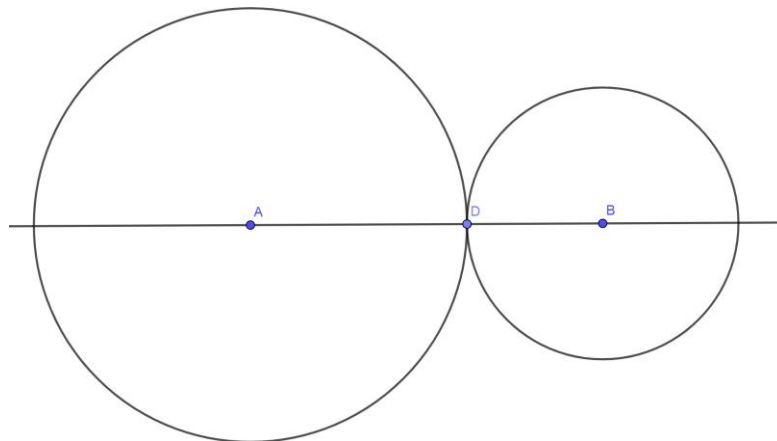
$$\overline{AC} + \overline{DB} < \overline{AB}.$$

Equivalentemente, si llamamos r_1 al radio de la circunferencia de centro A y r_2 al radio de la circunferencia de centro B ,

$$r_1 + r_2 < \overline{AB}.$$

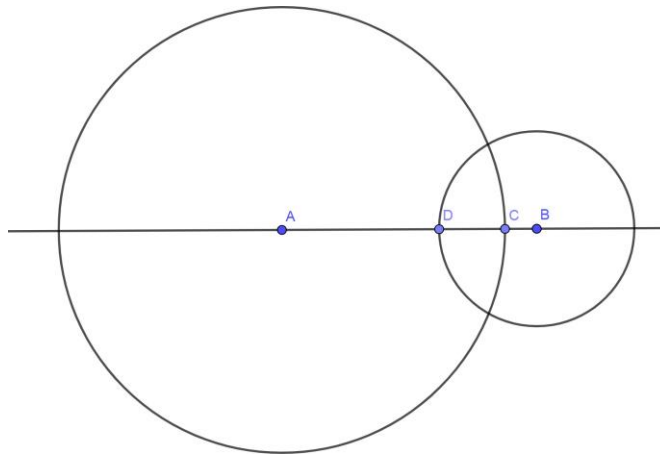
Por otro lado, podemos desplazar el punto C sobre la recta AB , de manera que acabe coincidiendo con D , es decir,

$$r_1 + r_2 = \overline{AB}.$$



En este caso, diremos de las circunferencias que son *tangentes exteriores*. Del único punto en común entre ambas diremos que es el *punto de tangencia*.

Si seguimos desplazando el punto C sobre AB , es decir, aumentando el valor de r_1 , obtenemos la siguiente situación:

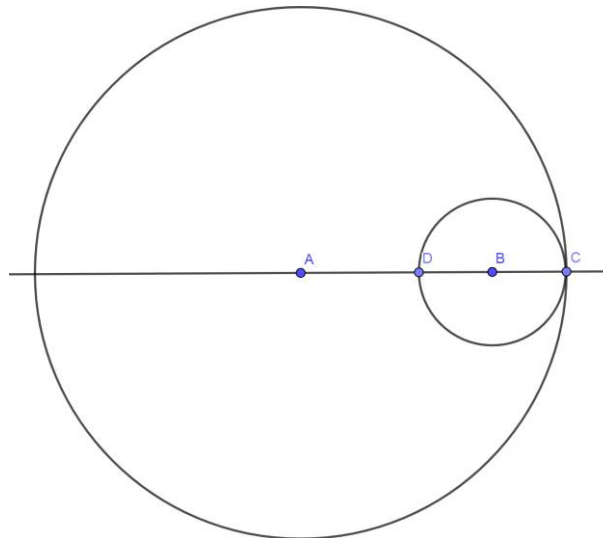


Es decir, cuando se verifica que

$$r_1 + r_2 > \overline{AB}.$$

Se tiene entonces que las circunferencias pasan de tener uno a dos puntos en común. Diremos entonces de ellas que son *secantes*.

Si seguimos trasladando C , obtenemos el caso siguiente:



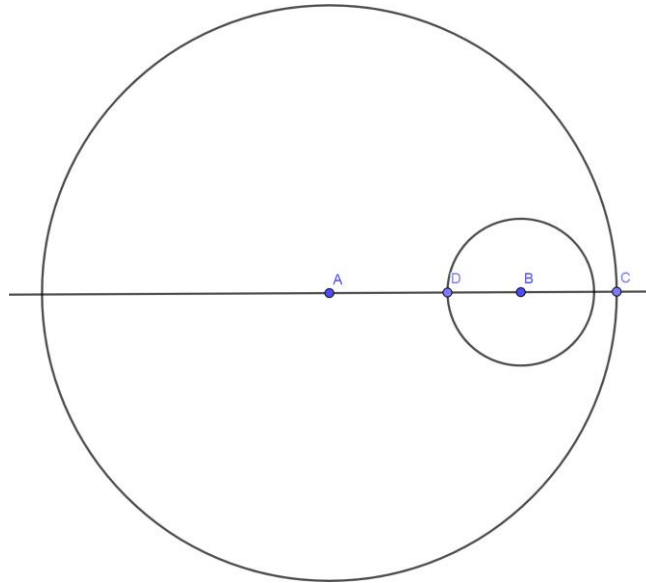
Es decir, cuando los puntos C y D resultan ser diametralmente opuestos en la circunferencia de radio r_2 sobre la recta AB . Equivalentemente, esto sucede cuando

$$r_1 - r_2 = \overline{AB}.$$

De nuevo, vuelve a haber un único punto de tangencia y el círculo asociado a la circunferencia de radio r_2 está contenido en el asociado a la circunferencia de radio r_1 . En dicho caso, de las circunferencias se dice que son *tangentes interiores*.

Nótese que si seguimos desplazando el punto C , las circunferencias dejan de tener puntos en común y diremos de ellas entonces que son *disjuntas*. Esta situación se correspondería con el caso en el que

$$r_1 - r_2 > \overline{AB}.$$



Uniendo todos estos resultados podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2. Sean A y B puntos del plano y sean r_1 y r_2 longitudes tales que $r_2 \leq r_1$. Consideremos las circunferencias de centro A y radio r_1 y de centro B y radio r_2 . Se tiene entonces que las circunferencias son:

a) *Tangentes*, si se verifica que

$$r_1 + r_2 = \overline{AB}, \text{ o bien } r_1 - r_2 = \overline{AB}.$$

b) *Secantes*, si se verifica que

$$r_1 - r_2 < \overline{AB} < r_1 + r_2.$$

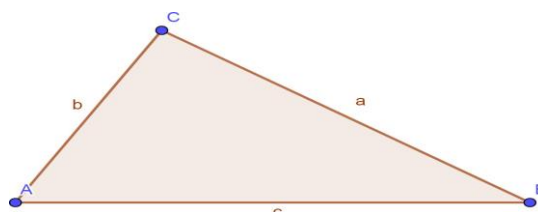
c) *Disjuntas*, si se verifica que

$$r_1 + r_2 < \overline{AB}, \text{ o bien } r_1 - r_2 > \overline{AB}.$$

3.1.6 Triángulos

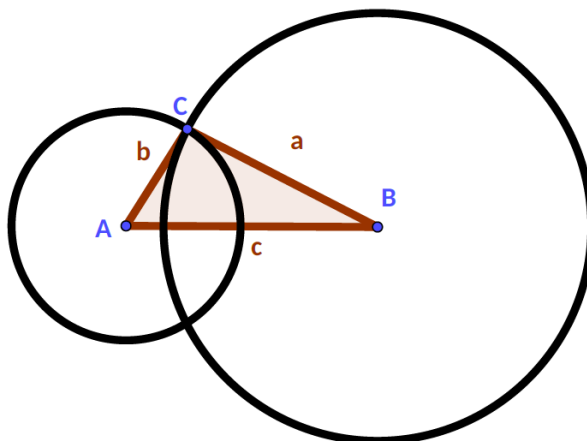
Dados tres o más puntos, diremos de ellos que están *alineados* si están situados sobre la misma recta. Nótese que dos puntos siempre cumplen esta condición.

Sean A , B y C tres puntos no alineados. De la unión de los segmentos que los unen diremos que es un *triángulo* y lo representaremos por $\triangle ABC$.



De los puntos A, B y C diremos que son los *vértices* de $\triangle ABC$ y de los segmentos $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ y $c = \overline{AB}$ diremos que son los *lados* del triángulo. Es usual nombrar estos lados siguiendo el criterio que acabamos de usar, esto es, usando la misma letra en minúscula que su vértice opuesto.

Nótese que, dado un triángulo $\triangle ABC$, la circunferencia de centro A y radio b corta a la circunferencia de centro B y radio a en el punto C .



Obsérvese además que ambas circunferencias no pueden ser tangentes, pues en dicho caso el punto de tangencia, que es C , estaría en la recta AB , lo que va en contra de la hipótesis de que los tres puntos no estén alineados.

Aplicando ahora el teorema 2, deducimos entonces que

$$|a - b| < c < a + b.$$

Todo esto nos lleva al siguiente resultado:

Teorema 3. *Todo lado de un triángulo es siempre menor que la suma de los dos lados restantes y mayor que el valor absoluto de su diferencia.*

Este teorema admite la implicación recíproca: dados tres segmentos cumpliendo dichas condiciones de longitud, siempre constituyen los lados de un triángulo. Veamos cómo podemos construirlo:

Sean a, b y c tres longitudes verificando que

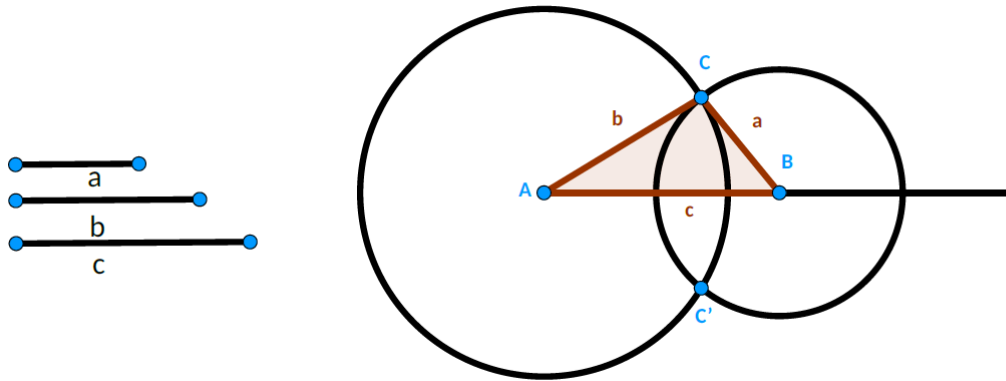
$$|a - b| < c < a + b.$$

Consideremos ahora una semirrecta cualquiera. Sea A el punto de origen de la semirrecta.

Transportamos ahora el segmento de longitud c sobre la semirrecta, haciendo coincidir un extremo del segmento con A . Se determina así un segmento $\overline{AB}$ sobre la semirrecta.

A continuación, trazamos las circunferencias de centro B y radio a y de centro A y radio b . Dichas circunferencias se cortarán en dos puntos situados en semiplanos opuestos respecto de la prolongación de la semirrecta.

Llamemos C a cualquiera de los dos puntos de corte. Podemos transformar ahora el triángulo ΔABC como resultado de trazar los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ y considerar la unión de estos dos segmentos con el segmento $\overline{AB}$.



Cabe destacar que la construcción anterior siempre es posible, ya que en virtud del teorema 2, las dos circunferencias construidas siempre serán secantes y, por tanto, los puntos C y C' siempre existirán.

Esta construcción nos permite enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4. Sea ΔABC un triángulo y sea $\overline{A'B'}$ un segmento. Si $\overline{A'B'}$ es igual a $\overline{AB}$, entonces existe un único triángulo $\Delta A'B'C'$ verificando

- $a' = a, b' = b, c' = c$.
- El vértice C' se encuentra en uno de los semiplanos respecto de la recta $A'B'$.

Como consecuencia de este teorema, tenemos el siguiente resultado, conocido como *criterio lado-lado-lado*:

Teorema 5. Si dos triángulos tienen sus tres lados iguales dos a dos, entonces son iguales.

Demostración:

Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\overline{AB}$ es igual a $\overline{A'B'}$, que $\overline{BC}$ es igual a $\overline{B'C'}$ y que $\overline{CA}$ es igual a $\overline{C'A'}$.

En estas condiciones, es claro que podemos transportar el triángulo $\Delta A'B'C'$ sobre ΔABC , de manera que el segmento $\overline{AB}$ coincida con $\overline{A'B'}$ (coincidiendo el punto A con A' y el punto B con B').

Podemos distinguir ahora dos casos. Si C y C' están en el mismo semiplano respecto de AB , entonces basta aplicar el teorema 4 para concluir.

Si C y C' están cada uno en un semiplano distinto, entonces basta aplicar una simetría especular respecto de AB para estar en el caso anterior.

■

Por último, podemos reunir ambas implicaciones en un único resultado:

Teorema 6. *Las longitudes a, b y c se corresponden con los lados de un triángulo si, y solo si, verifican*

$$|a - b| < c < a + b.$$

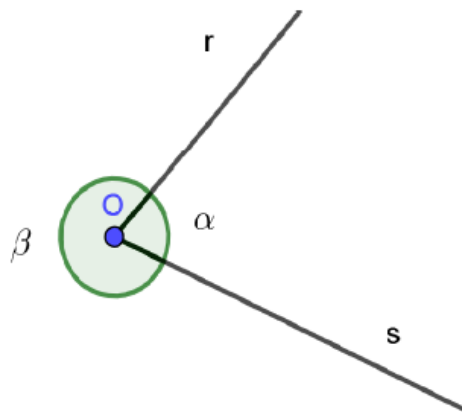
Además, en tal caso el triángulo es único.

Por último, daremos una clasificación de los triángulos en función de sus lados. De un triángulo diremos que es

- *Equilátero*, si sus tres lados son iguales.
- *Isósceles*, si dos de sus lados son iguales.
- *Escaleno*, si ninguno de sus lados es igual.

3.2 Ángulos

Sean r y s semirrectas con origen común O . Dichas semirrectas dividen al plano en dos regiones, a las cuales llamaremos *ángulos* (de vértice O y lados r y s).



El ángulo α resulta de la intersección de dos semiplanos: el semiplano respecto a la prolongación de s que contiene a r y el semiplano respecto a la prolongación de r que contiene a s . A los ángulos obtenidos mediante una intersección de semiplanos los llamaremos *convexos*.

El ángulo β resulta de considerar los puntos que están en los semiplanos opuestos a los descritos, es decir, es la unión de dos semiplanos. A los ángulos que resulten de la unión de dos semiplanos los llamaremos *cóncavos*.

Tenemos, pues, que un par de semirrectas de origen común y no contenidas en la misma recta siempre determinan dos ángulos en el plano: uno convexo y el otro cóncavo. De dichos ángulos diremos que son *opuestos*.

Si las dos semirrectas de origen común están situadas sobre la misma recta podemos distinguir dos casos:

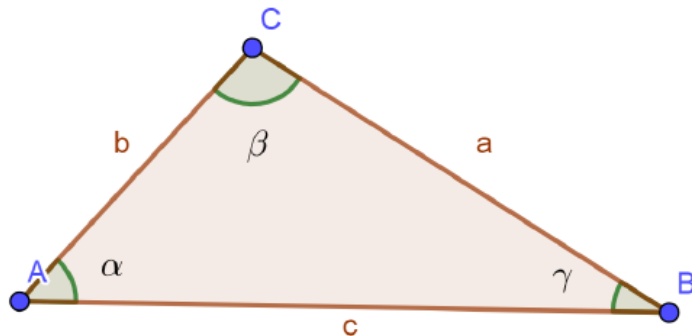
Si ambas semirrectas son la misma (coincidentes), entonces diremos que el ángulo convexo que forman es el *ángulo nulo*, formado únicamente por los puntos de la semirrecta en cuestión. Del ángulo cóncavo diremos que es el *ángulo completo*, constituido por la totalidad de puntos del plano.

Si ambas semirrectas son opuestas respecto a su origen, entonces determinan dos ángulos convexos: los dos semiplanos que define sobre el plano la recta a la que pertenecen las semirrectas. De dichos ángulos diremos que son *ángulos llanos*.

En general, convenimos en llamar ángulo determinado por dos semirrectas al ángulo convexo, salvo que se diga lo contrario. Nótese que este ángulo está unívocamente determinado salvo si las semirrectas son opuestas respecto a su origen. Esto nos lleva a usar la siguiente notación: dados A, B y C puntos del plano no alineados, denotaremos por $\angle ABC$ al ángulo convexo determinado por las semirrectas $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

Consideremos ahora un triángulo $\triangle ABC$. Los tres lados (sus prolongaciones, de hecho) de dicho triángulo determinan por parejas tres ángulos, los cuales nombraremos usualmente como sigue:

$$\alpha = \angle BAC, \quad \beta = \angle ABC, \quad \gamma = \angle ACB.$$



Una vez introducido el concepto de ángulo, podemos inferir una consecuencia del criterio lado-lado-lado:

Teorema 7. *Si dos triángulos tienen sus lados iguales dos a dos, entonces tienen sus ángulos iguales dos a dos.*

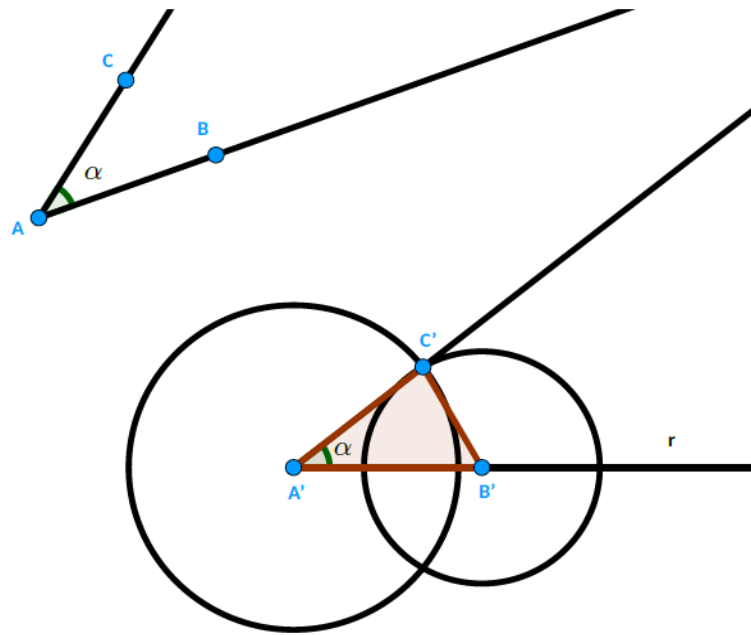
Este último resultado proporciona un método para transportar ángulos. Veámoslo. Sea α un ángulo convexo y sea r una semirrecta. El objetivo es construir un ángulo que sea igual a α y que tenga a r por uno de sus lados.

Sea A el vértice de α . Sean B y C puntos situados sobre sus respectivos lados. Sea A' el punto de origen de la semirrecta r . Sea B' el único punto de la semirrecta que verifica que

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}.$$

A continuación, trazamos la circunferencia de centro B' y radio $B'C$ y la circunferencia de centro A' y radio $\overline{AC}$. Estas dos circunferencias se cortarán en dos puntos situados en semiplanos opuestos respecto de la recta r . Sea C' uno de ellos.

Construimos ahora la semirrecta $\overrightarrow{A'C'}$. El ángulo $\alpha' = \angle B'A'C'$ es el que buscamos ya que, al ser los lados de los triángulos iguales, se tiene que $\alpha' = \alpha$.



Este método nos lleva a enunciar el siguiente teorema:

Teorema 8. *Sea α un ángulo y sea r una semirrecta. Si α es un ángulo convexo, entonces existe un único ángulo, α' , tal que*

- $\alpha' = \alpha$.
- r es uno de los lados de α' .
- α' está contenido en uno de los semiplanos que determina a r .

3.2.1 Amplitudes

Al igual que sucede con los segmentos y las longitudes, también podemos abstraer el concepto de ángulo, de manera que cuando no nos referimos a ellos por su posición en el plano los llamaremos *amplitudes*. Así, dos ángulos representarán la misma amplitud si, y solo si, dichos ángulos son iguales.

La amplitud de los ángulos nulos será 0 y a la amplitud de los ángulos llanos la llamaremos π .

Al igual que con las longitudes, podemos comparar ángulos: sean α y β amplitudes. Sea r una semirrecta. Sabemos que la prolongación de r determina dos semiplanos.

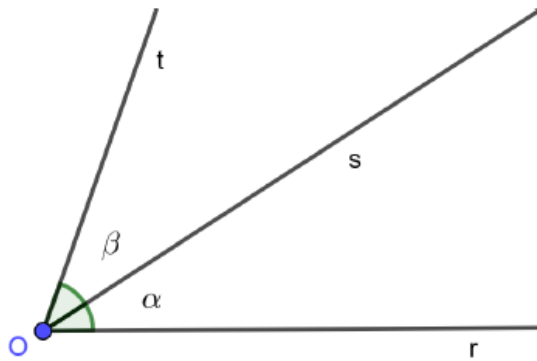
Sea S uno de dichos semiplanos. Consideremos, para α y β , el correspondiente representante que tiene uno de sus lados sobre r y está contenido en S (si es convexo) o contiene a S (si es cóncavo). Diremos que β es *mayor* que α , y lo denotaremos por $\alpha \leq \beta$, si se verifica que el representante de α está contenido en β .

En caso de no coincidir, escribiremos $\alpha < \beta$.

Tenemos, pues, una relación de orden sobre el conjunto de las amplitudes.

3.2.2 Suma de ángulos

Es posible definir una suma de ángulos (amplitudes) como lo hacíamos en el caso de los segmentos: dados dos ángulos α y β , se construye un ángulo de amplitud β que comparta un lado con un ángulo de amplitud α , pero de manera que α esté contenido en el ángulo opuesto a β . Se define la *suma* de α y β , y se denota por $\alpha + \beta$, como la amplitud del ángulo que resulta de la unión de los dos anteriores.



Aparece en este caso, sin embargo, una limitación: si queremos sumar dos amplitudes α y β ha de verificarse que una de ellas sea menor o igual que la opuesta de la otra. Esto ha de ser así, pues en caso contrario β no cabría en el ángulo opuesto a α , con lo que α y β tendrían intersección no vacía.

De nuevo, al igual que con las longitudes, la suma de amplitudes no depende de los representantes elegidos y, por tanto, es una operación binaria sobre el conjunto de las amplitudes. Se tiene también que la suma verifica las propiedades conmutativa y asociativa.

Cabe indicar también que, para cada amplitud α se tiene que

$$0 \leq \alpha, \quad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

Por último, mencionaremos que, al ser el ángulo llano π un semiplano y el ángulo completo la unión de dos de estos, podemos designar el ángulo completo como 2π .

Para dos amplitudes α y β , con $\alpha < \beta$, definimos la resta $\alpha - \beta$ como sigue: consideramos como representantes de α y de β ángulos con un lado común y tales que el representante de β esté contenido en el de α . De esta manera, ha de verificarse que

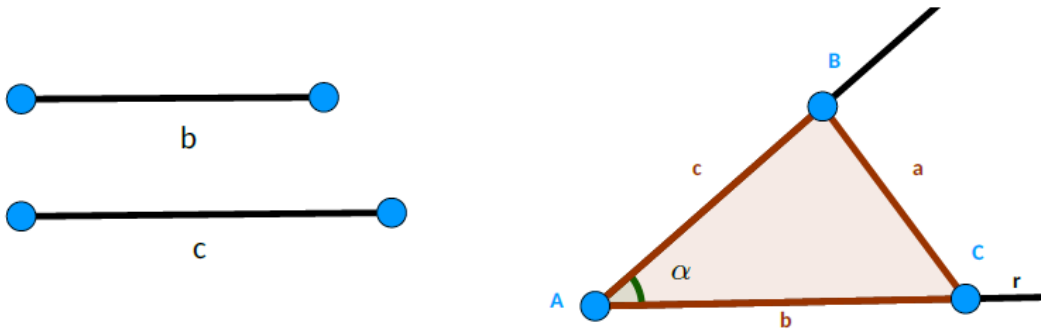
$$\beta + (\beta - \alpha) = \beta.$$

Veamos ahora que, dadas dos longitudes y una amplitud, siempre es posible construir un triángulo con dos de sus lados con las longitudes dadas y uno de sus ángulos con la amplitud dada:

Concretamente, queremos construir un triángulo ΔABC a partir de la longitud de un lado $b = \overline{AC}$ y $c = \overline{AB}$ y de la amplitud del ángulo $\alpha = \angle BAC$.

Marcamos en uno de los lados del ángulo $\angle BAC$ en el punto C , que es el único punto que verifica que $\overline{AC} = b$.

En el lado restante marcamos el único punto B que verifica que $\overline{AB} = c$.

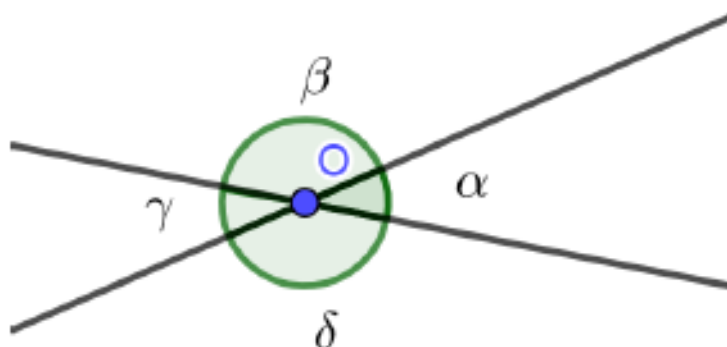


Este método de construcción de triángulos nos lleva directamente a un nuevo resultado de igualdad: el criterio lado-ángulo-lado.

Teorema 9. Si dos triángulos verifican que dos de sus lados son iguales dos a dos y el ángulo determinado por dichos lados también lo es, entonces ambos triángulos son iguales.

3.2.3 Ángulos adyacentes y opuestos por el vértice

Sean r y s dos rectas que se cortan. Sea O el punto de corte entre ellas. Tenemos entonces que r y s definen cuatro ángulos en el plano, los cuales son convexos.



De dos ángulos convexos diremos que son *adyacentes* si tienen un lado en común y sus lados restantes son semirrectas opuestas por el vértice O . Por ejemplo, α y β son ángulos adyacentes.

De dos ángulos convexos diremos que son *opuestos por el vértice* si comparten vértice y sus lados son semirrectas opuestas a los lados del otro. Por ejemplo, γ y α son opuestos por el vértice en la figura anterior.

También en la figura anterior podemos observar que un ángulo convexo tendrá, en general, dos ángulos adyacentes y un ángulo opuesto por el vértice.

Por otro lado, también es claro que la suma de dos ángulos adyacentes será siempre igual a un ángulo llano y, de aquí, que dos ángulos que sean adyacentes a un mismo ángulo serán iguales. Esto nos lleva a enunciar el siguiente resultado:

Teorema 10. *Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son iguales.*

La propiedad de los ángulos adyacentes de sumar un ángulo llano es digna de ser destacada atribuyéndole un nombre propio: de dos ángulos que sumen un ángulo llano diremos que son *suplementarios*.

3.2.4 Ángulos rectos y rectas perpendiculares

De un ángulo α diremos que es *recto* si es igual a su suplementario. Como $\alpha + \alpha = \pi$, podemos afirmar que la amplitud del ángulo recto es $\pi/2$.

De los ángulos que sean menores a un ángulo recto se dirá que son *agudos* y de los que son mayores se dirá que son *obtusos*.

De dos rectas perpendiculares que se cortan y determinan un ángulo recto en el plano se dice que son *perpendiculares*. Nótese que si esto ocurre entonces los cuatro ángulos que se determinan son rectos.

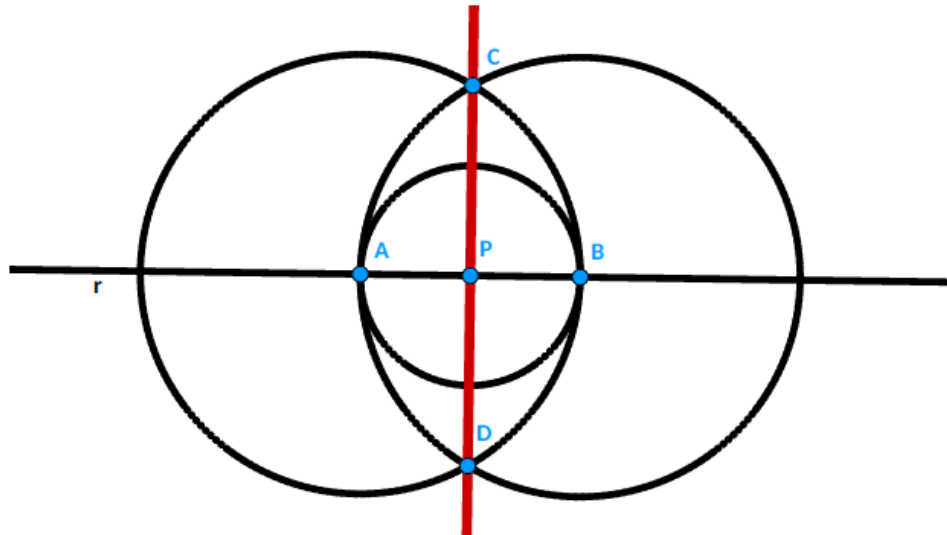
Veamos que, dada una recta, siempre es posible construir una recta perpendicular que pase por uno de sus puntos.

Sea r una recta y sea P un punto sobre ella. Construimos una circunferencia de centro P y radio arbitrario. Sean A y B los puntos de corte de la circunferencia con la recta r .

A continuación, construimos la circunferencia de centro A y radio $\overline{AB}$ y la circunferencia de centro B y radio $\overline{AB}$. En virtud del teorema 2, sabemos que se cortarán en dos puntos. Sean C y D dichos puntos de corte. Se tiene que

$$\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC}.$$

De esta manera, la recta CP es la perpendicular que buscamos, pues los triángulos $\triangle PAC$ y $\triangle PBC$ verifican que existe una correspondencia entre sus lados, de modo que cada pareja de lados es igual (criterio lado-lado-lado). Por tanto, los ángulos suplementarios $\angle APC$ y $\angle BPC$ son iguales y, en consecuencia, rectos.

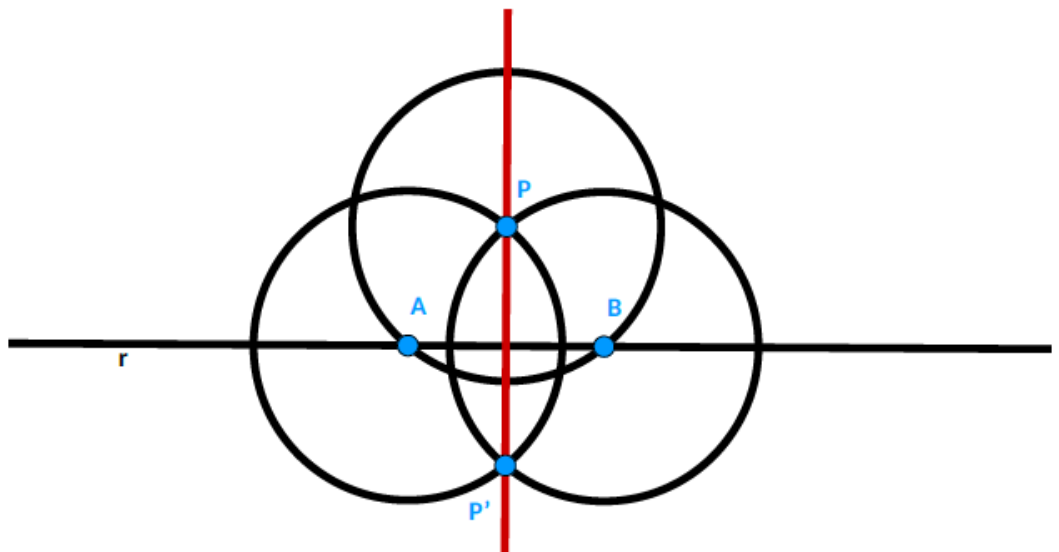


Veamos ahora una variante de la construcción anterior: dada una recta r , calcular una perpendicular a la misma que pase por un punto P exterior a la recta.

Construimos una circunferencia de centro P y radio lo suficientemente grande como para cortar a r . Si la circunferencia fuese tangente a la recta, entonces la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto de tangencia será la perpendicular. Veamos ahora qué ocurre si la circunferencia corta a r en dos puntos distintos.

Construimos la circunferencia de centro A y radio $\overline{AP}$ y la circunferencia de centro B y radio $\overline{BP}$. Como P es un punto exterior a la recta, ambas circunferencias no pueden ser tangentes, sino que serán secantes. Uno de los puntos de corte será P . Sea P' el restante.

La recta perpendicular que buscamos será PP' .



Los métodos de construcción anteriores nos permiten enunciar el siguiente teorema:

Teorema 11. *Por cada punto y cada recta existe una única perpendicular a ella que pasa por dicho punto.*

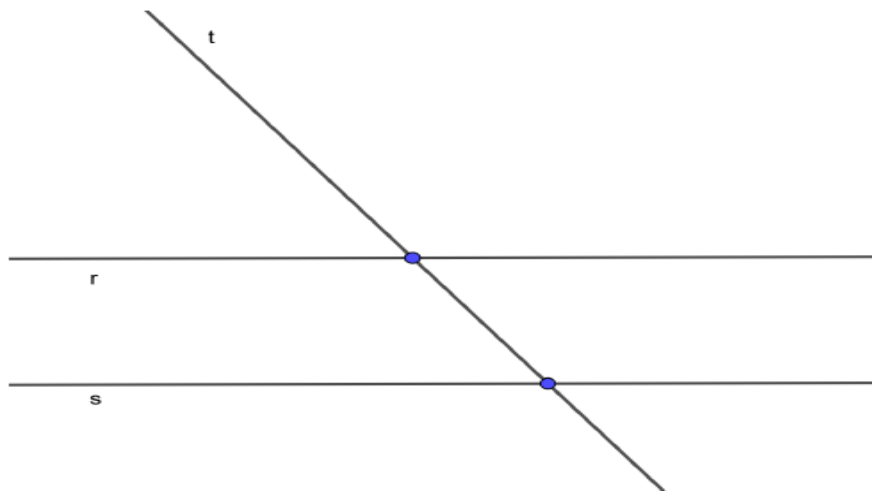
La unicidad se deduce del propio método de construcción.

Dado un segmento $\overline{AB}$, a la recta perpendicular que pasa por su punto medio la llamaremos *mediatriz* de $\overline{AB}$.

El método de construcción de la perpendicular que pasa por un punto de la recta en cuestión nos ofrece un método claro para calcular la mediatriz de un segmento.

3.3 Rectas paralelas

Como por dos puntos distintos del plano pasa una única recta, dos rectas sólo pueden tener a lo sumo un único punto en común. Diremos entonces que las dos rectas son *secantes*. En caso de que no tengan ningún punto en común, se dirá de ellas que son *paralelas*.



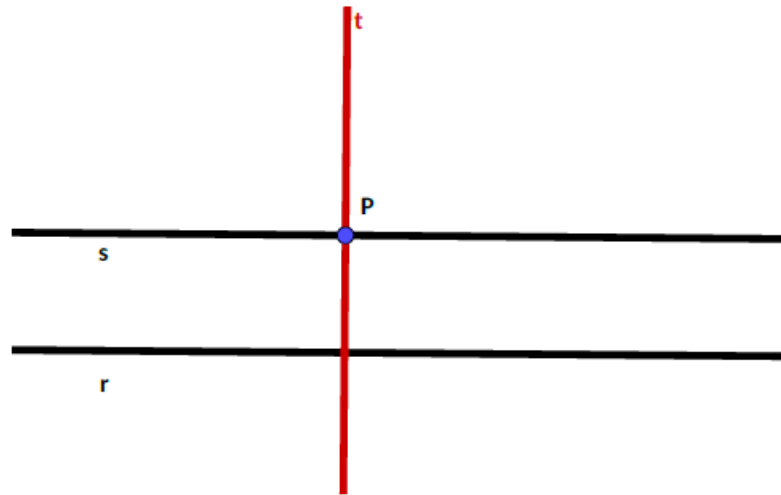
Por ejemplo, las rectas r y s son paralelas y la recta t es secante a r y a s .

El paralelismo de rectas verifica la propiedad transitiva: si una recta r es paralela a una recta s y esta lo es a una recta t , entonces r y t son paralelas.

Otra característica fundamental de las paralelas es que, si dos rectas tienen una perpendicular común, entonces ambas son paralelas.

Veamos ahora un método de construcción de recta paralela a una recta dada que pase por un punto exterior a la misma.

Sea r una recta y sea P un punto exterior a r . Construimos la perpendicular a r que pase por P . Sea s dicha perpendicular. Construimos la perpendicular a s que pase por P . Sea t dicha perpendicular. La recta t es, precisamente, la que buscamos.



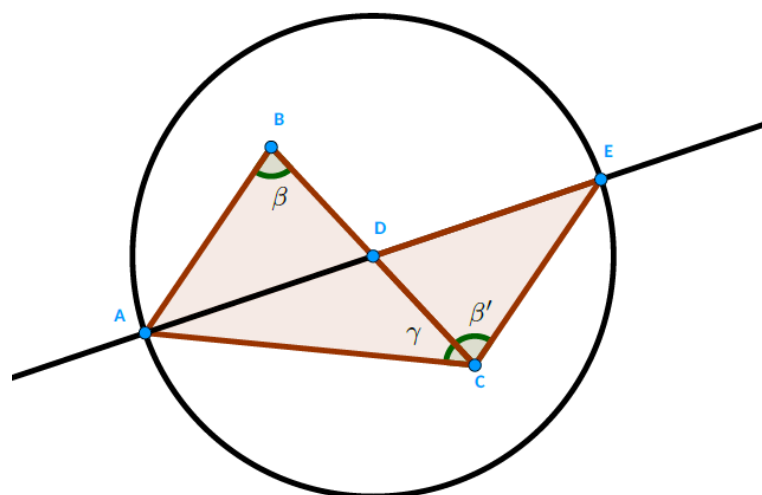
Esta construcción nos induce a enunciar el siguiente teorema:

Teorema 12. *Cualquiera de los ángulos de un triángulo es menor que el suplementario de cualquiera de los otros dos ángulos.*

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Veamos, sin pérdida de generalidad, que $\beta = \angle ABC$ es menor que el suplementario de $\gamma = \angle ACB$.

Sea D el punto medio del lado $\overline{BC}$. Tomemos la recta AD y construyamos la circunferencia de centro D y radio $\overline{AD}$. Dicha circunferencia cortará a AD en un punto. Sea E dicho punto de corte.



Tenemos entonces que $\overline{AD} = \overline{DE}$ y $\overline{BD} = \overline{DC}$. Por otro lado, los ángulos $\angle ADB$ y $\angle EDC$ son opuestos por el vértice, con lo que, aplicando el criterio lado-lado-lado, deducimos que los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle EDC$ son iguales.

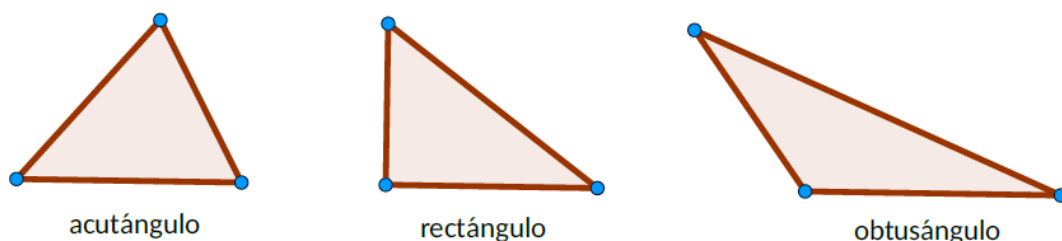
Concretamente, el ángulo $\beta = \angle ABD$ es igual al ángulo $\beta' = \angle ECD$, el cual está estrictamente contenido en el ángulo adyacente a γ , es decir, en su suplementario. Por tanto, β es menor que el suplementario de γ .

■

Como aplicación del teorema anterior podemos deducir que un triángulo tiene, al menos, dos ángulos agudos: si uno de sus ángulos es recto, los otros dos tienen que ser menores que su suplementario (menores que un ángulo recto). En caso de ser obtuso, podemos razonar de la misma manera.

Este hecho nos permite clasificar los triángulos según sus ángulos. De un triángulo diremos que es:

- *Acutángulo*, si todos sus ángulos son agudos.
- *Rectángulo*, si tiene un ángulo recto.
- *Obtusángulo*, si tiene un ángulo obtuso.



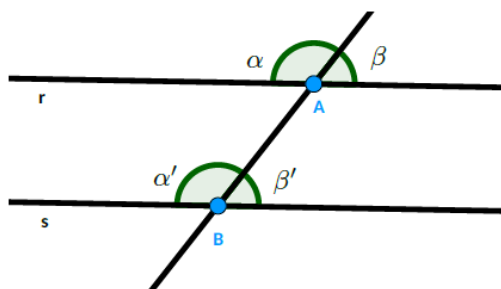
En el caso de los triángulos rectángulos, el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa* y los dos lados restantes se llaman *catetos*.

Llegados a este punto, conviene asumir el siguiente principio para poder seguir trabajando:

Por un punto exterior a una recta dada pasa una única paralela.

Este axioma es lo que se conoce como *quinto postulado de Euclides*.

Teorema 13. *Dos rectas cortadas por una tercera son paralelas si, y solo si, los ángulos internos que se determinan en el plano son iguales.*



Demostración:

Sin pérdida de generalidad, razonaremos sobre un ángulo α como el de la figura, pues β es su suplementario y de la igualdad de α y α' se deduciría la de β y β' .

Supongamos, pues, que $\alpha = \alpha'$. Por reducción al absurdo, supongamos que r y s son secantes. Sea P el punto de corte en cuestión. Sean A y B los puntos de corte de la recta con r y s . Tendríamos entonces que el triángulo $\triangle ABP$ posee un ángulo igual al suplementario de otro de sus ángulos, lo cual entra en contradicción con la tesis del teorema 12.

Recíprocamente, supongamos ahora que r y s son rectas paralelas. Construyamos entonces el ángulo α'' , que es el que resulta de tomar α y transportarlo hasta que tenga vértice en B , uno de sus lados sea igual a $\overrightarrow{BA}$ y esté contenido en el mismo semiplano que α' .

Consideremos ahora r' la prolongación del otro lado de α'' distinto a $\overrightarrow{BA}$. Se tiene entonces que la recta secante determina en r' y en r ángulos iguales. Aplicando la implicación anterior, tenemos que la prolongación será paralela a s . El quinto postulado de Euclides nos asegura entonces que la única paralela a s que pasa por B es s , luego $s = r'$. Por tanto, $\alpha'' = \alpha' = \alpha$.

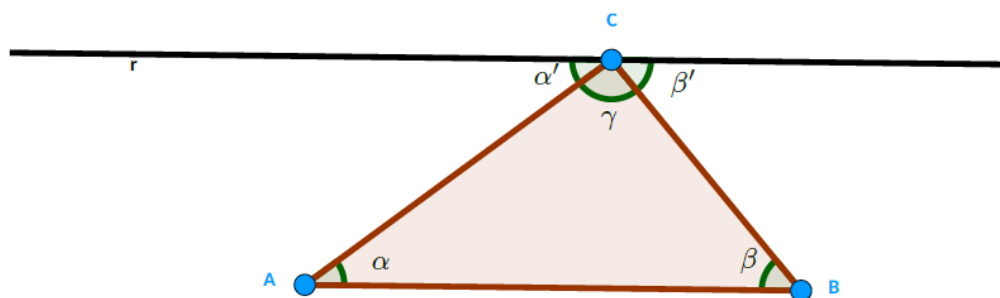
■

3.4 Resultados fundamentales

Teorema 14. *Los ángulos de un triángulo suman un ángulo llano.*

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Sea r la recta paralela a la recta AB que pasa por el punto C . Se forman entonces sendos ángulos α' y β' . Por el teorema 13, $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$. Por adyacencia, el ángulo $\alpha' + \gamma + \beta'$ es llano, con lo que $\alpha + \beta + \gamma$ es llano también.



■

Podemos dar ahora un tercer criterio de igualdad de triángulos (el criterio ángulo-lado-ángulo):

Teorema 15. Si dos triángulos tienen un lado y dos ángulos iguales dos a dos, entonces son iguales.

Demostración:

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y que dos de sus ángulos son iguales.

En primer lugar, como los triángulos tienen dos ángulos iguales, el teorema 14 nos asegura que, de hecho, sus tres ángulos deben ser iguales.

Por otro lado, como ambos triángulos tienen un lado igual, el teorema 4 nos dice que existe un triángulo $\triangle ABC''$, contenido en el mismo semiplano que $\triangle ABC$ respecto de la recta AB y con sus lados iguales a los de $\triangle A'B'C'$.

El teorema 8 nos dice que el ángulo convexo $\angle BAC''$ debe ser igual a $\angle BAC$, lo que nos lleva a que

$$AC = AC'', \quad BC = BC''.$$

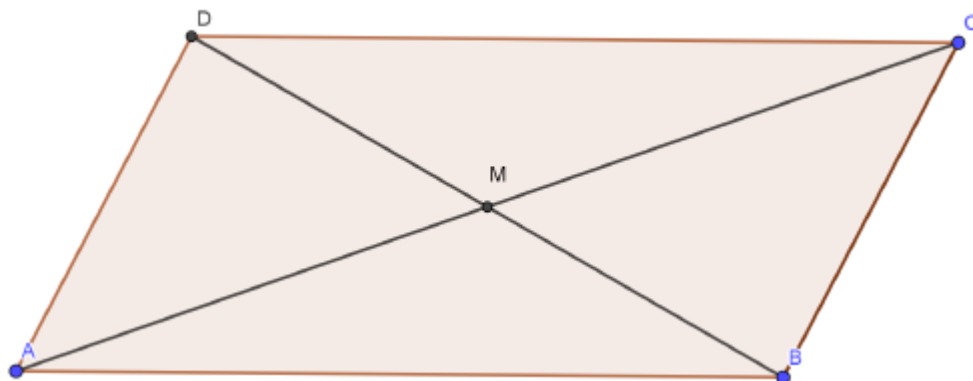
En consecuencia, $C = C''$ por ser los dos el punto de intersección de las dos mismas rectas secantes. Por tanto: $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

■

3.4.1 División de segmentos

En este apartado daremos un método para dividir segmentos en partes iguales. Dicho método de apoya en el concepto de paralelogramo y sus características.

Sean A, B, C, D puntos del plano. Consideremos los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{DA}$ tales que las rectas AB y CD sean paralelas y las rectas AD y BC también lo sean. De la unión de los cuatro segmentos diremos que es un *paralelogramo*. Los puntos A, B, C y D son los vértices del paralelogramo y los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{DA}$ son los *lados* del paralelogramo. Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las *diagonales* del mismo.



Teorema 16. En un paralelogramo, se verifican las dos siguientes propiedades:

- Lados opuestos son iguales.
- Sus diagonales se cortan en el punto medio de las mismas.

Demostración:

Probemos, en primer lugar, la igualdad de los lados paralelos. Consideremos los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle CBA$. Dichos triángulos tienen igual el lado $\overline{AC}$. Además, por el teorema 13, tenemos que

$$\angle DAC = \angle ACB, \angle DCA = \angle CAB.$$

Todo ello nos lleva a que los lados paralelos deben ser iguales.

Veamos ahora que las diagonales se cortan en su punto medio.

El teorema 4 nos lleva a deducir que B y D están cada uno en semiplanos opuestos respecto de la recta AC . Por tanto, AC y BD deben ser secantes. Sea M el correspondiente punto de corte.

Consideremos ahora los triángulos $\triangle AMD$ y $\triangle CMB$. Por el teorema 13, estos dos triángulos tienen dos ángulos iguales y, además, $\overline{AC} = \overline{BD}$, con lo que el criterio ángulo-lado-ángulo (teorema 15) nos lleva a que ambos triángulos son iguales. Por tanto,

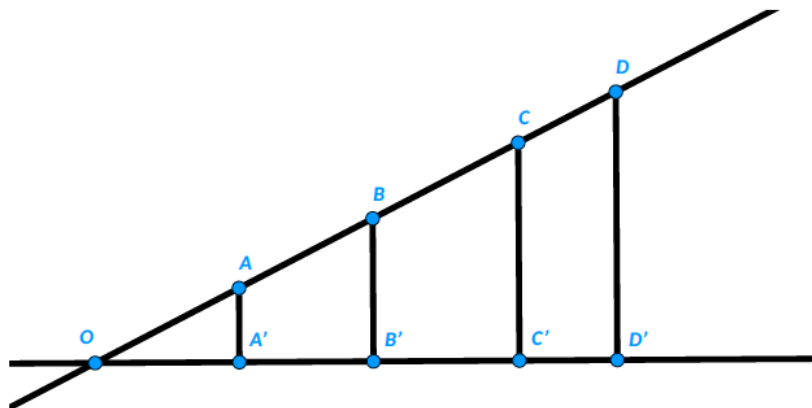
$$\overline{DM} = \overline{MB}.$$

Luego M debe ser el punto medio de $\overline{BD}$. Razonando de manera análoga, se deduce que M debe ser el punto medio de $\overline{AC}$.

■

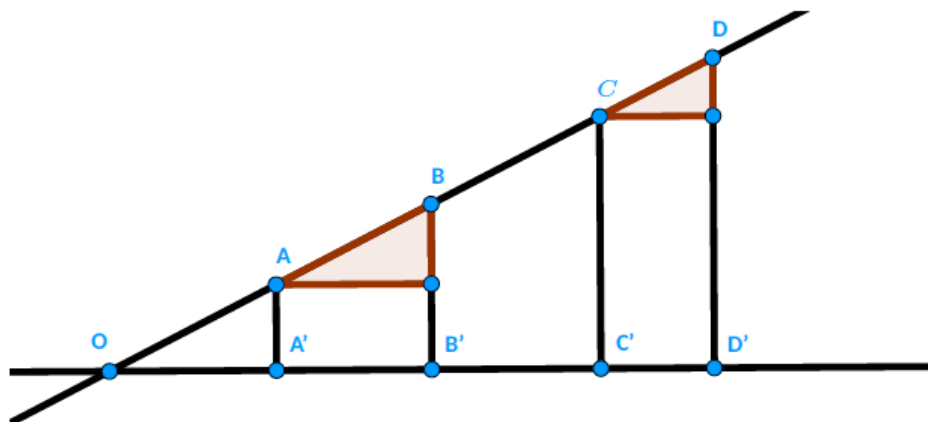
Teorema 17. Sea O un punto y sean r y s dos semirrectas con origen en O . Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ segmentos sobre r y $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ segmentos sobre s tales que las rectas AA' , BB' , CC' y DD' son paralelas. Se tiene entonces que

$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{ si, y solo si, } \overline{A'B'} = \overline{C'D'}$$



Demostración:

Trasladando en paralelo los segmentos $A'B'$ y $C'D'$ hasta hacer coincidir el extremo A' con A y el extremo C' con C , se determinan los triángulos que se ven en la figura siguiente:



Por el teorema 13, sabemos que ambos triángulos tienen dos ángulos iguales. Por el teorema 16, uno de ellos tiene dos lados iguales a $\overline{AB}$ y el otro tiene dos lados iguales a $\overline{CD}$.

Si $\overline{AB} = \overline{CD}$, entonces aplicando el criterio lado-ángulo-lado (teorema 15) deducimos que ambos triángulos son iguales y $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$. Para la otra implicación basta razonar de manera análoga.

■

3.5 Medida de segmentos y ángulos

Llamaremos *recta graduada* a una recta en la que hemos seleccionado dos puntos P_0 y P_1 , considerando siempre la única orientación que hace que $P_0 < P_1$.

Dado un segmento s y una longitud α , definimos la *medida de s respecto de α* , y la denotamos por $m_\alpha(s)$, como el número real $\rho > 0$ que cumple que, en una recta graduada que verifique que $\overline{P_0P_1} = \alpha$, existe un punto P_ρ tal que el segmento $\overline{P_0P_\rho}$ y el segmento s tienen la misma longitud.

Cabe destacar que, tal y como indica la notación $m_\alpha(s)$, la medida de un segmento depende de la elección de α , a la que llamamos *unidad*. Una vez fijado α , $m_\alpha(s)$ depende únicamente del segmento s . Este hecho nos permite abusar de la notación escribiendo $l_\alpha(\beta)$ para un segmento de longitud β .

Además, es claro que si β y γ son dos longitudes verificando $\beta < \gamma$, entonces $l_\alpha(\beta) < l_\alpha(\gamma)$.

Señalamos, por último, que a la única longitud ρ que cumple que $l_\alpha(\rho\alpha) = \rho$ la llamaremos $\rho\alpha$.

Teorema 18. Sea α una longitud y sea $\rho > 0$ un número real. La longitud $\rho\alpha$ es la única que, para cada par de racionales r, s con $0 < r < \rho < s$, se verifica que

$$r\alpha < \rho\alpha < s\alpha.$$

Demostración:

Consideremos una recta graduada tal que $\overline{P_0P_1} = \alpha$. Existe entonces un punto P_ρ tal que la longitud de $\overline{P_0P_\rho}$ es $\rho\alpha$. Pero si r y s son números racionales con $0 < r < \rho < s$, ha de cumplirse que $P_r < P_\rho < P_s$, siendo P_r y P_s los puntos que verifican que $\overline{P_0P_r} = r\alpha$ y $\overline{P_0P_s} = s\alpha$. Por tanto,

$$r\alpha = \overline{P_0P_r} < \overline{P_0P_\rho} = \rho\alpha < \overline{P_0P_s} = s\alpha.$$

Recíprocamente, consideremos β una longitud cumpliendo $r\alpha < \beta < s\alpha$ y con $l_\alpha(\beta) = \sigma$, se tiene entonces que el punto P_σ , que es el que cumple que $\overline{P_0P_\sigma} = r\sigma$, cumple también que $P_r < P_\sigma < P_s$ y, por tanto, $0 < r < \sigma < s$, para cada par de números racionales, r y s , con $0 < r < \rho < s$. Esto solo puede ser posible en el caso de que $\sigma = \rho$.

■

Teorema 19. Sea l una aplicación que a cada longitud le asocia un número real positivo, verificando que, para cada par de longitudes α y β ,

$$l(\alpha + \beta) = l(\alpha) + l(\beta).$$

Entonces se cumple que

$$l(\beta) = l(\alpha)l_\alpha(\beta).$$

Demostración:

Lo probaremos en primer lugar para los números naturales. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$l(n\alpha) = l(\alpha + \dots + \alpha) = l(\alpha) + \dots + l(\alpha) = nl(\alpha).$$

A continuación, lo probaremos para números racionales. Se tiene que

$$l(\alpha) = l\left(q \frac{1}{q} \alpha\right) = ql\left(\frac{1}{q} \alpha\right).$$

Y de aquí deducimos que

$$l\left(\frac{1}{q} \alpha\right) = \frac{1}{q} l(\alpha).$$

Por tanto,

$$l\left(\frac{p}{q} \alpha\right) = \frac{p}{q} l(\alpha).$$

Además, si $\alpha < \beta$, entonces $l(\alpha) < l(\beta)$, pues se cumple que, para algún $\gamma > 0$, $\beta = \alpha + \gamma$,

$$l(\beta) = l(\alpha) + l(\gamma) > l(\alpha).$$

Consideremos ahora números racionales r y s tales que

$$0 < r < \frac{l(\beta)}{l(\alpha)} < s.$$

Por tanto,

$$0 < l(rs) < l(\beta) < l(s\alpha).$$

Y sabemos que podemos entonces escribir que

$$r\alpha < \beta < s\alpha.$$

Aplicando el teorema 18, tenemos que

$$\frac{l(\beta)}{l(\alpha)} = l_\alpha(\beta)$$

Es decir,

$$l(\beta) = l(\alpha)l_\alpha(\beta).$$

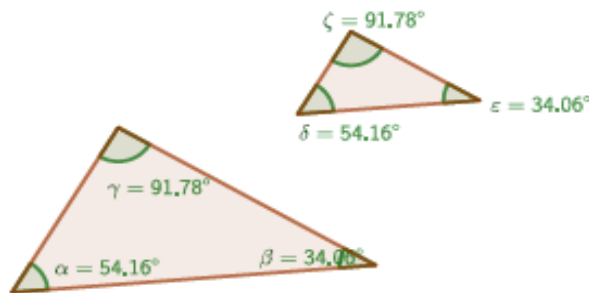
■

3.6 Teorema de Tales y teorema de Pitágoras.

Los criterios de igualdad de triángulos nos han permitido establecer la igualdad en tres casos distintos: cuando se conocen tres lados iguales dos a dos, cuando se conocen dos lados iguales dos a dos y se tiene que los ángulos que determinan también lo son y cuando se conocen dos ángulos iguales dos a dos y la igualdad de uno de sus lados.

No hemos establecido, sin embargo, ningún criterio cuando los tres ángulos sean iguales dos a dos ni tampoco cuando lo sean dos lados y un ángulo distinto del comprendido entre esto.

Vemos en la siguiente figura cómo estas condiciones no son suficientes para asegurar la igualdad de triángulos:

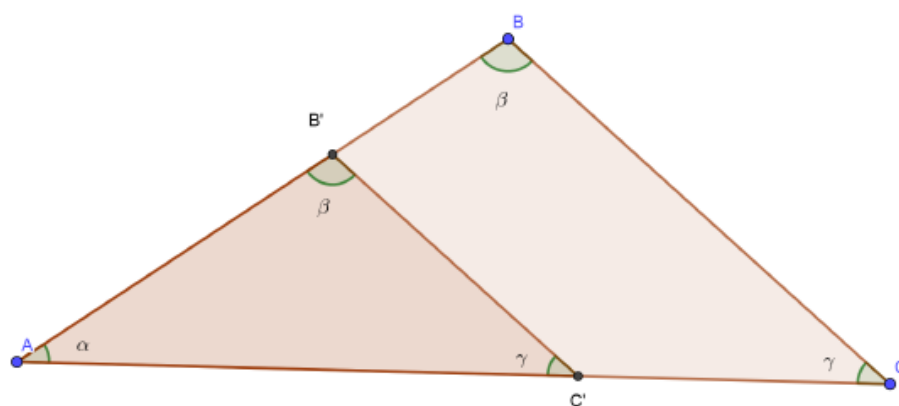


Estos dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales dos a dos, pero claramente no son iguales. Esto nos lleva a definir un nuevo concepto que nos permita seguir avanzando: la semejanza.

De dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ diremos que son *semejantes* si sus lados son proporcionales dos a dos, es decir, si se cumple que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Además, de $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ diremos que están en *posición de Tales* si comparten un vértice y el correspondiente ángulo a dicho vértice y, además, los lados correspondientes al ángulo son paralelos:



Observemos que dos triángulos que se encuentran en posición de Tales han de tener sus tres ángulos iguales dos a dos. Razonemos, por ejemplo, sobre el ángulo β . El ángulo β' es un ángulo opuesto por el vértice al ángulo interno de β . Por lo tanto, $\beta = \beta'$.

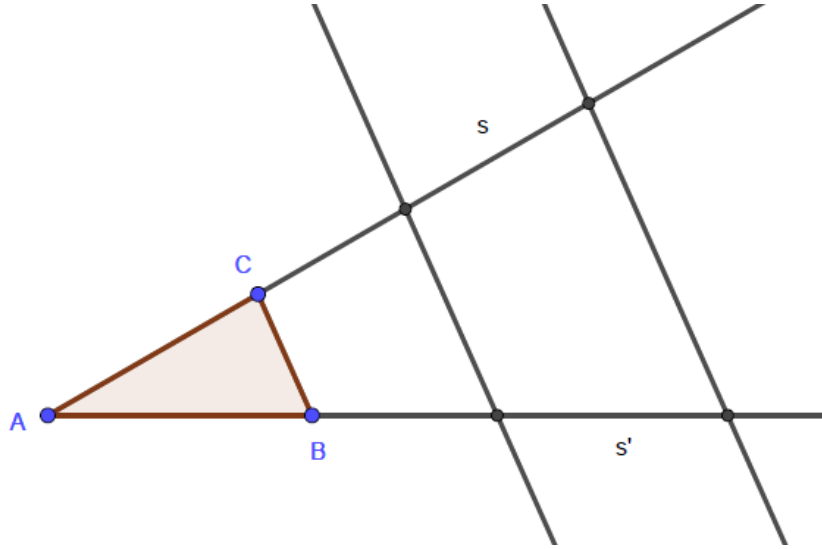
La implicación recíproca también es cierta: si dos triángulos poseen sus tres ángulos iguales dos a dos, entonces es posible transportar uno sobre otro de manera que los dos se encuentren en posición de Tales. En efecto, tomando como referencia la figura anterior, tomemos la semirrecta paralela a $\overrightarrow{BC}$ que pasa por B' . Dicha semirrecta forma con $\overrightarrow{B'A}$ un ángulo que es igual a β , luego dicha semirrecta debe ser $\overrightarrow{B'C'}$. En consecuencia, BC y $B'C'$ son paralelas y los dos triángulos están en posición de Tales.

El siguiente resultado es lo que se conoce como teorema de Tales:

Teorema 20. *Si dos triángulos están en posición de Tales, entonces son semejantes.*

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Para cada segmento s determinado sobre la semirrecta $\overrightarrow{AC}$, existe un segmento s' determinado sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$, el cual se puede obtener sin más que construir las correspondientes paralelas a la recta BC :



El teorema 17 nos asegura ahora que la longitud del segmento s' (llamémosla α') depende únicamente de la longitud del segmento s (llamémosla α). Podemos escribir entonces que $\alpha' = l(\alpha)$.

Ahora bien, si dos segmentos, s y t , sobre la misma semirrecta tienen un extremo común, es evidente que lo mismo sucederá con sus correspondientes segmentos sobre la otra semirrecta, s' y t' , luego siendo β la longitud de t y β' la longitud de t' , sucede que

$$l(\alpha + \beta) = l(\alpha) + l(\beta).$$

Por el teorema 19, tenemos que

$$l(\beta) = l(\alpha)l_{\alpha}(\beta).$$

A continuación, consideramos otro triángulo $\Delta A'B'C'$ en posición de Tales con ΔABC y verificando que $A = A'$. Aplicamos entonces la fórmula anterior al caso $\alpha = \overline{AC}$ y $\beta = \overline{A'C'}$:

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} l_{\alpha}(\beta) = \overline{AB} \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

Por tanto,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

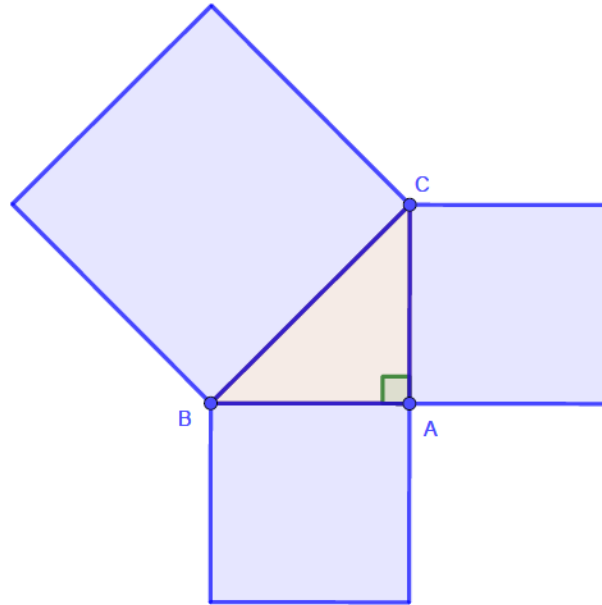
Por otro lado, ambos triángulos pueden ponerse en posición de Tales, pero de modo que $B = B'$. Así, obtendremos entonces que

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

Con lo que ambos triángulos son semejantes.

El resultado que enunciamos a continuación es lo que conocemos como teorema de Pitágoras:

Teorema 21. *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*



Demostración:

Consideremos un triángulo rectángulo ΔABC con ángulo recto en el vértice A . La recta perpendicular a BC que pasa por el punto A cortará al lado a en un punto. Sea P dicho punto de corte.

Observemos que P no puede coincidir ni con B ni con C , pues entonces ΔABC tendría dos ángulos rectos. En caso de que P no perteneciera al triángulo, ΔABC tendría un ángulo obtuso.

Los triángulos ΔABC y ΔPBA tienen iguales el ángulo β , es decir el ángulo con vértice en B . Como, además, ambos poseen un ángulo recto, tenemos que tienen dos ángulos iguales y, en consecuencia, tienen sus tres ángulos iguales dos a dos, luego los triángulos son semejantes. Podemos afirmar, pues, que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Si tomamos ahora como triángulo el ΔPAC y razonamos de manera análoga, obtenemos que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Por tanto,

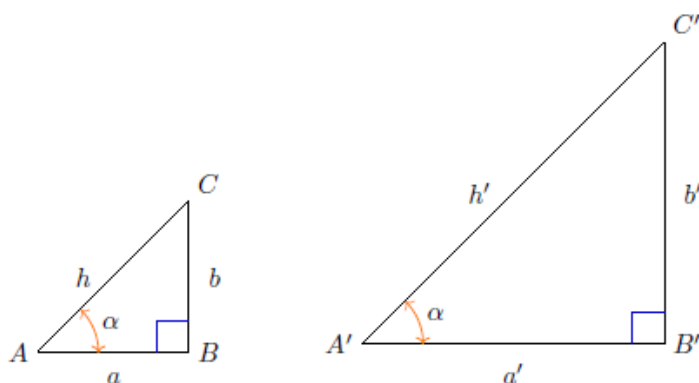
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \overline{BP} + \overline{BC} \overline{CP} = \overline{BC}(\overline{BP} + \overline{PC}) = \overline{BC}^2.$$

3.7 Trigonometría

El criterio lado-ángulo-lado nos indica que, conocidas las longitudes de dos de los lados de un triángulo y el ángulo que forman dichos lados, entonces el lado restante queda determinado. Sin embargo, no está claro cómo determinar dicho lado. Para ello se introducen las herramientas de la trigonometría.

3.7.1 Razones trigonométricas

Los dos triángulos rectángulos que mostramos a continuación tienen un mismo ángulo α y, en consecuencia, sus tres ángulos son iguales. Por tanto, ambos triángulos son semejantes:



En consecuencia,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'}$$

Es decir,

$$\frac{a}{h} = \frac{a'}{h'}, \quad \frac{b}{h} = \frac{b'}{h'}, \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$

Es decir, dichos cocientes solo dependen del ángulo α , no del triángulo en cuestión.

Esto nos lleva a destacar con un nombre propio dichos cocientes. Llamaremos *seno*, *coseno* y *tangente* de un ángulo agudo α , y los denotaremos por $\text{sen } \alpha$, $\cos \alpha$ y $\tan \alpha$, respectivamente, a los siguientes cocientes:

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{h}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{h}, \quad \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Donde h es la hipotenusa y a y b son los catetos de cualquier triángulo rectángulo con un ángulo igual a α . A dichos valores los llamamos *razones trigonométricas* de α .

Si un triángulo rectángulo tiene hipotenusa unitaria y por ángulos agudos α y $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, entonces se verifica que

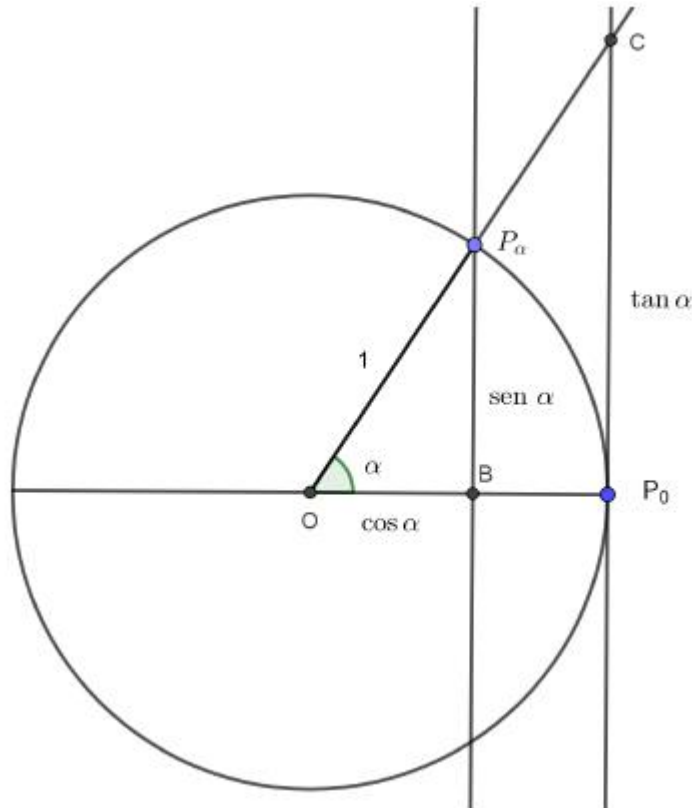
$$\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{sen } \alpha.$$

A partir del teorema de Pitágoras se puede deducir fácilmente la siguiente identidad fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Consideremos ahora una circunferencia de radio 1. Sea O su centro y, dado un ángulo α , consideremos en ella puntos P_0 y P_α tales que $\alpha = \angle P_0 O P_\alpha$.

En esta situación, tenemos que las longitudes $\overline{BP_\alpha}$ y $\overline{OB}$ se corresponderán con el seno y el coseno de α , respectivamente. La tangente de α se corresponderá con $\overline{P_0 C}$:



Esto último permite ampliar las razones trigonométricas a ángulos no necesariamente agudos. Para $\alpha = 0$, se tiene que

$$P_\alpha = P_0 = B = C.$$

Luego se tiene que

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \tan 0 = 0.$$

Por otro lado, si $\alpha = \pi/2$, entonces $B = O$, y se verifica que

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Sin embargo, la cantidad $\tan \pi/2$ no está definida.

En general, para un ángulo obtuso α , tendremos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\pi - \alpha), \quad \cos \alpha = -\cos (\pi - \alpha), \quad \tan \alpha = -\tan (\pi - \alpha).$$

Y para el ángulo $\alpha = \pi$, tendremos que $B = P_\alpha$, luego

$$\operatorname{sen} \pi = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \tan \pi = 0.$$

Si se quiere calcular el valor de ciertas razones trigonométricas destacadas, es posible hacerlo sin más que recurrir a las identidades:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

De esta manera obtenemos:

α	$\operatorname{sen} \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0	0	1	0
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	-

4 Fundamentación curricular

El objetivo de este capítulo es analizar parte del currículo de Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. Para ello, nos centraremos en la materia de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO.

Completaremos el mencionado análisis con un estudio comparativo de dos libros de texto propios de la materia seleccionada.

4.1 Análisis del currículo

La normativa que tendremos en cuenta para llevar a cabo nuestro análisis será la que se corresponde con los niveles de concreción curricular estatal y autonómico y que se expresa en las siguientes normas jurídicas:

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas.

En el Anexo I del Real Decreto se encuentran, para cada una de las materias de la ESO y del Bachillerato, los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables correspondientes.

Como especificamos antes, nos centraremos en la materia de Matemáticas Aplicadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO. Según el Anexo I, la asignatura se divide en cinco bloques, que no son independientes entre sí: <<Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas>>, <<Números y álgebra>>, <<Geometría>>, <<Funciones>> y <<Estadística y probabilidad>>.

Concretamente, examinaremos los bloques <<Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas>>, por ser este de carácter transversal, y <<Geometría>>, donde se encuadra el tema de la unidad didáctica elaborada en este Trabajo de Fin de Máster.

Los contenidos del bloque 1, <<Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas>> son los siguientes:

- Planificación del proceso de resolución de problemas.
- Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.
- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de

las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

- Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
- Práctica de los procesos de matematización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:
 - La recogida ordenada y la organización de datos.
 - La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.
 - Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.
 - El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.
 - La elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.
 - Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Este bloque consta de los siguientes criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables:

Tabla 1: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del bloque 1. Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. Elaboración propia.

BLOQUE 1. PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS	
Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	2.1 Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.
3. Describir y analizar situaciones de cambio	3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes

para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones, obtenidas en los procesos de investigación.	5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. Reflexiona sobre él y sus resultados.
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.

	8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ellos para situaciones similares futuras.	10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras.
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medio tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios	12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje, recogiendo la

	información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
--	---

Por otro lado, los contenidos del bloque <<Geometría>> son los siguientes:

- Geometría del plano.
- Lugar geométrico. Cónicas.
- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas.
- Traslaciones, giros y simetrías en el plano.
- Frisos y mosaicos en la arquitectura andaluza.
- Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros.
- La esfera. Intersecciones de planos y esferas.
- El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para este bloque son:

Tabla 2: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del bloque 3. Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. Fuente: elaboración propia.

BLOQUE 3. GEOMETRÍA	
Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.	1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos.
2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como	2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando formulas y técnicas adecuadas. 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.
3. Calcular (ampliación o reducción) las	3.1. Calcula las dimensiones reales de

dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.
4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimientos en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.	4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. 4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.
5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.	5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. 5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados. 5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y en construcciones humanas.
6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud

Tal y como mencionamos al comienzo de la sección, además del Real Decreto 1105/2014 tomaremos como referencia también la Orden de 15 de enero de 2021, donde se especifican las competencias claves que están con los criterios de evaluación enumerados anteriormente. En concreto:

Tabla 3: Criterios de evaluación y competencias clave del bloque 1. Fuente: Orden de 15 de enero de 2021. Elaboración propia.

BLOQUE 1. MÉTODOS, PROCESOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS	
Criterio de evaluación	Competencias clave
1. Expresar verbalmente y de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL, CMCT
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CMCT, CAA
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	CCL, CMCT, CAA

4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT, CAA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL, CMCT, CAA, SIEP
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT, CAA, CSC, SIEP
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	CMCT, CAA
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	CMCT
9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT, CAA
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	CMCT, CAA, SIEP
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	CMCT, CD, CAA
12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo estos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	CCL, CMCT, CD, CAA

Tabla 4: Criterios de evaluación y competencias clave del bloque 3. Fuente: Orden de 15 de enero de 2021. Elaboración propia

BLOQUE 3. GEOMETRÍA	
Criterios de evaluación	Competencias clave
1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras	CEC, CMCT

planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.	
2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.	CMCT, CAA, CSC, CEC
3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	CMCT, CEC, CAA
4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.	CMCT, CAA, CSC, CEC
5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.	CEC, CMCT
6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	CMCT

En definitiva, las competencias básicas que se deben haber desarrollado tras el estudio de este bloque curricular son las siguientes:

Tabla 5: Nombre de competencias clave. Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. Elaboración propia

	Competencia clave
CCL	Competencia en comunicación lingüística
CMCT	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología
CAA	Competencia de aprender a aprender
SIEP	Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor
CSC	Competencias sociales y cívicas
CD	Competencia digital
CEC	Conciencia y expresiones culturales

Por último, destacamos que, según la Orden de 15 de enero de 2021, las asignaturas de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, de 3º y 4º de ESO, contribuirán a que los alumnos alcancen los denominados objetivos de etapa:

- Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos hábitos de la actividad humana.

- Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
- Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
- Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
- Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
- Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también cómo ayuda en el aprendizaje.
- Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
- Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
- Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas materias de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
- Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto de un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

4.2 Análisis de libros de texto

El libro de texto es uno de los recursos materiales más comunes y arraigados dentro del sistema didáctico, integrado por el alumno, el enseñante y el saber se quiere comunicar.

Dentro de este sistema didáctico, el libro de texto acumula el llamado <<saber escolar>>, resultado de un proceso de selección y transformación de saberes, con el objeto de ser enseñados a los alumnos. Este proceso es lo que se conoce como <<transposición didáctica>> (Chevallard, 1985).

De esta manera, el saber integrado por los objetos contruidos por matemáticos profesionales (<<saber sabio>>) es seleccionado por el sistema social de enseñanza, de manera que se filtren los objetos que resulten de interés para la formación de los alumnos. Estos objetos a enseñar son organizados en el <<saber a enseñar>>, que una vez redactado constituye el saber escolar que leemos en los libros de texto.

El profesor debe encargarse de convertir, mediante sus propias concepciones del proceso de enseñanza y aprendizaje, el saber a enseñar en <<saber enseñado>>.

El saber enseñado no representa el saber de los alumnos, sino que estos interpretan el mismo según sus propias concepciones constituyéndose así el <<saber del alumno>>.

Podemos comprobar, pues, que el libro de texto juega un papel prominente dentro del sistema didáctico, lo que motiva el análisis de los mismos.

En Andalucía se hace uso de una gran cantidad de libros de textos de diferentes editoriales, los cuales pueden ser consultados en el registro correspondiente de la Junta de Andalucía.

Analizaré dos de ellos, correspondientes a la materia de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, de 3º de ESO. Concretamente:

- **(ANAYA)** <<Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3>>. Suma Piezas.
- **(SANTILLANA)** Matemáticas. Enseñanzas Académicas. 3º de ESO. Serie Resuelve (Grazalema).

El primer aspecto que vamos a analizar es el de la distribución de los contenidos de cada libro:

Tabla 6: Temarios de los libros de texto correspondientes a las editoriales Anaya y Santillana. Fuente: libros de texto de Anaya y Santillana. Elaboración propia.

ANAYA	SANTILLANA
1. Fracciones y decimales	1. Números racionales
2. Potencias y raíces. Números aproximados	2. Potencias y raíces
3. Progresiones	3. Progresiones
4. El lenguaje algebraico	4. Proporcionalidad numérica
5. Ecuaciones	5. Polinomios

6. Sistemas de ecuaciones	6. Ecuaciones de primer y segundo grado
7. Funciones y gráficas	7. Sistemas de ecuaciones
8. Funciones lineales	8. Lugares geométricos. Áreas y perímetros
9. Problemas métricos en el plano	9. Movimientos y semejanzas
10. Cuerpos geométricos	10. Cuerpos geométricos
11. Transformaciones geométricas	11. Funciones
12. Estadística	12. Funciones lineales y cuadráticas
13. Azar y probabilidad	13. Estadística
	14. Probabilidad

Los contenidos correspondientes al bloque de Geometría en el libro de ANAYA se articulan en los temas 9, 10 y 11, constituyendo aproximadamente un 23% del total de contenidos. De ellos, es el tema 9, <<Problemas métricos en el plano>> el que recoge esencialmente la información de este documento.

En el caso del libro de SANTILLANA, los contenidos abarcan los temas 8, 9 y 10 (aproximadamente un 21% del total), siendo el tema 8 el que mejor se adapta a nuestros objetivos.

Como podemos observar en la tabla, hay una diferencia significativa en cómo las editoriales distribuyen sus temas, pues ANAYA trata los contenidos del bloque de Geometría después de los del bloque de Funciones y antes que los de Estadística y probabilidad, mientras que SANTILLANA ha adelantado los contenidos de Geometría, situándolos justo después de los de Álgebra y antes que los de Funciones.

Por tanto, seleccionaremos para el análisis el tema 9 de ANAYA y el tema 8 de SANTILLANA. Comenzaremos reseñando que contenidos son comunes a ambos libros:

- Lugares geométricos
- Mediatriz y bisectriz
- Circunferencias
- Teorema de Pitágoras
- Áreas y perímetros

Veamos ahora las diferencias de contenidos entre ambos libros. En la siguiente tabla presentamos en cada columna el contenido concreto que sí consta en el libro correspondiente a la columna y no lo hace en el otro libro:

Tabla 7: Diferencias de contenidos entre los libros de texto de Anaya y Santillana en los temas que se corresponden con la unidad didáctica. Fuente: libros de texto de Anaya y Santillana. Elaboración propia.

ANAYA	SANTILLANA
Las cónicas como lugares geométricos	Ángulos al cortarse dos rectas
	Ángulos al cortar una recta a otras dos rectas paralelas
	Ángulos en un polígono

Examinemos ahora cómo se estructuran los contenidos dentro de un mismo tema.

En ambos libros se invierte siempre un apartado a presentar el tema. En el caso de ANAYA, tenemos una página ilustrada y en el de SANTILLANA una doble página con fotografía.

El libro de ANAYA hace siempre su introducción siguiendo un esquema histórico: se mencionan matemáticos destacados e hitos importantes de las matemáticas relacionadas con el tema en cuestión.

El libro de SANTILLANA introduce los temas planteando problemas reales sobre los que los alumnos puedan reflexionar para hacer ver que lo que van a estudiar en el tema siempre tiene algún tipo de conexión con el mundo que les rodea.

En cuanto a la metodología empleada, el libro de ANAYA sigue un método inductivo: suele comenzar las secciones proponiendo ejemplos, a partir de los cuales se abstraen nociones matemáticas que se presentan con rigor una vez asimiladas. Finalmente, se ofrece una batería de ejercicios para que los alumnos practiquen dichos conceptos.

Por otro lado, el libro de SANTILLANA sigue un esquema deductivo: comienza las secciones exponiendo con formalidad los conceptos matemáticos a tratar para a continuación fomentar su asimilación a través de ejemplos y ejercicios.

Para poder tomar una decisión sobre qué libro escoger, haremos uso de una serie de indicadores elaborados en consonancia con la teoría de idoneidad didáctica (Castillo et al, 2021). En concreto, se asume que la idoneidad didáctica es <<un rasgo graduable de los procesos de enseñanza y aprendizaje que supone la articulación coherente de (...) seis facetas>> (Godino et al., 2007).

Mostramos a continuación cada uno de los criterios de idoneidad didáctica, seguidos de una tabla comparativa donde se analizan una por una las componentes a considerar dentro de cada criterio y para cada libro:

- *Idoneidad epistémica*: se analiza el grado de representatividad de los significados incluidos en el libro respecto de un significado de referencia.

Tabla 8: Criterios de idoneidad epistémica para el análisis de libros de texto. Fuente: (Castillo et al., 2021). Elaboración propia.

Componentes de idoneidad epistémica			
Componentes	Subcomponentes	ANAYA	SANTILLANA
Significados	Problemas	Clásicos; repetitivos	Innovadores; poco apropiados para la asimilación de conceptos
	Lenguajes	Expresiones cuidadas; lenguaje formal	Lenguaje más cercano al alumno

	Conceptos	Se abstraen a través de ejemplo	Se aclaran a través de ejemplos
	Proposiciones	Se expresan claramente al final de cada sección	Se expresan claramente
	Procedimientos	Inductivo	Deductivo
	Argumentos	Ejemplos	Ejercicios de confirmación
Relaciones		Objetos bien conectados	Poca conexión en ocasiones
Procesos	Comunicación, argumentación	Poca autonomía del alumno	Bastante autonomía del alumno
	Modelización	Pocas actividades	Bastantes actividades
	Generalización	Pocas situaciones	Pocas situaciones
Conflictos epistémicos		Pocas ambigüedades en el texto	Se han encontrado algunas erratas

- *Idoneidad cognitiva*: grado de inclusión de los significados incluidos en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.

Tabla 9: Componentes de idoneidad cognitiva para el análisis de libros de texto. Fuente: (Castillo et al., 2021). Elaboración propia.

Componentes de idoneidad cognitiva	ANAYA	SANTILLANA
Relaciones	Buenas experiencias de conexión entre los objetos matemáticos y su significado	Experiencias de conexión algo difusas; ejercicio con objetivos poco claros en ocasiones
Conocimientos previos	Se indican los conocimientos necesarios al comienzo de tema	Se propone una evaluación inicial al comienzo del tema
Diferencias individuales	Muchas actividades de ampliación y refuerzo	Bastantes actividades de ampliación y refuerzo, sobre todo al final del tema
Conflictos cognitivos	Comienza siempre las secciones con ejemplos, valorando el acercamiento por aproximación del alumno	Comienza siempre con definiciones formales y luego aplica ejercicios; da menos valor al error como método
Evaluación	Hay siempre una sección de autoevaluación en cada tema y ejercicios	Autoevaluación bastante completa al final de cada tema y

	resueltos en cada sección	múltiples ejercicios resueltos a lo largo del mismo.
--	---------------------------	--

- **Idoneidad afectiva:** grado de apertura en la exposición con el objeto de que el alumno se implique en el proceso de estudio.

Tabla 10: Componentes de idoneidad afectiva para el análisis de libros de texto. Fuente: (Castillo et al., 2021). Elaboración propia.

Componentes de idoneidad afectiva	ANAYA	SANTILLANA
Actitudes	Poca participación por parte del alumno más allá de las actividades de repetición y afianzamiento	Bastante variedad de actividades; actividades que promueven la autonomía del alumno
Emociones	Las tareas pueden no ser de interés para los alumnos; no se fomentan las ideas originales	Las actividades intentan captar la atención de los alumnos; se facilita la aplicación de los contenidos
Creencias	Se analizan las creencias de los alumnos a través de ejemplos, a partir de los cuales se construye la teoría	Se consideran las creencias de los alumnos al proponerles actividades de indagación al final de cada tema
Valores	Se promueve valorar las matemáticas más como un lenguaje preciso	Se fomenta valorar las matemáticas más como una herramienta
Evaluación de afectividad	No se proponen actividades	No se proponen actividades

- **Idoneidad mediacional:** grado de disponibilidad de los recursos materiales, así como de adecuación de los mismos a una secuenciación temporal.

Tabla 11: Componentes de idoneidad mediacional para el análisis de libros de texto. Fuente: (Castillo et al.). Elaboración propia.

Componentes de idoneidad mediacional	ANAYA	SANTILLANA
Recursos materiales	No se contemplan recursos materiales más allá del propio libro	En cada tema se propone siempre trabajar con recursos materiales (papel, cartón, regla, etc.)
Tiempo	La cantidad de información y actividades propuesta en cada sección podría abrumar a los alumnos	Se concede mayor importancia a los contenidos nuevos frente a los ya conocidos

- **Idoneidad interaccional:** grado de calidad de las configuraciones didácticas, de manera que permitan identificar conflictos en el proceso de instrucción.

Tabla 12: Componentes de idoneidad interaccional para el análisis de libros de texto. Fuente: (Castillo et al., 2021). Elaboración propia.

Componentes de idoneidad interaccional	ANAYA	SANTILLANA
Interacción autor-alumno	Presentación de los temas a través de ejemplos sobre los que reflexionar	Múltiples comentarios y ejemplos a lo largo de las exposiciones
Interacciones discentes	No se favorecen las interacciones entre alumnos	Se contemplan siempre actividades de descubrimiento que se pueden hacer en grupo
Autonomía	No existen actividades que concedan una gran autonomía a los alumnos	Siempre hay, al menos, una actividad de descubrimiento que permita al alumno trabajar de manera guiada según sus experiencias
Evaluación formativa	Ejercicios resueltos en cada sección	Ejercicios resueltos a lo largo del tema

- *Idoneidad ecológica*: grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo que fomenta su entorno (escuela, sociedad, etc.).

Tabla 13: Componentes de idoneidad ecológica para el análisis de libros de texto. Fuente: (Castillo et al., 2021). Elaboración propia.

Componentes de idoneidad ecológica	ANAYA	SANTILLANA
Adaptación al currículo	Los objetivos y contenidos se adaptan a las directrices curriculares	Los objetivos y contenidos se adaptan a las directrices curriculares
Apertura a la innovación	No se proponen nuevas prácticas	Se fomentan la reflexión y el trabajo autónomo del alumno en actividades de descubrimiento
Adaptación socio-profesional	Los contenidos contribuyen a formar el pensamiento crítico de los alumnos gracias al lenguaje formal	Los contenidos contribuyen a fomentar la habilidad matemática a través de situaciones reales
Educación en valores	No se contempla la formación en valores	En cada tema se incluye una actividad relacionada con el desarrollo sostenible
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos están siempre bien relacionados tanto	Los contenidos se exponen a veces de

	dentro de cada tema como entre distintos temas	manera un tanto inconexa
--	--	-----------------------------

Una vez comparados ambos libros, optaría por elegir el de la editorial ANAYA. Aunque el libro de SANTILLANA ofrece más recursos para trabajar de manera alternativa y actividades no tan comunes, lo cierto es que el libro de ANAYA expone los contenidos de manera más clara e integrada, dándole una importancia mayor a que dichos contenidos sean claramente asimilados por los alumnos, aunque para ello haya que abusar, quizás, de las actividades clásicas de repetición. Las carencias de las que adolece el libro de ANAYA podrán ser, en todo caso, suplidas con distintas actividades elegidas de manera pertinentes, las cuales podrían ser extraídas del libro de SANTILLANA, combinando así los mejores rasgos de cada uno de ellos.

5 Fundamentación didáctica

5.1 La desaparición de las demostraciones en la educación secundaria

El objetivo de este capítulo es proporcionar una base teórica para el tratamiento del problema que será abordado en la proyección didáctica: la práctica desaparición de las demostraciones del currículo de Matemáticas en educación secundaria.

Esta afirmación no es arbitraria. Si se consultan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que figuran en la Orden de 15 de enero de 2021 (analizada en el capítulo <<Fundamentación curricular>> para el caso particular del bloque <<Geometría>> de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO) se puede comprobar la ausencia de sustantivos como <<demostración>> o <<prueba>> y de los correspondientes verbos <<demostrar>> y <<probar>>.

Especialmente llamativo debería resultar este hecho cuando se está hablando de una materia cuyos contenidos se caracterizan precisamente por ser obtenidos mediante razonamientos lógicos. Podría encontrarse una incoherencia similar en impartir Física sin llevar a cabo un solo experimento en un laboratorio o Educación Física sin salir del aula.

Cabe destacar que la expresión <<desaparición de las demostraciones>> no ha sido usada en el párrafo inicial de manera descuidada: lo denominamos de esta forma porque en versiones anteriores del currículo sí que aparecían con mayor o menor preponderancia las pruebas matemáticas. Miguel de Guzmán (1980) afirma que <<alrededor del año cincuenta la enseñanza matemática en nuestro país parecía razonablemente sana>> y de que <<la información matemática general de nuestros estudiantes era incluso superior a la de muchos otros países de Europa>> (p. 29). Atribuye en dicho texto esta buena salud de la formación matemática en España al esfuerzo que hicieron algunos matemáticos de reconocido prestigio como Julio Rey Pastor o Pedro Puig Adam, refiriéndose en concreto a la redacción por parte de estos de libros de matemáticas de enseñanza media que constituyeron <<un indudable acierto tanto en su contenido como en su forma>>.

Guzmán (2007) referencia también la influencia que tuvo el célebre matemático alemán Felix Klein en la publicación de estos manuales de matemáticas. En 1908, Klein publicó *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, un exitoso libro sobre cómo deberían impartirse las matemáticas en los cursos de enseñanza media. Si se analiza con un poco de detenimiento el libro de Klein (que consta de un volumen dedicado a la aritmética, el álgebra y el análisis y otro dedicado a la geometría) se podrá comprobar cómo se lleva a cabo una exposición clara de los temas, demostrando los resultados presentados con un nivel de rigor adecuado. Todo ello llevó a Rey Pastor a traducirlo al español en 1927 e incluirlo entre las publicaciones de la colección coordinada por él mismo, Biblioteca Matemática.

Es fácil constatar lo que afirma Miguel de Guzmán en sus artículos sin más que revisar algún libro de texto de la época. Por ejemplo, el libro *Matemáticas para el Curso Preuniversitario*, de Pedro Puig Adam (1963) donde apenas se dejan resultados sin demostración.

Se podría argumentar que este cambio en la forma de presentar los contenidos de la asignatura fue resultado de aplicar alguna idea innovadora en lo que a métodos pedagógicos se refiere y que, por tanto, no parece recomendable retomar el itinerario de las demostraciones matemáticas en la enseñanza media. Sin embargo, ya conocemos el caso de un cambio profundo en la manera de enseñar matemáticas que tuvo que ser desterrado por sus malos resultados: es lo que se dio a conocer como <<matemática moderna>>.

La matemática moderna comenzó en los años 60 del pasado siglo en países como Estados Unidos o Francia (Guzmán, 1980) y se incorporó en el sistema educativo español con la Ley de Educación de 1970. Este movimiento pedagógico surgió de la hipótesis de que buena parte de los problemas que tenían los alumnos a la hora de aprender matemáticas provenían del carácter anticuado de los contenidos impartidos en la materia (matemáticas en su mayoría originadas en los siglos XVII y XVIII). Para arreglar esta situación, instituciones educativas americanas propusieron abandonar los temas considerados <<tradicionales>> y sustituirlos por otros de origen más reciente como el álgebra abstracta, la topología o la teoría de conjuntos.

El matemático estadounidense Morris Kline analiza con bastante minuciosidad este nuevo plan de estudios en su famosa obra *El fracaso de la matemática moderna* (Kline, 1998). En el libro cita, por ejemplo, la opinión de Felix Klein sobre la enseñanza de este tipo de contenidos: <<Al acabar esta discusión de la teoría de colecciones (conjuntos), debemos hacer de nuevo la pregunta que acompaña a todas estas lecciones: “¿qué es lo que se puede usar de todo esto en la enseñanza?”. Desde el punto de vista de la pedagogía matemática, debemos naturalmente protestar contra la imposición a los alumnos de cosas tan abstractas y difíciles demasiado pronto (...)>>.

Miguel de Guzmán (2007) pormenoriza los rasgos conflictivos de este nuevo paradigma:

- Se subrayaron las estructuras abstractas en diversas áreas, especialmente en álgebra.
- Se pretendió profundizar en el rigor lógico, en la comprensión, contraponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos.
- Esto último condujo de forma natural al énfasis en la fundamentación a través de las nociones iniciales de la teoría de conjuntos y en el cultivo del álgebra, donde el rigor es fácilmente alcanzable.
- La geometría elemental y la intuición espacial sufrieron un gran detrimento. La geometría es, en efecto, mucho más difícil de argumentar rigurosamente.

- Con respecto a las actividades fomentadas, la consecuencia natural fue el vaciamiento de problemas interesantes, en los que la geometría elemental tanto abunda, y su sustitución por ejercicios muy cercanos a la mera tautología y reconocimiento de nombres, que es, en buena parte, lo que el álgebra puede ofrecer a este nivel elemental.

Alicia Delibes (2001) destaca así que <<poco a poco esa Matemática Moderna fue pasando de moda y su abandono se fue haciendo de forma implícita y paulatina. Los profesores, la mayoría formados en el bourbakismo, buscaron por su cuenta nuevas maneras de enfocar la enseñanza de las matemáticas para niños y adolescentes>>.

Dado el empobrecimiento percibido en la formación matemática de los alumnos, esta reforma tuvo que dar marcha atrás y hubo que concretar nuevamente los conocimientos y capacidades que toda persona egresada de la educación secundaria debería poseer.

Tenemos, pues, un ejemplo relativamente reciente de cambio sustancial en el currículo que tuvo que ser desechado. Vemos, por tanto, que la desaparición de las demostraciones matemáticas de los planes de estudio no es un fenómeno singular ni irreversible, lo que da cabida a estudiar la posibilidad de su regreso al currículo.

Sería posible argüir, precisamente en conexión con la matemática moderna, que uno de los aspectos criticados de la misma fue un cierto abuso de la interpretación deductiva de las matemáticas, al cual el estudio de las demostraciones nos haría volver. En palabras de Henri Lebesgue: <<Ningún descubrimiento ha sido hecho en matemáticas, o en un campo relacionado, por un esfuerzo de la lógica deductiva; los descubrimientos resultan del trabajo de la imaginación creadora, que construye lo que le parece que es verdad, guiada a veces por analogías, a veces por un ideal estético, pero sin apoyarse nunca en sólidas bases lógicas>> (Kline, 1998). Sin embargo, tal y como menciona Kline en su libro, el problema no reside tanto en la lógica deductiva sino en el exceso de rigor del que se intenta dotar a la misma.

Para ilustrar esta idea, partiremos del ejemplo de los Elementos de Euclides. Esta obra fue escrita aplicando en todo momento la lógica deductiva. Sin embargo, las explicaciones dadas en ella no son completamente rigurosas: en ellas se hace uso implícito de hechos aparentemente evidentes que requieren de una demostración (o ser incorporados al conjunto de axiomas). Evidentemente, este hecho no invalida de manera absoluta los contenidos de la obra de Euclides: fue la principal fuente de conocimiento geométrico disponible durante siglos y aún hoy sigue citándose como ejemplo de calidad deductiva. Tampoco estamos afirmando que dichas acotaciones sobre el rigor de las inferencias no deban ser acometidas, sino que el rigor en las exposiciones es, especialmente en el ámbito educativo, una cuestión de contexto.

El ejemplo de los Elementos no ha sido elegido de manera fortuita: es en el caso de la geometría donde quizá mejor se puede graduar el nivel de rigor exigido a los alumnos. Al relajar el rigor, muchos de los resultados deseables pueden proponerse

como problemas, de modo que la construcción obtenida de manera razonada en la resolución del problema permite enunciar teoremas interesantes.

De esta manera, la idea que se pretende desarrollar es <<llevar al lector hacia resultados no triviales con pruebas completas y rigurosas, pero que requieran la mínima base teórica posible>> de modo que el objetivo alcanzado sea <<proporcionar al lector una “materia bruta” de resultados matemáticos no triviales que sirva de motivación y de orientación a la hora de adentrarse en las teorías matemáticas más refinadas que permiten comprender mejor y superar con creces los límites hasta los que se puede llegar sin ellas>> (Ivorra, 2021).

5.2 El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

Hemos concretado, pues, nuestro objetivo en la recuperación de ciertas demostraciones en el caso del bloque de geometría, en especial de aquellas cuyo carácter sea eminentemente visual o que se apoyen en construcciones geométricas asumibles por los alumnos.

Esta última expresión es la que va a dar pie al desarrollo de esta sección. ¿Qué puede ser <<lo asumible por los alumnos>>? Gutiérrez (2015) trata de responder a esta cuestión dividiéndola en tres interrogantes distintos:

¿Qué es para los estudiantes demostrar una afirmación matemática?

¿Qué procesos mentales tienen lugar durante este aprendizaje?

¿Cómo aprenden a demostrar los estudiantes?

La primera pregunta está relacionada con el asunto del grado de rigor que se quiera manejar. Al fin y al cabo, una demostración no es más que una cadena de razonamientos cuyo fin es convencer de la veracidad de una afirmación. El convencimiento de un alumno dependerá del grado de rigor que esté dispuesto a asumir.

Para responder a las otras dos preguntas recurriremos al modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. Se trata de una teoría sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría que propone la existencia de cinco niveles de progreso para un alumno en su capacidad de realizar razonamientos geométricos. En concreto, los niveles a los que hacemos referencia son los siguientes (Vargas y Gamboa, 2013):

- Nivel 1: Las figuras geométricas son reconocidas por su forma como un todo por el individuo, no diferencia partes ni componentes de esta. Puede, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a ellas por su nombre. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y comparadas con elementos familiares de su entorno.
- Nivel 2: El individuo puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas, pero no logra establecer relaciones

o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de estas. Las propiedades de ellas las establece de forma empírica a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones de la geometría las establece a partir de propiedades, no les posible elaborar definiciones.

- Nivel 3: El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas se derivan de otras; establece interrelaciones entre estas y sus familias. Construye las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado. Sin embargo, su razonamiento lógico continúa basado en la manipulación. Sigue demostraciones; pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones.
- Nivel 4: En este nivel ya realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, y ve su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. El individuo comprende y maneja las relaciones entre propiedades y las formaliza en sistemas axiomáticos, por lo que ya entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas. Puede desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, percibe la posibilidad de una prueba; sin embargo, no reconoce la necesidad de rigor en los razonamientos.
- Nivel 5: El individuo está capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí. Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría. Capta la geometría en forma abstracta.

Por cómo ha sido descrito, el nivel 5 está claramente fuera de los objetivos de la enseñanza secundaria en matemáticas y, de hecho, Vargas y Gamboa (2013) citan autores que afirman que este último nivel sólo es alcanzado por estudiantes universitarios con una buena formación en geometría.

Detallaremos ahora qué papel desempeñan las demostraciones en cada nivel de progreso. Siguiendo a Gutiérrez (2015):

- Nivel 1: No hay demostración. La veracidad de una afirmación se justifica porque es evidente en una figura geométrica que se está observando, y la afirmación es cierta sólo en esa figura.
- Nivel 2: Demostración empírica. La veracidad de una propiedad enunciada se demuestra verificándola experimentalmente en uno o más ejemplos. La demostración consiste en analizar uno o más ejemplos observándolos y realizando mediciones, transformaciones, recuentos, etc.
- Nivel 3: Demostración deductiva informal. La veracidad de una propiedad enunciada se demuestra mediante un argumento deductivo abstracto informal. La demostración consiste en crear el argumento deductivo abstracto después de analizar ejemplos para identificar propiedades

matemáticas visualmente o realizando mediciones, transformaciones, recuentos, etc. Estas demostraciones, aunque son deductivas, no cumplen los requisitos del lenguaje matemático formal. Los estudiantes pueden comprender pequeñas demostraciones formales explicadas por el profesor, pero no son capaces de hacerlas por sí mismos.

- Niveles 4 y 5: demostración deductiva formal. La veracidad de una propiedad enunciada se demuestra mediante un argumento deductivo abstracto formal. En este nivel se llega a producir las demostraciones deductivas formales aceptables por los matemáticos profesionales.

Gutiérrez (2015) afirma ahora que <<un progreso óptimo razonable de los estudiantes medios, si la enseñanza es adecuada, es (...) que los estudiantes pasen del nivel 1 al 2 durante los últimos cursos de Primaria, del nivel 2 al nivel 3 durante la segunda mitad de Secundaria y que, al terminar Secundaria, parte de los alumnos hayan llegado a realizar demostraciones formales sencillas propias del inicio del razonamiento de nivel 4>>. Evidentemente, esto dista mucho de la realidad actual. Es, precisamente, mi experiencia durante las Prácticas docentes del Máster la que me ha hecho reflexionar sobre la capacidad de un alumno medio de 3º de ESO para realizar razonamientos geométricos y cuáles podrían ser las mejoras en caso de implementar demostraciones en las sesiones de clase desde el comienzo de la educación secundaria.

Surge entonces la duda de qué tipo de demostraciones podrían, no sólo entender, sino llevar a cabo los alumnos. Balacheff (1988) propone una interesante clasificación en este sentido. Él denomina <<preuve>> (lit. prueba) a un tipo demostración con un cierto grado de rigor que es aceptado por una cierta comunidad de individuos. Traduciremos este término como <<razonamiento>>. Así, podemos establecer las siguientes categorías:

Tabla 14: Tipos y subtipos de razonamiento según Balacheff. Fuente: (Balacheff, 1988). Elaboración propia.

Tipo de razonamiento	Subtipo de razonamiento
Pragmático	Empirismo naif
	Experimento crucial
	Ejemplo genérico
Intelectual	Experimento mental
	Cálculo simbólico

Balacheff denomina pragmático (del francés, <<pragmatique>>) al tipo de razonamiento característico del nivel 2 de Van Hiele y llama intelectual (del francés, <<intellectuelle>>) al razonamiento de los niveles 3, 4 y 5. Comentemos cada subtipo:

- Empirismo naif: es el razonamiento que da por válida una afirmación cuando comprueba que se verifica para unos pocos casos, normalmente elegidos al azar. Por ejemplo, se da por válido que un polígono de n lados tiene n diagonales si se comprueba que para un pentágono regular es así.
- Experimento crucial: se da por válida una afirmación cuando se comprueba que se verifica para unos casos concretos con unas características apropiadas, es decir, procurando que sea lo suficientemente general como para representar a todos los casos similares. Por ejemplo, se da por válido que la suma de los ángulos de un triángulo vale 180 grados si se comprueba que es así para ejemplos concretos de un triángulo equilátero, de uno isósceles y de uno escaleno.
- Ejemplo genérico: se da por válida una afirmación si se comprueba que es así para una familia de casos, aunque dicha familia no barra el total de los mismos. Por ejemplo, se da por válido que en un triángulo cualesquiera sus ángulos interiores deben sumar 180 grado si se prueba para los triángulos equiláteros.
- Experimento mental: se trata de un razonamiento deductivo con un cierto grado de rigor, normalmente llevados a cabo tras una serie de manipulaciones sobre ejemplos concretos.
- Cálculo simbólico: razonamiento deductivo riguroso.

Tal y como hemos descrito nuestras intenciones al comienzo de la sección, es evidente que los razonamientos en los que estamos interesados son los del tipo experimento mental.

Una vez concretado el tipo de demostración que queremos alcanzar y los tipos de demostraciones que nos podemos encontrar por parte de los alumnos, cabe preguntarse cómo podríamos conseguir que un alumno medio progresara de un cierto nivel (por ejemplo, del nivel 2, en el que se encuentran muchos de los alumnos de 3º de ESO) a otro (por ejemplo, nivel 3, donde podrían manejar un cierto nivel de rigor). Van Hiele también tuvo en cuenta esta cuestión y diseñó una guía estructurada en fases que facilitara a los docentes el acompañamiento a los alumnos de un nivel a otro (Vargas y Gamboa, 2013):

- Fase 1: Información. En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El proceso debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en este. Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.
- Fase 2: Orientación dirigida. Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes), para que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos que deben formar. Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y

propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor tiene que seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades, y debe orientar a sus alumnos hacia la solución, cuando lo necesiten.

- Fase 3: Explicitación. Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico correspondiente al tema de estudio. El tipo de trabajo que se debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolverse los ejercicios anteriores, elementos, propiedades y relaciones que se han observado.
- Fase 4: Orientación libre. En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos. El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades: más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de problemas.
- Fase 5: Integración. Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar; integran estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que poseían anteriormente. El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos.

Para poner en práctica el tránsito de fases del alumnado se propone entonces, en consonancia con el objetivo del capítulo una metodología del tipo aprendizaje basado en problemas, de modo que la práctica en la resolución de los mismos fomente la deseada capacidad de trasladar en teoremas las conclusiones de los razonamientos puestos en juego durante las construcciones geométricas.

Esta metodología viene a invertir el esquema tradicional de enseñanza (Guzmán, 2007):

Tabla 15: Fases del esquema tradicional de enseñanza. Fuente: (Guzmán, 2007). Elaboración propia.

Fases del esquema tradicional	
1	Exposición de contenidos
2	Ejemplos

3	Ejercicios sencillos
4	Ejercicios más complicados
5	Problema

El esquema que se propone con el aprendizaje basado en problemas es el siguiente (Guzmán, 2007):

Tabla 16: Fases del esquema de aprendizaje basado en problemas. Fuente: (Guzmán, 2007). Elaboración propia.

Fases del esquema de aprendizaje basado en problemas	
1	Propuesta de la situación problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...)
2	Manipulación autónoma por los estudiantes
3	Familiarización con la situación y sus dificultades
4	Elaboración de estrategias posibles
5	Ensayos diversos por los estudiantes
6	Herramientas elaboradas a lo largo de la historia
7	Elección de estrategias
8	Abordaje y resolución de problemas
9	Recorrido crítico (reflexión sobre el proceso)
10	Afianzamiento formalizado (si conviene)
11	Nuevos problemas
12	Posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas...

5.3 Marco teórico de la metodología

Para dotar de fundamento teórico esta opción metodológica recurriremos a la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, enmarcada dentro de la corriente constructivista y que, en palabras del propio Brousseau, se caracteriza por defender que <<el alumno aprende adaptándose a un medio que es producto de contradicciones, dificultades, desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas que son la prueba del aprendizaje>> (Brousseau, 1986).

Así, la teoría de situaciones didácticas trata de explicar el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir de dos tipos de interacciones:

Interacción alumno-medio. En este caso, el <<medio>> es un factor resistente que nace de un problema matemático.

Interacción alumno-docente, que aparece a partir de la interacción anterior.

La interacción alumno-medio se describe mediante el concepto de <<situación a-didáctica>>: la producción de conocimiento del alumno es independiente de la intención didáctica del docente. La interacción alumno-docente se modela mediante el concepto de <<contrato didáctico>>.

La figura del docente adquiere un papel fundamental una vez los alumnos tratan de producir su propio conocimiento a partir del problema dado. Es lo que llama <<devolución>>. Como dice Brousseau (1986), <<no basta “comunicar” un problema a un alumno para que ese problema se convierta en su problema y se sienta el único responsable de resolverlo. Tampoco basta que el alumno acepte esa responsabilidad para que el problema que resuelva sea un problema “universal” libre de presupuestos didácticos. Se llama “devolución” a la actividad mediante la cual el docente intenta alcanzar ambos resultados>>.

5.4 Pruebas y problemas a través de software de geometría dinámica

Una de las críticas que argüía Morris Kline (1998) era que el excesivo planteamiento deductivo que proponía la matemática moderna provocaba que los alumnos perdieran mucha habilidad de manipulación matemática (de hecho, de ahí viene el subtítulo del libro de Kline). Quizás podría enarbolarse una crítica parecida a la perspectiva que estamos manteniendo sobre la inclusión de las demostraciones en el currículo: el tiempo que se invertirá en poner en marcha los razonamientos geométricos no se invertirá en calcular ángulos, longitudes o superficies.

Siendo esto cierto en parte, queremos defender nuestra postura haciendo uso de una importantísima herramienta informática que, por una parte, nos permitirá ahorrar tiempo y esfuerzo a la hora de elaborar las construcciones geométricas que sean precisas (dejando tiempo para los mencionados cálculos de áreas, lados, etc.) y que, por otra parte, constituye ella misma un ejercicio de manipulación matemática. Nos referimos a los programas informáticos de geometría dinámica y, más en concreto, a GeoGebra.

GeoGebra es un software libre multiplataforma que permite la manipulación dinámica de elementos propios del álgebra, la geometría y el cálculo. Su principal ventaja reside en la facilidad de uso, pues no requiere de conocimientos de programación informática, y en la comunidad de usuarios que alimenta con sus colaboraciones un gran catálogo de actividades.

En este sentido, como afirma (Gutiérrez, 2015), el software de geometría dinámica proporciona a los estudiantes una herramienta para poder experimentar libremente con las figuras geométricas, de manera que pueden corroborar propiedades intuitivas mediante la manipulación.

En definitiva, se ha pretendido que el desarrollo del capítulo fundamente nuestra decisión de acercar las demostraciones matemáticas a los estudiantes a través de las

demostraciones constructivas, que pueden contemplarse como problemas a estudiar, los cuales pueden manipularse utilizando software de geometría dinámica.

6 Proyección didáctica

Dedicaremos este capítulo a la elaboración de una unidad didáctica para la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO. Concretamente, la unidad se corresponderá con los siguientes contenidos del bloque <<Geometría>>:

- Geometría del plano
- Lugar geométrico
- Teorema de Tales
- División de un segmento en partes proporcionales
- Aplicación a la resolución de problemas

6.1 Título

El título propuesto para la unidad didáctica es <<Construyendo la geometría del plano>>. Con el mismo se quiere poner de manifiesto el carácter práctico del enfoque con el que se tratan los contenidos, puesto que las demostraciones de los resultados serán constructivas y se abordarán a través de problemas.

6.2 Justificación

La unidad didáctica elaborada pretende sintetizar y adaptar al contexto del aula todo lo expuesto en capítulos anteriores: se tomarán como guía los contenidos, criterios de evaluación, competencias clave y estándares de aprendizaje evaluables que hemos recogido del marco legal en el capítulo dedicado a la fundamentación curricular. Dichos contenidos han sido debidamente formalizados y desarrollados con detalle en la exposición teórica elaborada en el capítulo de la fundamentación epistemológica, de manera que constituyan el soporte adecuado (<<saber sabio>>, en palabras de Chevallard (1998)) para iniciar el proceso de transposición didáctica. Este proceso será llevado a cabo gracias a las ideas y herramientas expuestas en el capítulo de fundamentación didáctica.

De este modo, el objetivo será lograr una buena fundamentación de las ideas básicas que articulan la geometría plana y cultivar la capacidad de realizar razonamientos geométricos elementales a través de demostraciones constructivas, todo ello sustentado por exposiciones eminentemente visuales que se llevarán a cabo gracias al trabajo con GeoGebra.

El escenario ideal para este enfoque albergaría el hecho de que los alumnos hubieran venido aplicando esta metodología desde su ingreso en la educación secundaria (o incluso desde la educación primaria). A pesar de ello, su implementación en esta asignatura de 3º de ESO parece razonable, pues los contenidos de la misma (al menos en lo concerniente al bloque de Geometría) ya son conocidos por los alumnos, lo que permite proyectar sesiones en las que el objetivo no sea tanto avanzar sino profundizar y afianzar en lo ya conocido.

6.3 Contextualización del centro y del aula

El centro educativo donde contextualizaremos la unidad didáctica será el IES Llano de la Viña, situado en Villatorres (Jaén).

El centro suele acoger a unos doscientos alumnos de media, ofertando dos líneas de ESO (bilingüe en inglés) y desarrollando numerosos planes y programas para los alumnos, destacando el Plan de lectura y el Plan medioambiental.

El alumnado del centro proviene de dos centros de Primaria distintos, que se localizan en dos de los tres municipios (Villargordo y Torrequebradilla) que integran el actual municipio de Villatorres. Suelen vivir con sus padres que, en general, tienen un nivel académico de estudios primarios, siendo la agricultura el principal sector profesional de los mismos.

Los alumnos del centro suelen presentar una serie de características comunes dentro de su diversidad. Cabe destacar la desmotivación como un problema recurrente del alumnado: muchos de ellos carecen de un hábito de estudio y apenas dedican tiempo en casa. Con todo, la mayoría de ellos se muestran siempre dispuestos a participar en las tareas propuestas, tanto en particular en el aula como en general a nivel de centro.

Este perfil medio del alumno motiva en parte la metodología a seguir: se procurará que la mayor parte de la carga de trabajo se lleve a cabo en clase, de manera que disfruten de la guía del docente en directo y del apoyo de sus compañeros.

6.4 Objetivos

Como hemos comentado anteriormente, nuestra unidad didáctica planifica el proceso de enseñanza y aprendizaje de parte de los contenidos del bloque de Geometría, correspondiente a Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO. Dicha asignatura se enmarca dentro del área de matemáticas del currículo de educación secundaria obligatoria como etapa educativa. Esta relación de contención nos guiará a la hora de exponer los objetivos a perseguir, partiendo de los objetivos más generales a los más particulares.

6.4.1 Objetivos de etapa

Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, los objetivos son <<referentes relativos a los logros que el estudiante debe alcanzar al finalizar cada etapa, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificadas a tal fin>>. Concretamente, en Educación Secundaria Obligatoria se persigue alcanzar los siguientes objetivos:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la

- solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
 - c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
 - d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
 - e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
 - f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
 - g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
 - h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
 - i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
 - j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
 - k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

6.4.2 Objetivos de área

En la Orden de 15 de enero de 2021 se especifican los siguientes objetivos del área de Matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor; utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno; analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas materias de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual. Aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, la salud, el consumo, el reconocimiento de la contribución de ambos sexos al desarrollo de nuestra sociedad y al conocimiento matemático acumulado por la humanidad, a la aportación al crecimiento económico desde los principios y modelos de desarrollo sostenible y utilidad social o la convivencia pacífica.

6.4.3 Objetivos de materia

Los objetivos de materia, es decir, los correspondientes a Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, son compartidos por las asignaturas homónimas de 3º y 4º de ESO. La Orden de 15 de enero de 2021 los especifica tal y como recogimos en su momento en el capítulo de fundamentación curricular.

6.4.4 Objetivos específicos de la unidad didáctica

La unidad didáctica presente también contempla perseguir los siguientes objetivos:

- 1) Conocer los elementos básicos de la geometría plana.
- 2) Describir los lugares geométricos básicos (como la mediatriz de un segmento o la bisectriz de un ángulo) y utilizar sus propiedades aplicándolas para el análisis de problemas geométricos.
- 3) Manejar con precisión el lenguaje matemático, en particular el relacionado con la geometría.
- 4) Identificar las características y propiedades de los ángulos.
- 5) Utilizar las TIC para trazar construcciones geométricas y plasmar ideas conceptuales.
- 6) Identificar triángulos y cuadriláteros según su tipo atendiendo a distintos criterios.
- 7) Reconocer características de polígonos para identificarlo en distintos contextos como la naturaleza o el arte.

6.5 Competencias clave

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, se afirma que se adoptará la denominación de competencias clave definidas por la Unión Europea. De este modo, se considera que <<las competencias clave son aquellas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo>>.

Para una definición más detallada, podemos recurrir al Informe DeSeCo (Definición y Selección de Competencias, OCDE, 2003), que define el término competencia como <<la capacidad de responder a demandas complejas para llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada>>. Así, nos dice que la competencia <<supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz>>.

La Orden de 15 de enero de 2021 define las competencias clave que podemos asociarle a nuestra unidad didáctica que, tal y como enumeramos en la fundamentación curricular son los siguientes:

Tabla 17: Nombre de cada competencia clave. Fuente: Orden de 15 de enero de 2021. Elaboración propia.

	Competencias clave
CCL	Competencia en comunicación lingüística
CMCT	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología
CAA	Competencia de aprender a aprender
SIEP	Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor
CSC	Competencias sociales y cívicas
CD	Competencia digital
CEC	Conciencia y expresiones culturales

Desarrollaremos una por una estas competencias según cómo las vamos a tratar en la unidad didáctica:

- Comunicación lingüística: dado que uno de las dificultades que presentan los alumnos a la hora de realizar razonamientos es expresar con claridad las ideas que manejan mentalmente, esta competencia resulta especialmente relevante. En concreto, esta competencia se tratará de desarrollar de las siguientes maneras:
 - Cuidado del lenguaje claro y preciso por parte del profesor durante las explicaciones.
 - Lectura atenta de textos, especialmente de fragmentos seleccionados de una obra novelada de divulgación matemática.
 - Redacción esmerada de la resolución de problemas: aunque muchos

ejercicios se realicen usando GeoGebra, los alumnos deberán escribir los pasos ejecutados.

- Diálogo alumno-profesor durante las sesiones de clase y entre alumnos durante las actividades de trabajo en grupo.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología: se trata de la competencia por excelencia de la unidad didáctica. Se trabajará concretamente en las siguientes situaciones:
 - Seguimiento de las demostraciones matemáticas en las sesiones de clase.
 - Elaboración de construcciones geométricas guiadas, teniendo que determinar qué propiedades de qué objetos se están utilizando en cada momento de la demostración.
 - Manejo guiado de un programa informático de geometría dinámica como lo es GeoGebra.
 - Identificación de figuras geométricas en otros contextos de la ciencia y la tecnología y valoración de su uso para los mismos según las propiedades de las figuras.
- Competencia de aprender a aprender: se potenciará gracias al eminente carácter manipulativo y experimental que tienen las actividades con GeoGebra que, si bien son guiadas, prevén un cierto grado de libertad para que los alumnos aprendan que una manera de acercarse a la geometría es mediante la manipulación de los objetos geométricos.
- Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor: se estimulará a través de distintas actividades en las que el grado de orientación por parte del docente va disminuyendo conforme los alumnos avancen en el desarrollo de la unidad didáctica, de manera que el culmen de esta competencia se alcanzaría cuando un alumno fuese capaz de hacer alguna demostración completa adaptada a su nivel.
- Competencias sociales y cívicas: se fomentarán a través del continuo diálogo en clase tanto entre profesor y alumnos como entre alumnos, moderado por el docente, así como también por la interacción entre alumnos gracias al trabajo en grupo.
- Competencia digital: dado el enfoque que se ha querido usar para la unidad didáctica, esta competencia también ocupa un papel destacado gracias a la preponderancia de las actividades basadas en las construcciones geométricas guiadas.
- Conciencia y expresiones culturales: una de las aspiraciones del enfoque de la unidad didáctica es la de transmitir un cierto aprecio por el valor de las matemáticas, no sólo como herramienta que poder aplicar en otras disciplinas, sino como matriz cultural. Para ello, se expondrán, siempre que sea posible, los orígenes históricos y culturales de las construcciones vistas en clase, por qué sus creadores podían estar interesados en construirlas y por qué siguen plenamente vigentes hoy en día.

6.6 Contenidos

En nuestra unidad didáctica se trabajarán los siguientes contenidos correspondientes al bloque 1 del currículo:

Tabla 18: Contenidos del bloque 1 según la Orden de 15 enero de 2021 y contenidos incluidos en la unidad didáctica. Fuente: Orden de 15 de enero de 2021. Elaboración propia.

BLOQUE 1: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS	
Contenidos en Orden de 15 de enero de 2021	Contenidos de la unidad didáctica
1.1. Planificación del proceso de resolución de problemas.	-Analizar una construcción geométrica para fragmentarla en las construcciones intermedias que hay que llevar a cabo para obtenerla.
1.2. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	-Dividir una construcción geométrica compleja en construcciones más simples ya conocidas. -Indagar propiedades geométricas planteadas en figuras concretas mediante GeoGebra.
1.3. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	-Enumerar los pasos dados en la realización de las construcciones geométricas una vez terminado el proceso, enlazando adecuadamente el inicio con el objetivo.
1.4. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	-Experimentar mediante la manipulación de figuras usando GeoGebra.
1.5. Práctica de los procesos de matematización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	-Identificar de los elementos geométricos básicos en situaciones reales.
1.6. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	-Realizar demostraciones geométricas guiadas con diferente grado de autonomía por parte de los alumnos.

Por otro lado, los contenidos del currículo correspondientes al bloque 3 que trataremos en esta unidad didáctica son los siguientes:

Tabla 19: Contenidos del bloque 3 según la Orden de 15 de enero de 2021 y contenidos de la unidad didáctica.
Fuente: Orden de 15 de enero de 2021. Elaboración propia.

BLOQUE 3: GEOMETRÍA	
Contenidos en Orden de 15 de enero de 2021	Contenidos de la unidad didáctica
3.1. Geometría del plano	-Conocer los objetos geométricos y sus propiedades a través de su manipulación con GeoGebra
3.2. Lugar geométrico. Cónicas	-Construir los lugares geométricos básicos con GeoGebra.
3.3. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas	-Comprender el teorema de Tales a través de su comprobación mediante GeoGebra. -Dividir un segmento en partes proporcionales usando GeoGebra. -Resolver problemas mediante el teorema de Tales.
3.4. Traslaciones, giros y simetrías en el plano	-Aplicar los distintos movimientos rígidos a múltiples figuras geométricas usando GeoGebra.
3.5. Frisos y mosaicos en la arquitectura andaluza	-Aplicar movimientos rígidos en los frisos y mosaicos mediante el uso de GeoGebra.

6.7 Metodología

La metodología es definida por el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, como el <<conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados>>.

En concreto, la Orden de 15 de enero de 2021 especifica, para el bloque de Geometría, algunas consideraciones metodológicas como las siguientes:

- Es conveniente conjugar la metodología tradicional con la experimentación a través de la manipulación y con las posibilidades que ofrecen los recursos digitales interactivos para construir, investigar y deducir propiedades. Asimismo, deben establecerse relaciones con otros ámbitos como la naturaleza, el arte, la arquitectura o el diseño, destacando su importancia en la historia y la cultura de Andalucía.
- La utilización de metodologías como el ABP (Aprendizaje Basado en Problemas), formulando preguntas al alumnado a partir de las cuales desarrollará su aprendizaje, trabajando con técnicas de aprendizaje cooperativo, o el ABI (Aprendizaje Basado en la Investigación), a través de la resolución de problemas (...).

- El uso de programas y aplicaciones y aplicaciones informáticas (app) de geometría dinámica hacen que la enseñanza de la Geometría sea más motivadora consiguiendo un aprendizaje más efectivo en el alumnado.

Como se puede comprobar, estas estrategias metodológicas están en plena consonancia con el enfoque propuesto en el capítulo dedicado a la fundamentación didáctica. De esta manera, detallamos a continuación lo ya expuesto anteriormente:

- La metodología activa estará siempre presente en todas las sesiones: la primera aproximación a cada concepto geométrico partirá de un problema a estudiar (ABP).
- Se fomentará el aprendizaje dialógico a la hora de analizar los problemas propuestos en clase, alentando a los alumnos a ir descubriendo por sí mismos las estrategias más adecuadas, formulándoles las preguntas que reorienten sus primeras aproximaciones.
- Se enfatizarán las características del conocimiento matemático, diferenciándolo del conocimiento empírico. Se hará ver que, aunque nos acerquemos a los conceptos y propiedades geométricas mediante la manipulación y experimentación con los mismos, el objetivo final es concatenar razonamientos para establecer pruebas matemáticas que, una vez realizadas, garantizan la validez permanente de las afirmaciones probadas.
- Se hará un uso intensivo de los programas informáticos de geometría dinámica, que vertebrarán siempre las sesiones, concretamente de Geogebra: mediante pizarra digital o proyector durante las sesiones de clase, mediante ordenadores del aula de informática, mediante dispositivos móviles, etc.
- Se llevarán a cabo distintas actividades de trabajo cooperativo en las que se conjuguen varias de las estrategias mencionadas: uso de la TIC, aprendizaje mediante el diálogo entre compañeros, etc.

6.8 Actividades y recursos

Las actividades propuestas han sido seleccionadas y elaboradas para tratar de implementar la metodología anterior respetando la diversidad de estilos de aprendizaje de los alumnos y las posibles atenciones específicas que requieran.

Las actividades previstas pueden clasificarse en los siguientes tipos:

- Actividades de aprendizaje dialógico: la mayoría de las sesiones comenzarán con una propuesta de diálogo entre los propios alumnos y con el profesor acerca de una determinada situación relacionada con los contenidos del día.
- Actividades de manipulación de figuras geométricas con GeoGebra: suelen ser el núcleo de cada sesión, donde mediante una estrategia de Aprendizaje Basado en Problemas se pretende que los alumnos manipulen figuras geométricas para deducir propiedades e incluso enunciar teoremas y esbozar demostraciones con un grado de rigor adaptado.
- Actividades de afianzamiento: se trata de actividades de repetición mecánica de cálculos.
- Actividades de indagación: propuestas, por ejemplo, en la primera sesión a modo

de evaluación inicial y en la última como actividades de ampliación para los alumnos que las requieran.

- Actividades de registro: se propone a los alumnos que tomen nota de las construcciones geométricas y las demostraciones llevadas a cabo en clase, generando así un cuaderno de construcciones y demostraciones.

Los recursos que nos permitirán desarrollar la unidad didáctica en sus distintas sesiones previstas son los siguientes:

Tipo de recurso	Recursos
Específico	• Pizarra • Material de dibujo
Impreso	• Libro de texto • Cuaderno • Libro de lectura
Audiovisual	• Proyector
Informático	• Ordenadores con conexión a Internet • GeoGebra
Tecnológico	• Pizarra digital
Ambiental	• Aula • Aula de informática
Humano/personal	• Profesor de matemáticas • Alumnado • Otros docentes • Equipo Directivo • Departamento de Orientación • Familias de los alumnos
Recursos web	• GeoGebra versión online • YouTube

6.9 Atención a la diversidad

Según la Orden de 15 de enero de 2021 por atención a la diversidad se entiende <<el conjunto de actuaciones y medidas educativas que garantizan la mejor respuesta a las necesidades y diferencias de todos y cada uno de los alumnos y alumnas en un entorno inclusivo, ofreciendo oportunidades reales de aprendizaje en contextos educativos ordinarios>>.

Esta sección adquiere un papel destacado, pues la atención a las necesidades educativas del total del alumnado constituye la meta principal de la Educación Secundaria Obligatoria. De este modo, la formación proyectada durante esta etapa educativa debe procurar una preparación adecuada para todos los alumnos: aquellos

que quieran incorporarse de manera inmediata al mercado laboral, los que quieran estudiar un módulo profesional y los que deseen estudiar Bachillerato.

Estas ideas serán implementadas teniendo en cuenta una serie de principios generales de actuación:

- (1) Respetar nuestras diferencias con los demás.
- (2) Dotar a la enseñanza de un enfoque inclusivo, tratando de cubrir las posibles necesidades educativas del alumnado, de muy diversa índole.
- (3) Detección temprana de las necesidades educativas de los alumnos.
- (4) Igualdad de oportunidades a la hora de acceder a la etapa educativa, cursarla, promocionar durante la misma y titular.

Para poner en práctica estos principios, comenzaremos valorando en la primera sesión cuáles son los conocimientos y habilidades previas de los alumnos. Dicha valoración podrá ser actualizada en repetidas ocasiones gracias a la evaluación continua, con lo que el tipo de actividades que se van a desarrollar podrá ser adaptado en función del avance que se vaya produciendo durante las sesiones. Este carácter flexible de las tareas será el que las caracterice, tanto en las ideadas como actividades de refuerzo como en el caso de las actividades de ampliación:

- Las tareas de ampliación buscan desarrollar toda la potencialidad de los alumnos, pudiendo satisfacer su curiosidad mediante la investigación en profundidad de un problema planteado.
- Las tareas de refuerzo son elaboradas para afianzar aquellos contenidos donde los alumnos han notado más dificultad a la hora de trabajar con ellos.

Además de este tipo de actividades concretas, existen otras medidas generales de atención a la diversidad dentro del área de Matemáticas:

- Desdoblamientos de grupos.
- Acción tutorial
- Programas de atención a la diversidad como
 - Programas de refuerzo del aprendizaje
 - Programas de profundización

Las familias serán debidamente informadas de manera periódica de la evolución de los alumnos a los que se apliquen dichas medidas.

6.10 Evaluación

Según la Orden de 15 de enero de 2021, la evaluación del proceso de aprendizaje debe ser <<continua, formativa, diferenciada y objetiva>>. Además, se indica que se tomarán de referencia para la misma los criterios de evaluación orientados por los estándares de aprendizaje evaluables correspondientes.

Siendo esto así, la evaluación se organizará de la siguiente manera:

- Evaluación inicial: cuya valoración se tomará como referencia para planificar el desarrollo de la unidad didáctica dentro de un abanico de posibles escenarios.
- Evaluación formativa: se llevará a cabo durante el proceso de enseñanza y aprendizaje que se lleva a cabo en cada una de las sesiones. Mediante la observación de la actividad de los alumnos en clase se evaluará el grado de éxito

del enfoque educativo seleccionado y los necesarios ajustes que haya que ir haciendo en el mismo para mejorarlo.

- Evaluación sumativa: que culminará con una prueba de evaluación individual por escrito donde se valore si se han alcanzado los objetivos previstos en base al grado de logro de los criterios de evaluación.

Cada una de estas <<fases de la evaluación>> se pondrán en práctica gracias a diversos instrumentos, los cuales detallamos a continuación:

- Actividades escritas a entregar al profesor, como la prueba de evaluación inicial.
- Recursos de GeoGebra.
- Cuaderno de construcciones geométricas y demostraciones, que será revisado al final de la unidad didáctica y se valorará según criterios de orden, limpieza y cuidado en el uso del lenguaje matemático.
- Prueba de evaluación individual por escrito.

Para valorar el grado de consecución de los objetivos marcados en función de los criterios de evaluación se ha elaborado una rúbrica que permitirá, una vez finalizada la evaluación, asociar una determinada calificación en función del nivel de logro alcanzado:

Tabla 20: Rúbrica de evaluación. Elaboración propia.

RÚBRICA DE EVALUACIÓN					
	Excelente	Bueno	Mejorable	Ponderación	Valoración
Intervenciones en clase	Plantea preguntas pertinentes e interesantes, responde con claridad y cuida el lenguaje formal.	Responde con coherencia a las preguntas planteadas e intenta cuidar las expresiones matemáticas utilizadas.	Con frecuencia responde con frases incoherentes y trata de eludir preguntas. No domina vocabulario matemático.	15%	
Actividades con GeoGebra	La construcción geométrica se corresponde totalmente con la esperada. Se han cuidado los detalles gráficos.	La construcción geométrica es similar a la esperada pero contiene algunos errores.	La construcción geométrica no se corresponde con la esperada.	20%	

Cuaderno de construcción y demo.	Se ha completado el cuaderno y priman la claridad, el orden y la limpieza. Se ha cuidado el lenguaje matemático.	Se ha completado casi todo el cuaderno y se aprecian algunas faltas de limpieza o rigor.	No se ha completado el cuaderno y abundan las faltas de rigor y el desorden en la redacción.	15%	
Prueba de ev. ind. escrita	Se dominan los conceptos trabajados en clase y son expresados con rigor y orden	Se dominan buena parte de los conceptos trabajados en clase y hay alguna falta de rigor u orden	Se evidencia una falta de dominio de los conceptos trabajados en clase y hay faltas de rigor y orden.	50%	
Valoración final asignada					

6.11 Temporalización

Se han programado un total de doce sesiones, cada una de ellas de una hora lectiva de duración, reservando la última de ellas para la realización de una prueba de evaluación por escrito individual.

Procederemos a detallar una por una las mencionadas sesiones. Para cada una de ellas especificaremos los contenidos trabajados, los objetivos perseguidos, las competencias clave que se deberían fomentar y los criterios de evaluación seleccionados. Asimismo, se expondrá cuál será el desarrollo de la sesión (con unos minutajes aproximados) y cuál será la metodología empleada, así como el tipo de actividades propuestas.

Todas las tablas son de elaboración propia.

Sesión 1: Evaluación inicial e introducción a la geometría plana	
Contenidos: 1.4, 3.1, 3.2	Objetivos: 1, 2, 3, 4
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CEC	Criterios de evaluación: 1.5, 1.8, 1.10, 1.12

Desarrollo de la sesión: - Actividad de investigación sobre problemas geométricos. Se presentará a los alumnos dos de los llamados <<problemas clásicos>>: la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo. A continuación, se distribuirá a los alumnos por grupos de tres o cuatro personas para que realicen una pequeña investigación por Internet de estos problemas. Concretamente, deberán responder a cuestiones como: ¿Es posible realizar estas construcciones geométricas? ¿Por qué? ¿Es posible dar una solución aproximada del problema? ¿Consideráis que la solución aproximada da por zanjado lo que propone el problema? ¿Hay algún caso particular en el que podáis abordar el problema? ¿Quedaría resuelto entonces el problema? Las respuestas deberán entregarse como parte de la evaluación inicial, aunque se expondrán durante los últimos minutos de la actividad. (45 minutos). - Observación en pizarra digital o proyector de recursos de GeoGebra en los que se pueden manipular áreas de cuadrados y círculos o trisecar un ángulo recto. (10 minutos). - Reflexión final sobre el concepto de demostración matemática, destacando su carácter visual y constructivo en geometría. (5 minutos).	
Metodología y tipo de actividades: - Metodología principalmente activa con una pequeña parte destinada a la metodología transmisiva. - La actividad de investigación combina las estrategias metodológicas ABP y ABI. - Uso de las TIC.	

Sesión 2: Elementos básicos del plano. Iniciación a GeoGebra	
Contenidos: 1.5, 1.6, 3.1, 3.5	Objetivos: 1, 3, 5
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD	Criterios de evaluación: 1.10, 1.11, 1.12
Desarrollo de la sesión: - Actividad dialógica donde se propone a los alumnos que observen fotografías de algunos mosaicos de la Alhambra, se les pregunta qué creen que son, de dónde vienen, quiénes los idearon, por qué tienen esa forma, etc. A continuación, se les enseña una imagen simplificada de los mismos donde se destacan los elementos geométricos que los conforman. Esencialmente, puntos, segmentos y rectas. Se les pregunta si sabrían identificar dichos elementos y si sabrían dar una definición de los mismos. Puede preguntarse entonces por qué parece complejo definir un objeto que es tan fácil de identificar a simple vista. (20 minutos). - Se les propone replicar estos elementos en GeoGebra. Para ello, se inicia una exposición de cómo se maneja dicho programa informático: cómo se abre, cómo se dibuja un punto, un segmento, una recta, etc. (20 minutos). - Se propone una actividad por parejas en la que han de seleccionar un mosaico, cargar la imagen en GeoGebra y que dibujen sobre la imagen todos los segmentos, rectas y puntos que consideren oportunos. (20 minutos)	
Metodología y tipo de actividades: - Metodología activa por aprendizaje dialógico y trabajo cooperativo, acompañado por una parte de metodología transmisiva. - Uso de las TIC	

Sesión 3: La circunferencia como herramienta fundamental	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 3.1, 3.2	Objetivos: 1, 2, 3, 5
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD, CEC	Criterios de evaluación: 1.1, 1.3, 1.5, 1.11, 3.1
Desarrollo de la sesión: - Actividad dialógica donde en primer lugar se muestran ejemplos de circunferencias en el mundo del arte, la arquitectura y la naturaleza. Se abstraerá a continuación el concepto de circunferencia y se pedirá a los alumnos que reconozcan qué elementos les harían falta para trazar una circunferencia, dando lugar al proceso de construcción de las circunferencias a partir de un punto (centro) y un segmento (radio), en conexión con los contenidos de la sesión anterior. (10 minutos). - Se expondrá un recurso elaborado con GeoGebra en el que en una circunferencia un punto de la misma va recorriéndola, mostrando que su distancia al centro permanece constante, no ocurriendo así con el resto de puntos del plano. Se intentará hacer ver que este hecho caracteriza a la circunferencia y se dará entonces su definición como lugar geométrico. (5 minutos). - Se utilizará otro recurso expuesto de igual manera para que recuerden conceptos básicos de la misma: diámetro, cuerda, arco, etc. Así como las posiciones relativas de dos circunferencias. (5 minutos). - Actividad de demostración guiada. Por parejas, los alumnos deberán manipular distintas circunferencias sobre una recta, manipulando las mismas para determinar cuáles son sus posiciones relativas. Deberán determinar qué relación cumplen los radios dependiendo de la posición relativa de las circunferencias. Deberán cumplimentar una ficha donde elaborarán su propio enunciado del teorema y adjuntarlo en su cuaderno de construcciones y demostraciones (40 minutos).	
Metodología y tipo de actividades: - Metodología transmisiva combinada con estrategias de aprendizaje dialógico. - La actividad de demostración guiada constituiría una tarea de tipo ABP. - Uso de las TIC	

Sesión 4: El triángulo como primera construcción	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 3.1	Objetivos: 1, 3, 5, 6
Competencias clave: CMCT, CAA, SIEP, DC, CEC	Criterios de evaluación: 1.1, 1.2, 1.8, 1.11, 3.1
Desarrollo de la sesión: - Exposición de distintas imágenes donde se observa la abundancia de triángulos en todo tipo de contextos. Se preguntará a los alumnos a qué creen que es debida esta riqueza de ejemplos y si, dada la sencillez de dicha figura, creen que podrían dibujar un triángulo dados tres segmentos de longitud prefijada. (5 minutos). - Se expondrán brevemente los elementos de los triángulos, así como la terminología usual usada en su estudio y su clasificación según sus lados (5 minutos). - Actividad guiada de construcción y demostración. Se trata de hacer ver que podemos aprovechar lo que ya sabemos de las circunferencias (y, en particular, el teorema estudiado en la sesión anterior) para avanzar en el estudio de los triángulos. De manera guiada, se les pedirá a los alumnos que, manipulando las figuras con GeoGebra y	

revisando sus anotaciones del teorema de la sesión anterior, constaten dos hechos:

- Las circunferencias con centros dos de los vértices de un triángulo y con radio los lados que unen dichos vértices con el restante se intersectan en dicho vértice restante.
- En un triángulo, cualquiera de los lados es menor que la suma de los dos lados restantes.
- Criterio de congruencia de triángulos lado-lado-lado.

(50 minutos)

Metodología y tipo de actividades:

- Metodología transmisiva combinada con estrategias de aprendizaje dialógico.
- Metodología activa durante la mayor parte de la duración de la sesión, con el desarrollo de la actividad de construcción geométrica y demostración, que seguiría un esquema de ABP.
- Uso de las TIC.

Sesión 5: El ángulo como medida esencial	
Contenidos: 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 3.1	Objetivos: 3, 4, 5, 6
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD	Criterios de evaluación: 1.1, 1.4, 1.11, 3.1
Desarrollo de la sesión: • Se comenzará recordando el criterio de congruencia de triángulos lado-lado-lado que se vio en la sesión anterior. Se les volverá a preguntar a los alumnos por el significado de este resultado y de si se pueden relajar las condiciones, es decir, ¿y si sólo conocemos la igualdad de un lado con otro para dos triángulos? ¿Son iguales entonces? (5 minutos). • Se mostrará entonces un recurso de GeoGebra con distintos segmentos con un extremo común, donde se mantienen las longitudes de ambos segmentos. Se planteará a los alumnos si serían capaces de construir el triángulo asociado en cada caso. Se comprobará entonces que, a igualdad de longitud, se pueden obtener distintos triángulos. Se propondrá a los alumnos que intenten deducir cuál es la diferencia entre ellos. (5 minutos). • Aprovechando lo anterior, se dará una definición de ángulo y sus principales tipos: ángulos convexos y cóncavos, ángulos opuestos, ángulo nulo, ángulo completo, ángulo llano, etc. Todo ello apoyado por la manipulación de los ángulos en GeoGebra por el profesor. Además, se mostrará también cómo se suelen nombrar los ángulos de un triángulo y, dados los razonamientos anteriores, se enunciará el criterio lado-ángulo-lado. Por último, se recordará la clasificación de triángulos según sus ángulos. (15 minutos). • Actividad de demostración dialogada: dado lo que sabemos sobre ángulos y la exposición realizada al comienzo de la clase sobre el criterio lado-lado-lado, ¿qué ocurre con dos triángulos cuyos lados son iguales dos a dos? ¿También lo serán sus ángulos? Se volverán a mostrar en pizarra los ejemplos anteriores elaborados con GeoGebra para reforzar la visualización de la situación. (10 minutos). • Actividad de construcción de un ángulo transportado y demostración guiada. Dado un cierto ángulo y una semirrecta, se pretende transportar el ángulo de manera que uno de sus lados se apoye sobre la semirrecta. Se les propondrá construir con GeoGebra un ángulo cualquiera y una semirrecta y llevar a cabo la construcción. (25 minutos)	

Metodología y tipo de actividades:	
• Metodología transmisiva, apoyada por el uso de las TIC y primando técnicas de aprendizaje dialógico. • Actividades de ABP. • Uso de las TIC	

Sesión 6: Otros lugares geométricos: mediatriz y bisectriz	
Contenidos: 1.1, 1.3, 3.2	Objetivos: 2, 3, 5
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD	Criterios de evaluación: 1.1, 1.10, 1.11, 3.1, 3.5
Desarrollo de la sesión: • Se comienza mostrando a los alumnos varios polígonos regulares a los que se ha ocultado una mitad respecto a un cierto eje de simetría y se les propone reconstruirlos. Una vez escuchadas las ideas, se les preguntará en qué se han basado para reconstruir la figura completa a partir de la dada. Se les hace ver entonces que han considerado implícitamente que uno de los bordes de la figura era un eje de simetría. Se preguntará qué verifica dicho eje respecto a los lados de la figura y respecto a los vértices, lo que se tratará de evidenciar mediante GeoGebra (10 minutos). • Se definirán los conceptos de mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo, así como el de perpendicular a una recta (10 minutos). • Construcción geométrica y demostración guiada: se propone construir con GeoGebra la mediatriz de un segmento dado. El proceso de construcción debe desembocar en las siguientes conclusiones: ➤ Por cada punto y cada recta, existe una única perpendicular a la recta que pase por dicho punto. ➤ La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento. (30 minutos) • Se propondrá a los alumnos que traten de enunciar por sí mismos un teorema análogo al anterior, pero para la bisectriz de un ángulo convexo, en lugar de para la mediatriz de un segmento. (10 minutos).	
Metodología y tipo de actividades: • Metodología activa combinada con transmisiva y aprendizaje dialógico. • Actividad de ABP. • Uso de las TIC.	

Sesión 7: Resultados fundamentales sobre triángulos y paralelogramos	
Contenidos: 1.2, 1.3, 1.6, 3.1, 3.2	Objetivos: 3, 4, 5, 6
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD	Criterios de evaluación:
Desarrollo de la sesión: • Se expondrá en la pizarra digital mediante GeoGebra el siguiente hecho: dos rectas cortadas por una tercera son paralelas si, y sólo si, los ángulos internos que determinan son iguales dos a dos. (5 minutos) • Demostración guiada: los ángulos interiores de un triángulo suman 180 grados. En parejas y usando GeoGebra, los alumnos deberán determinar este hecho haciendo uso del resultado que acaba de ser expuesto en clase. (25 minutos).	

- Propuesta de demostración dialogada: gracias al teorema anterior, conocidos dos ángulos internos de un triángulo podemos conocer el tercero. Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales dos a dos, ¿son entonces iguales? ¿Hará falta alguna condición extra para asegurar este nuevo criterio de congruencia? Se pretende finalmente que el diálogo desemboque en el criterio ángulo-lado-ángulo. (15 minutos) - Se recuerda la definición de paralelogramo y se evidencia una propiedad útil del mismo: sus diagonales se cortan en su punto medio. Este hecho se constatará mediante un recurso de GeoGebra. (15 minutos).
Metodología y tipo de actividades: - Metodología transmisiva y fomento del aprendizaje dialógico. - Aprendizaje Basado en Problemas. - Uso de las TIC.

Sesión 8: Teorema de Tales	
Contenidos: 1.2, 1.3, 1.6, 3.3	Objetivos: 1, 3, 5
Competencias clave: CCL, CMCT, CAA, CD	Criterios de evaluación: 1.1, 1.4, 1.8, 1.11, 3.2
Desarrollo de la sesión: - Se propondrá a los alumnos la siguiente reflexión: hasta ahora, hemos visto el criterio de congruencia lado-lado-lado y el ángulo-lado-ángulo, pero, ¿qué ocurre, por ejemplo, cuando sabemos que dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales dos a dos? ¿Es suficiente para asegurar que los triángulos son iguales? Una vez oídas las opiniones de los alumnos, se apoyará esta exposición con algunos ejemplos realizados con GeoGebra para evidenciar que no se puede asegurar la igualdad. (10 minutos). - Se explicará el concepto de semejanza de triángulos en base a la exposición anterior. Además, se explicará el concepto de triángulos en posición de Tales. (10 minutos). - Actividad de manipulación y demostración guiada con GeoGebra: se animará a los alumnos a constatar de manera guiada que dos triángulos que están en posición de Tales son semejantes, es decir, comprobarán el teorema de Tales. (30 minutos). - Actividad de división de un segmento en partes proporcionales (10 minutos).	
Metodología y tipo de actividades: - Aprendizaje dialógico con exposición transmisiva. - Actividades de ABP. - Uso de las TIC.	

Sesión 9: Aplicaciones del teorema de Tales y teorema de Pitágoras	
Contenidos: 1.2, 1.5, 3.3	Objetivos: 3, 5
Competencias clave: CCL, CMCT, CD, CEC	Criterios de evaluación: 1.2, 1.6, 1.7, 3.2, 3.3
Desarrollo de la sesión: - Se recordará el teorema de Tales durante los primeros minutos de la sesión (5 minutos). - Para hacerse una idea del impacto cultural del teorema, se escuchará mediante un vídeo de YouTube el tema musical <<Teorema de Tales>>, del grupo Les Luthiers. Se preguntará a continuación qué les parece la obra y si ven que el teorema está bien representado por la misma (5 minutos).	

- El profesor resolverá detenidamente y con todo detalle un par de ejercicios relacionados con el teorema de Tales, dejando a continuación tiempo para que los alumnos resuelvan otro par análogos para practicar. (25 minutos). - Se enunciará el teorema de Pitágoras. (5 minutos). - Demostración visual guiada del teorema de Pitágoras. (20 minutos).
Metodología y tipo de actividad: - En esta sesión prima más la metodología transmisiva que en otras aunque se intenta aliviar este hecho con el uso de un recursos audiovisual. - Realización de ejercicios de repetición mecánica. - Uso de las TIC.

Sesión 10: Transformaciones en el plano y coordenadas geográficas	
Contenidos: 1.5, 3.4, 3.5	Objetivos: 5, 7
Competencias clave: CMCT, CD, CEC	Criterios de evaluación: 1.2, 1.11, 3.4, 3.5, 3.6
Desarrollo de la sesión: - Se expondrán los conceptos de traslación, simetría y rotación mediante un recurso de GeoGebra sobre un mosaico. (5 minutos). - Se propone una actividad donde deberán identificar transformaciones como las anteriores sobre otros mosaicos. (15 minutos). - Repaso de los polígonos regulares y los poliedros regulares mediante un recurso de GeoGebra, identificando centros, ejes y planos de simetría de los mismos. (10 minutos). - Se propondrán para su resolución ejercicios de cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. (15 minutos). - Explicación de las coordenadas geográficas sobre un recurso de GeoGebra (15 minutos)	
Metodología y tipo de actividad: - Metodología transmisiva apoyada por el uso de las TIC. - Realización de ejercicios de repetición mecánica.	

Sesión 11: Prueba de evaluación escrita individual	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 3.2, 3.3, 3.4	Objetivos: 2, 3, 4, 6
Competencias clave: CCL, CMCT, SIEP	Criterios de evaluación: 1.1, 1.2, 1.6, 1.9, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6
Desarrollo de la sesión: - Se realizará una prueba de evaluación individual por escrito para comprobar si los alumnos han alcanzado los objetivos deseados. (60 minutos). - El profesor revisará los cuadernos de demostraciones y construcciones geométricas.	
Metodología y actividades: Actividad de evaluación individual.	

Sesión 12: Resolución de dudas, ampliación y refuerzo	
Contenidos: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 3.2, 3.3, 3.4	Objetivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6
Competencias clave: CCL, CMCT, CSC	Criterios de evaluación: 1.1, 1.2, 1.6, 1.9, 1.12, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6

Desarrollo de la sesión: • Corrección grupal del examen y resolución de dudas (30 minutos). • Actividades de refuerzo y ampliación (30 minutos).
Metodología y tipo de actividad: • Actividades de refuerzo y ampliación.

7 Conclusiones

Las distintas partes que integran este Trabajo de Fin de Máster pueden tener un papel revelador para cualquier persona que no esté relacionada, al menos en cierto grado, con la profesión docente.

El proceso de transposición didáctica que ha de tener lugar para que se complete el aprendizaje de los conocimientos se muestra como un acontecimiento diverso, laborioso y con múltiples facetas.

De este modo, se evidencia cómo la enseñanza y aprendizaje de una materia no se reduce en forma alguna a la simple exposición de los contenidos, sino que la transmisión ha de prepararse y construirse, tanto desde el punto de vista del docente como del discente.

Así, las distintas fases del proceso, que han sido fundamentadas y detalladas en la redacción del documento, aparecen como un fenómeno especialmente creativo: desde la selección de contenidos hasta la adaptación de los mismos y de la propia metodología a unos alumnos concretos en un contexto particular, pasando por la elección de la propia metodología, el uso que se haga de los recursos materiales y humanos disponibles, etc.

De hecho, el enfoque que se ha escogido para la metodología de la unidad didáctica es solo uno de los muchos que es posible aplicar. La validez de los mismos dependerá siempre de la situación en la que nos encontremos como docentes, siendo siempre necesario efectuar cambios sobre la planificación y proponer mejoras de cara a otros contextos.

Siendo esto así, a la metodología propuesta en este documento basada en las demostraciones geométricas se le pueden atribuir una serie de virtudes en relación a la formación del alumnado: estimulación de la capacidad de razonamiento y pensamiento crítico, mejora de la capacidad para manejar objetos geométricos e inferir propiedades de los mismos y acercar las matemáticas al alumnado con dificultades a través de la conexión que brinda la geometría entre pensamiento abstracto, habilidad manual y la comprensión de conceptos a través de la visualización de los mismos.

Por otro lado, el enfoque también puede encontrar obstáculos en su aplicación: las demostraciones siempre requieren un nivel de esfuerzo y atención muy superior al de la mayoría de actividades que se suelen plantear en otros estilos de enseñanza y aprendizaje. Esto puede generar apatía y poca adherencia al método, sobre todo teniendo en cuenta que lo más común es que la mayoría de ellos no estén habituados al tipo de tareas sugeridas. Así mismo, incluir demostraciones en la educación matemática media implica dedicar menos tiempo a otros aspectos como la conexión entre las matemáticas y el mundo que nos rodea o la aplicación a otras ciencias.

Una manera de paliar estos inconvenientes y seguir aprovechando las ventajas es intentar crear metodologías mixtas. Se pueden incluir algunas pruebas matemáticas atendiendo a criterios como la riqueza de razonamientos y adaptabilidad a la diversidad

de alumnos que nos podemos encontrar en lugar de escogerlas por la relevancia de los resultados.

De este modo, se podría partir de una situación real, plantear un problema a resolver y permitir a los alumnos que indaguen sobre la situación de manera autónoma, enfrentándose a los impedimentos que les puedan surgir. A continuación, se les haría ver que contar con las herramientas adecuadas puede facilitar enormemente la resolución de un problema y se les acercarían conceptualmente tales herramientas, que no son otra cosa que teoremas. Cabe destacar que, para una aproximación más natural a los resultados matemáticos, conviene partir del problema y alcanzar el objetivo (la tesis del teorema) generando entonces la cadena de argumentos (construcciones en nuestro caso), es decir, conviene seguir el orden inverso al que suelen seguir los manuales clásicos de matemáticas, que suelen ser muy manejables para profesionales, pero poco útiles en el sentido pedagógico.

En definitiva, podemos destacar que el análisis llevado a cabo en el Trabajo de Fin de Máster permite establecer una doble conclusión: es posible defender con entusiasmo una posición didáctica y aceptar con agrado la diversidad de alternativas a la misma que existan y que cubran las carencias de la propia.

Bibliografía

- Balacheff, N (1988). Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble – INPG; Université Joseph – Fourier – Grenoble I.
- Brousseau, G (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Castillo, M. J., Burgos, M., & Godino, J. D. (2021). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 47, 1-21.
- Chevallard, Yves (1998). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado (3a ed.). AIQUE.
- Delibes, Alicia (2001). Las Matemáticas y la LOGSE. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 4(1), 11-15.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 127-135.
- Gutiérrez, A. (2005). Aprendizaje de la demostración matemática en enseñanza secundaria. En Luque, C.J. y otros (Eds.), *Memorias del XV Encuentro de Geometría y III Encuentro de Aritmética* (vol. 2, pp. 573-593). Universidad Nacional de Colombia.
- Guzmán, Miguel de (1980). La enseñanza de las matemáticas. *Revista de Bachillerato*, suplemento del nº13, 29-30.
- Guzmán, Miguel de (2007). Enseñanzas de la ciencia y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43(1), 19-58.
- Ivorra, Carlos (2021). Introducción a la geometría euclídea. <https://www.uv.es/ivorra/Libros/IGE.pdf>
- Klein, Felix (1939). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Geometry*. (3a ed.). Dover Publications.
- Kline, Morris (1998). El fracaso de la matemática moderna: Por qué Juanito no sabe sumar (18a de.). Siglo XXI Editores.
- Puig, Pedro (1963). *Matemáticas para el Curso Preuniversitario*. Biblioteca Matemática.
- Vargas, G., Gamboa, R. (2013). La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del Geogebra, según el modelo de Van Hiele. *Uniciencia* 27(1), 95-118.

Anexo: Cuaderno de construcciones y demostraciones

Una de las actividades que se proponen es la confección de un cuaderno donde los alumnos deberán registrar las construcciones geométricas y demostraciones guiadas que van realizando durante las sesiones de la unidad didáctica.

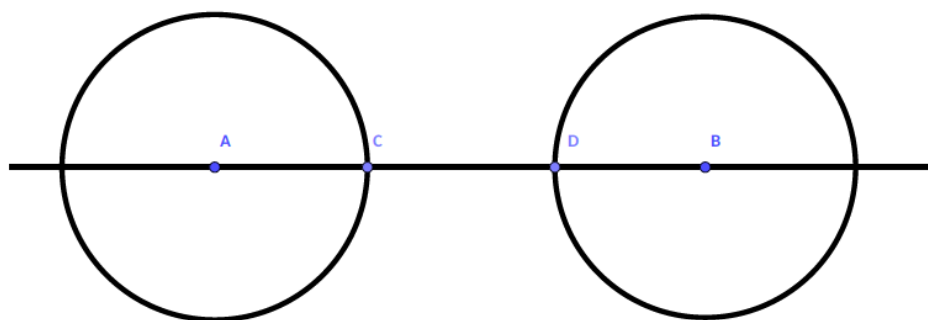
El objetivo de este cuaderno es doble: por un lado, se pretende que los alumnos mejoren su manejo del lenguaje matemático al tener que dejar por escrito los procedimientos de construcción. Por otro lado, el cuaderno les servirá como un diario de clase, especialmente útil al tener que volver sobre construcciones anteriores para elaborar nuevas, sin necesidad de buscar las mismas entre otros ejercicios o apuntes que pueden confundir a los alumnos.

Finalmente, el cuaderno constituirá el producto del aprendizaje activo de los alumnos, de manera que lo tengan como referencia del conocimiento que ellos mismos han construido.

a) Posición relativa de circunferencias

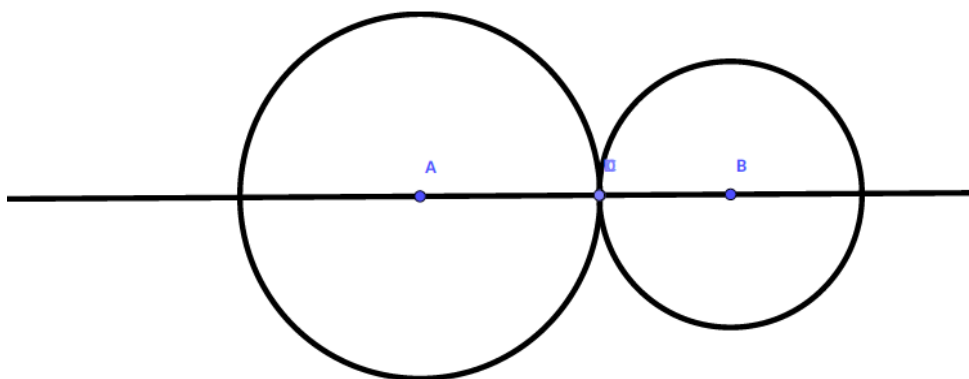
En la sesión de hoy hemos estudiado las posibles posiciones relativas de dos circunferencias. Usaremos GeoGebra para determinar si, efectivamente, las posiciones estudiadas son todas las posibles y qué relación hay entre las circunferencias en cada caso.

- 1) Dibuja una recta cualquiera en el plano. Esta recta nos servirá de referencia para situar las dos circunferencias cuya posición relativa queremos estudiar.
- 2) Seleccionemos los centros de nuestras circunferencias. Para ello, con la herramienta correspondiente del menú, seleccionaremos dos puntos, A y B , sobre la recta que hemos creado.
- 3) Determinemos los radios de cada circunferencia. De nuevo, seleccionaremos un par de puntos, esta vez sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$: un punto C y un punto D .
- 4) Trazamos la circunferencia de centro A y radio $\overline{AC}$ y la circunferencia de centro B y radio $\overline{BD}$:



- 5) Llamaremos ahora r_1 al radio $\overline{AC}$ y r_2 al radio $\overline{BD}$.

- 6) Vamos a investigar qué relación hay entre la distancia entre los centros de las circunferencias y sus radios, es decir, entre $\overline{AB}$ y r_1 y r_2 , que como se ve en la imagen están contenidos en $\overline{AB}$.
- 7) ¿Cómo deben ser estos radios para que las circunferencias sean tangentes? Para deducirlo, juega con las circunferencias aumentando y disminuyendo su radio, de manera que el punto C se encuentre con el punto D , convirtiéndose en el punto de tangencia de las circunferencias.



- 8) Debe verificarse una relación como la siguiente:

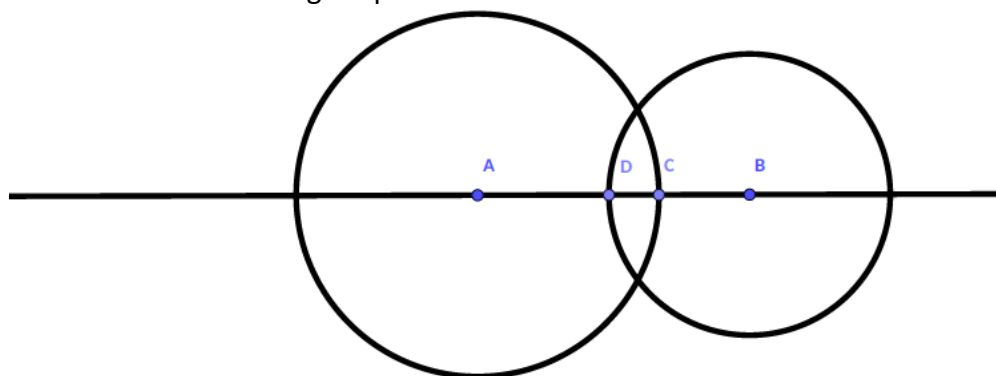
$$(\quad) + (\quad) = (\quad).$$

Trata de colocar en cada hueco los elementos r_1 , r_2 y $\overline{AB}$ teniendo en cuenta lo que ves en GeoGebra.

- 9) Vuelve ahora a la posición original en la que no había puntos comunes. ¿Qué relación guardan entonces r_1 , r_2 y $\overline{AB}$? Colócalos en los huecos siguientes:

$$(\quad) + (\quad) < (\quad).$$

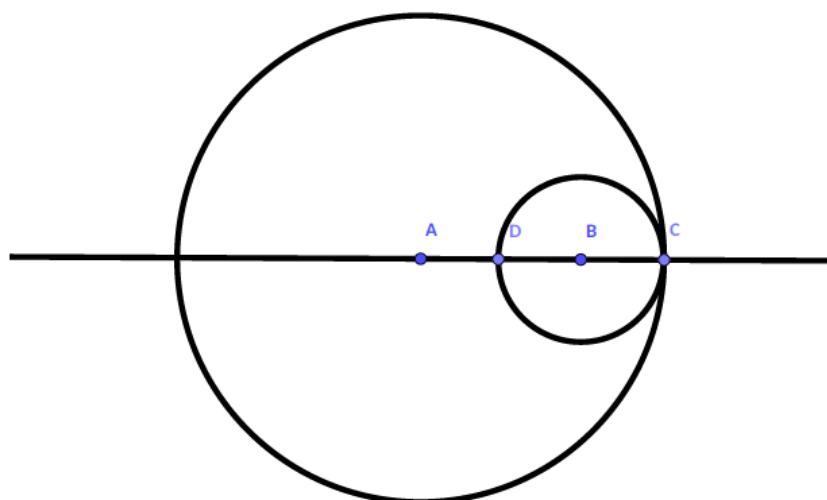
- 10) Llevemos ahora la situación un paso más allá: mueve el punto C a lo largo de la recta hasta conseguir que las circunferencias sean secantes.



¿Qué ocurre ahora con los radios y la distancia entre los centros? Coloca los elementos:

$$(\quad) + (\quad) > (\quad).$$

- 11) Continuemos desplazando el punto C a lo largo de la recta hasta que vuelva a cortar a la otra circunferencia:

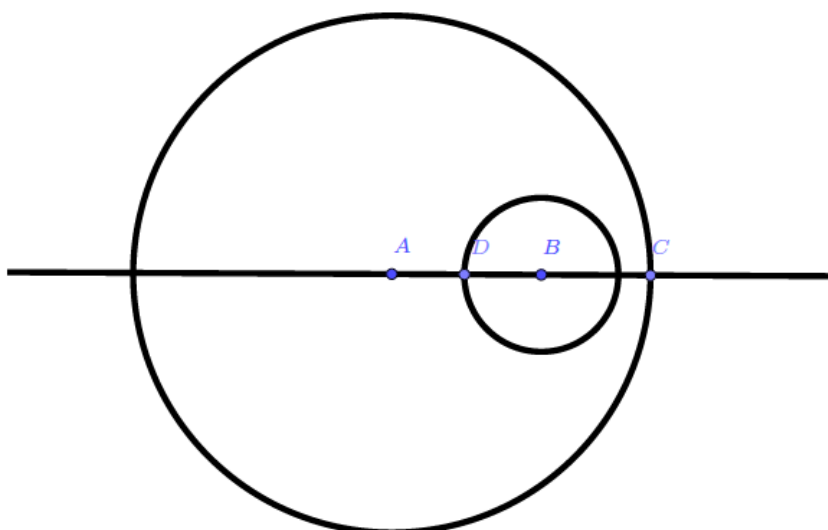


- 12) Observa que vuelven a ser tangentes pero, ¿se cumple la misma relación que en el caso de tangencia anterior?

Coloquemos los radios y $\overline{AB}$ en la siguiente relación:

$$(\quad) - (\quad) = (\quad).$$

- 13) Continuemos desplazando el punto C . Las circunferencias vuelven a dejar de ser tangentes y vuelve a aparecer una situación como la de partida:



De nuevo, aunque las circunferencias no se cortan, ¿verifican las mismas condiciones que la primera?

Coloca los elementos en los huecos correspondientes:

$$(\quad) - (\quad) > (\quad).$$

- 14) Reunamos toda la información anterior en un teorema sobre la posición relativa de dos circunferencias:

Teorema 1. Consideremos una circunferencia de centro A y radio r_1 y una circunferencia de centro B y radio r_2 . Supongamos que los radios verifican que $(\quad) \leq (\quad)$. Se tiene entonces que las circunferencias son:

- 1) Tangentes, si se verifica alguna de las situaciones siguientes:

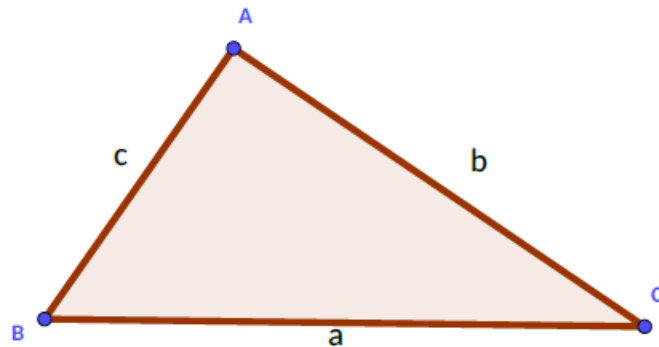
- $(\quad) + (\quad) = (\quad)$.

- $(\quad) - (\quad) = (\quad)$.
- 2) *Secantes*, si se verifica que $(\quad) + (\quad) > (\quad)$.
- 3) *Disjuntas*, si se cumple alguna de las situaciones siguientes:
- $(\quad) + (\quad) < (\quad)$.
 - $(\quad) - (\quad) > (\quad)$.

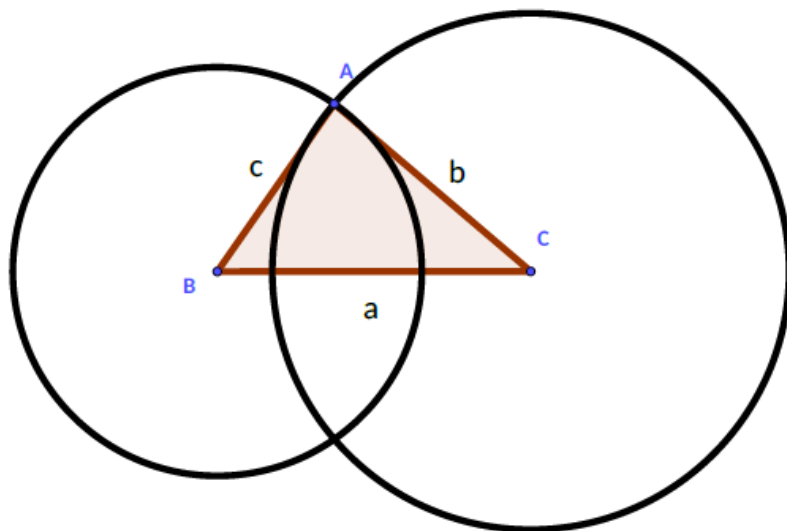
b) Relación entre los ángulos de un triángulo

En esta actividad vamos a comprobar que los lados de un triángulo cualquiera siempre guardan una propiedad interesante.

- 1) Dibujemos un triángulo cualquiera, $\triangle ABC$, con la herramienta <<Polígono>>:



- 2) Dibujemos una circunferencia de centro B y radio c .
- 3) Dibujemos otra circunferencia de centro C y radio b .



- 4) Como puedes comprobar, ambas circunferencias se intersectan en el tercer vértice, A . ¿Depende esta propiedad del triángulo elegido? Modifica el triángulo de múltiples maneras para constatarlo.
- 5) Puesto que las dos circunferencias se cortan en el vértice A , ¿qué posición relativa tienen? ¿Qué podemos decir entonces de ambas circunferencias? Consulta el teorema que elaboramos en la actividad anterior para saberlo.

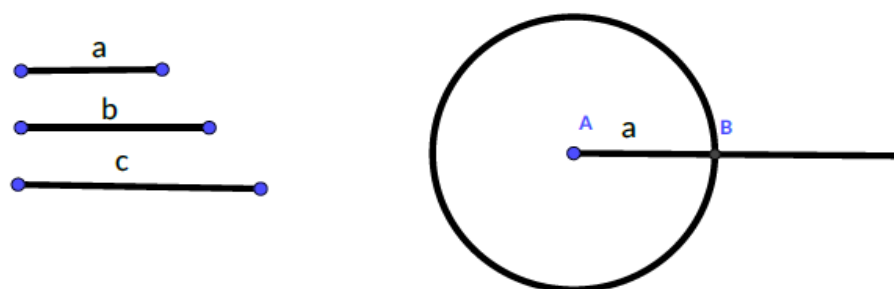
- 6) Pasemos a identificar cada elemento según aquel teorema. Rellena los huecos observando la figura que has obtenido:
 - El radio r_1 es el lado () del triángulo.
 - El radio () es el lado () del triángulo.
 - El segmento () es el lado () del triángulo.
- 7) Sin embargo, todo lo que hemos hecho no depende del triángulo elegido ni de los vértices elegidos, es decir, la desigualdad anterior la podemos repetir intercambiando los lados del triángulo.
Esto nos permite enunciar nuestro nuevo teorema:

Teorema 2. En un triángulo, cualquiera de sus () es () que la suma de los otros dos lados.

c) Criterio de congruencia lado-lado-lado

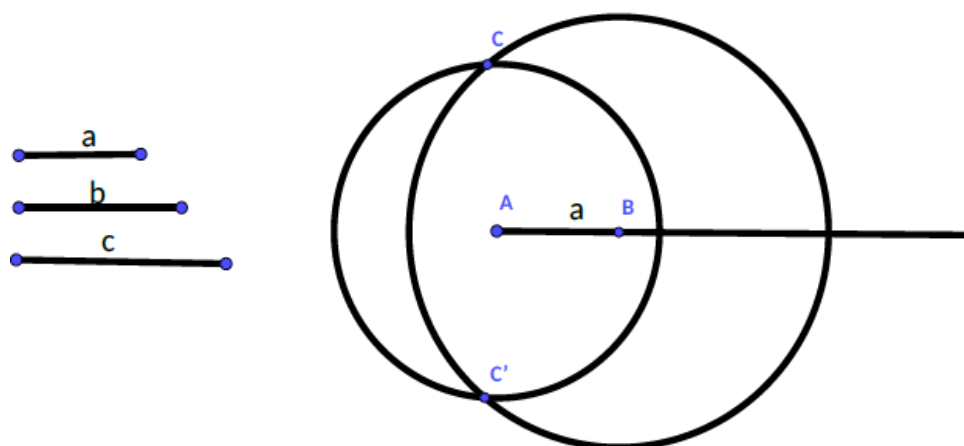
Esta actividad está dedicada al estudio del criterio de congruencia lado-lado-lado que hemos visto en la sesión de hoy.

- 1) Dibujemos tres segmentos distintos cualesquiera. El objetivo es construir un triángulo que tenga por lados dichos segmentos.
- 2) Para tener una referencia, dibujaremos una semirrecta de origen A .
- 3) A continuación, elegimos cualquiera de los segmentos y lo trasladamos sobre la semirrecta, de manera que uno de sus extremos coincida con A . Para ello, usaremos la herramienta <<Compás>>, pinchando en los extremos del segmento que queremos trasladar y pinchando a continuación en A . Se dibujará una circunferencia cuyo radio coincida con el segmento que queremos transportar. Ahora, con la herramienta Intersección obtendremos el punto de corte entre la circunferencia y la semirrecta. El segmento que determinan A y el punto de corte es el que buscamos.

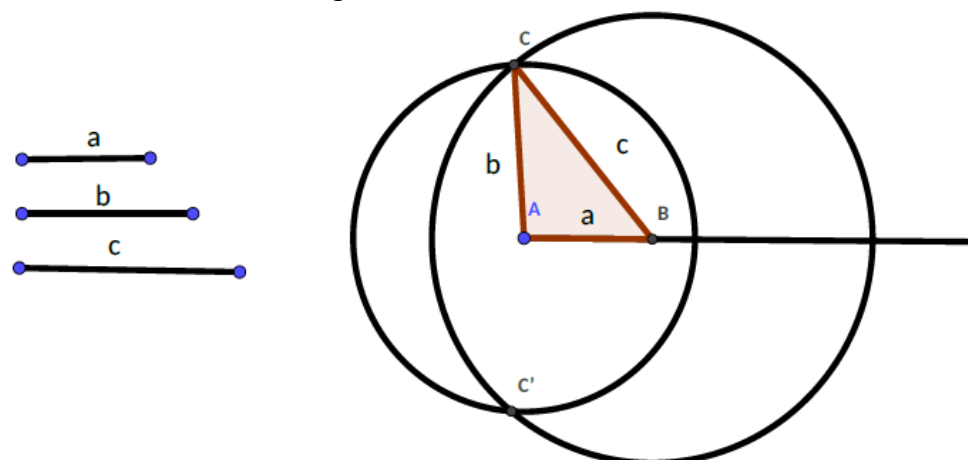


- 4) Hagamos invisible la circunferencia para que la construcción sea más clara: haciendo clic con el botón derecho del ratón sobre la circunferencia se despliega un menú donde podremos deseleccionar la opción <<Mostrar el objeto>>.

- 5) Ahora seguiremos pasos similares. Con la herramienta <<Compás>>, pincharemos en los extremos de ambos segmentos y a continuación pincharemos sobre A . La circunferencia obtenida tiene centro A y radio b .
- 6) Repitamos los pasos anteriores, pero con el tercer segmento: pincharemos en sus extremos y a continuación pincharemos en el punto B . La circunferencia obtenida tiene centro B y radio c .



- 7) Es momento de consultar la construcción de la sección (b). Sabemos que los puntos de intersección de ambas circunferencias (C y C') determinan el tercer vértice de un triángulo.



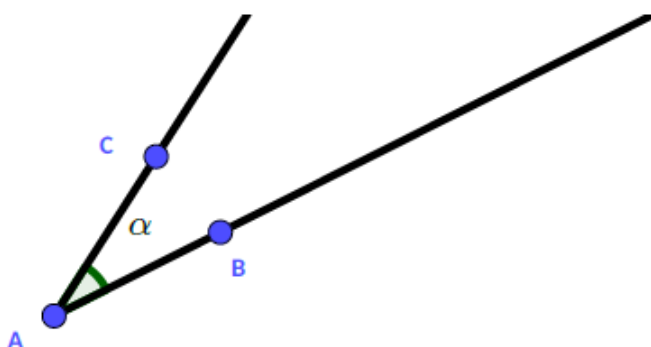
- 8) Este triángulo tiene por lados los tres segmentos que habíamos prefijado al principio ya que b es el radio de la circunferencia de centro A y c es el radio de la circunferencia de centro B .
- 9) ¿Es este el único triángulo que podemos dibujar con los puntos que disponemos? Observemos el punto C' . ¿Es posible construir otro triángulo con él y los puntos A y B ? ¿Sus lados serían a , b y c entonces?
- 10) Este método de construcción nos lleva a enunciar:

Teorema 3. (Criterio lado-lado-lado). Si los lados de dos triángulos son iguales dos a dos, entonces dichos triángulos son iguales.

d) Transporte de ángulos

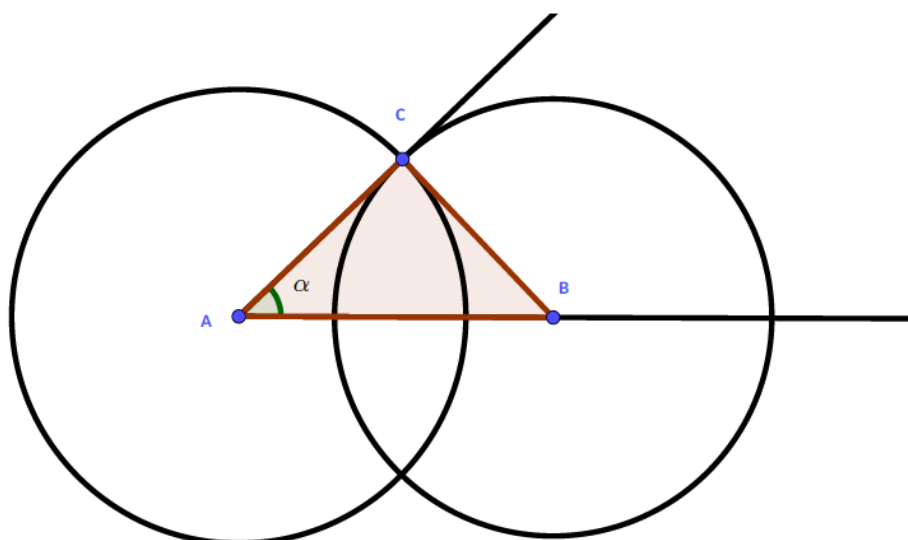
Dado un cierto ángulo, veamos cómo podemos transportarlo por el plano.

- 1) Dibujemos un ángulo cualquiera con GeoGebra. Tracemos dos semirrectas con origen común. Ahora con la herramienta Ángulo pinchamos en ambas semirrectas en sentido antihorario para determinar el ángulo correspondiente.



- 2) Para saber dónde queremos transportar el ángulo, dibujaremos una semirrecta en plano.
- 3) La idea ahora es construir sobre la semirrecta el triángulo de lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Para llevarlo a cabo, basta con repetir el proceso seguido en la construcción (c). Para ello, hay que identificar cada segmento con uno de los segmentos de (c) y volver a seguir los pasos:

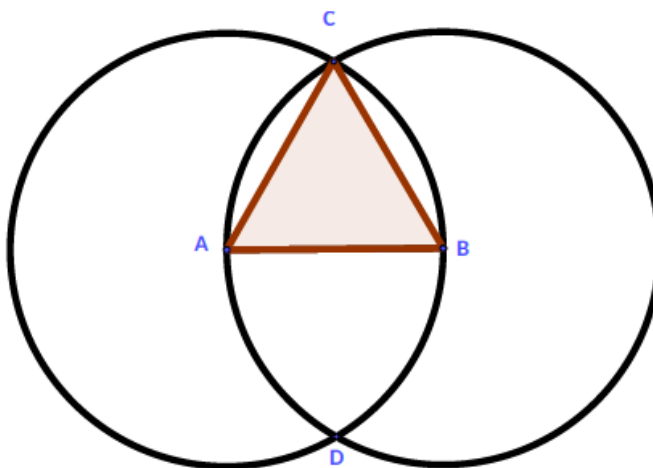


- 4) El ángulo α , correspondiente al vértice A, tiene la misma amplitud que el original, pero lo hemos transportado sobre la semirrecta deseada.

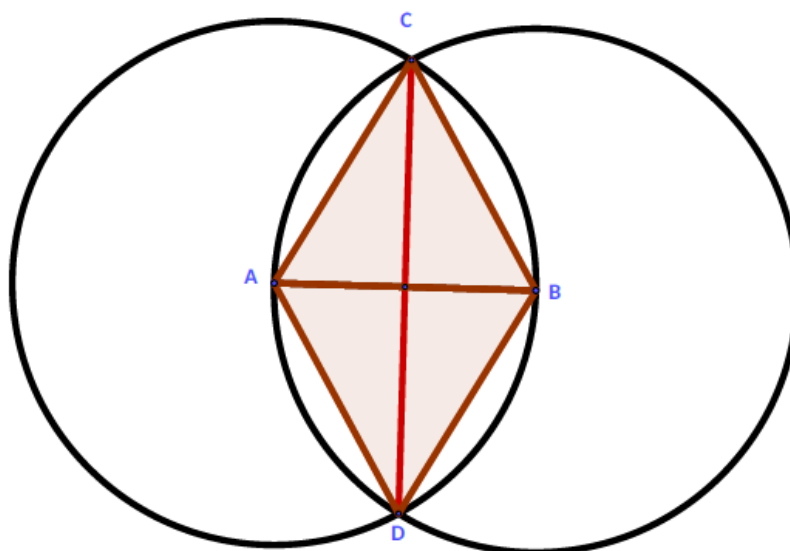
e) Mediatriz de un segmento

Calcularemos la mediatriz de un segmento dado.

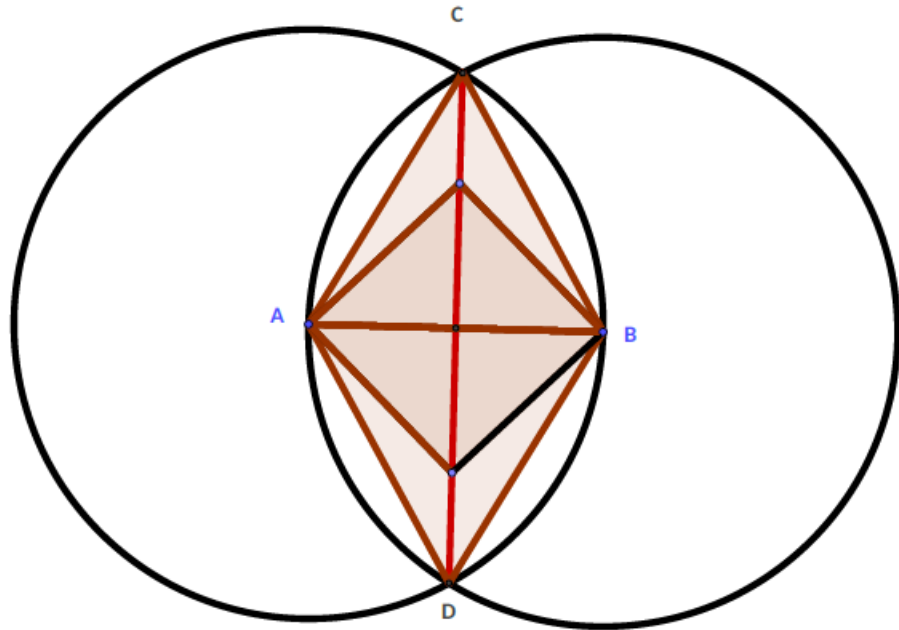
- 1) Dibuja un segmento en el plano.
- 2) Nuestro objetivo es dibujar un triángulo equilátero a partir de dicho segmento. Para ello, usaremos lo aprendido en la sección (c), tomando los tres segmentos iguales:



- 3) Como comentamos en (c), podemos formar también otro triángulo igual al anterior con vértices A, B y D .
- 4) Tracemos ahora el segmento que une los puntos C y D .



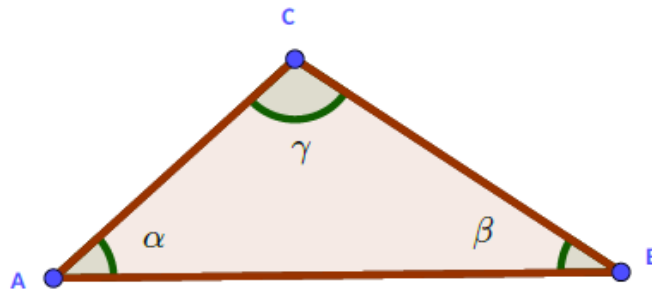
- 5) ¿Es el segmento $\overline{CD}$ la mediatriz de $\overline{AB}$? Fíjate en lo que ocurre con los triángulos a derecha e izquierda de $\overline{CD}$. ¿Qué propiedad verifica?
- 6) ¿Era necesario que el triángulo construido fuese equilátero? Prueba a repetir la misma construcción usando dos segmentos iguales pero distintos al primero. ¿Qué tipo de triángulo se obtiene?



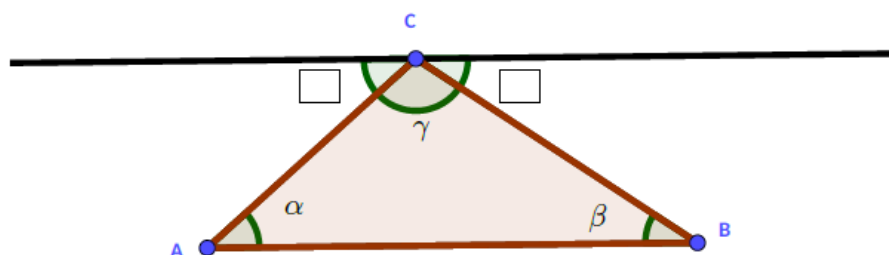
- 7) Observa que con otros tipos de triángulos se obtiene la misma mediatriz. ¿Qué característica común tienen todos estos triángulos? ¿Qué relación guardan los puntos de la mediatriz respecto a los extremos A y B ?

f) Los ángulos interiores de un triángulo suman 180 grados

- 1) Dibuja un triángulo cualquiera en el plano.
- 2) Para determinar sus ángulos, pinchamos con la herramienta Ángulo sobre el triángulo.



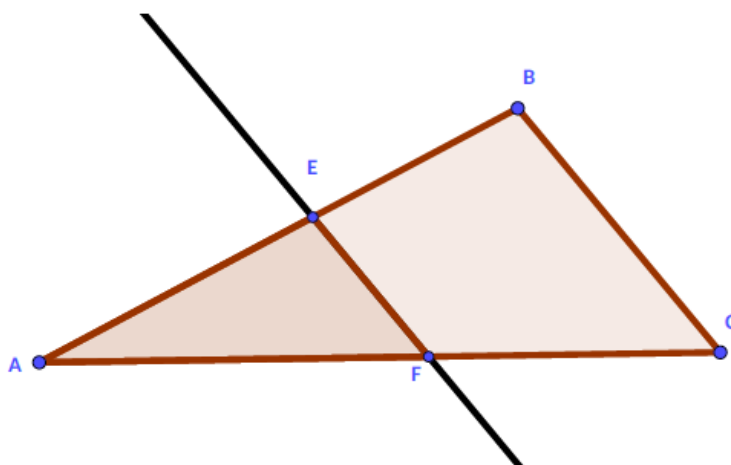
- 3) A continuación, dibujamos una paralela al lado $\overline{AB}$ que pase por el vértice C . Para ello, con la herramienta Paralela pinchamos en dicho segmento para pinchar después en el punto C .



- 4) En clase hemos visto que los ángulos alternos internos son iguales. Usando este hecho, rellena los huecos para cada ángulo, ¿a qué ángulos del triángulo son iguales?
- 5) Calcula con la herramienta <<Ángulo>> los otros dos ángulos restantes que aparecen en la figura anterior.
- 6) Comprueba tus respuestas con GeoGebra moviendo los vértices para modificar el triángulo y viendo que las igualdades se mantienen.
- 7) ¿Cuánto suman los tres ángulos con origen en C ? ¿Siempre suman la misma cantidad? ¿Por qué? ¿Qué relación tiene con la paralela que hemos dibujado?

g) Teorema de Tales

- 1) Dibuja un triángulo cualquiera en el plano.
- 2) Selecciona uno de los lados. Con la herramienta <<Paralela>>, trazamos una paralela al lado seleccionado que corte a los dos lados restantes.

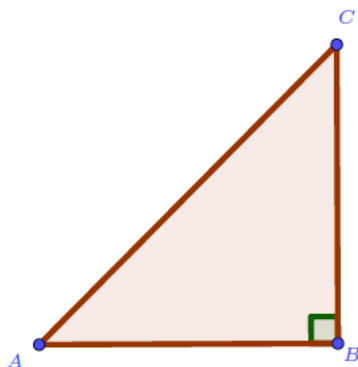


- 3) Con la herramienta Longitud, calcula la longitud de los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{AF}$, $\overline{EB}$ y $\overline{FC}$.
- 4) Usando el panel lateral, escribe las instrucciones correspondientes a los cocientes del teorema de Tales.
- 5) Para comprobar la validez del teorema, manipula el triángulo y observa que la igualdad de los cocientes se conserva siempre, independientemente del triángulo.
- 6) Comprueba todas las igualdades de cocientes posibles.
- 7) ¿Qué triángulos son semejantes?

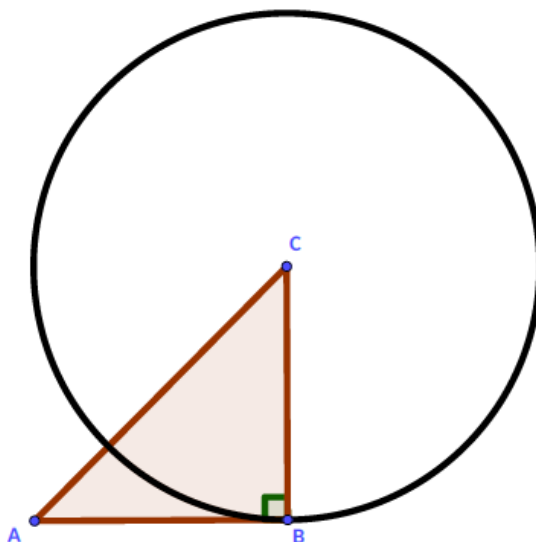
h) Teorema de Pitágoras

En esta sección vamos a comprobar la validez del teorema de Pitágoras.

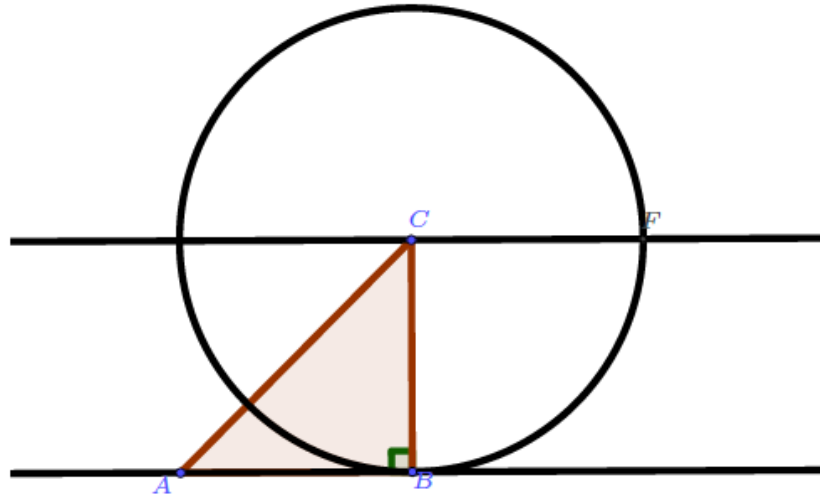
- 1) Dibuja un triángulo rectángulo cualquiera en el plano.



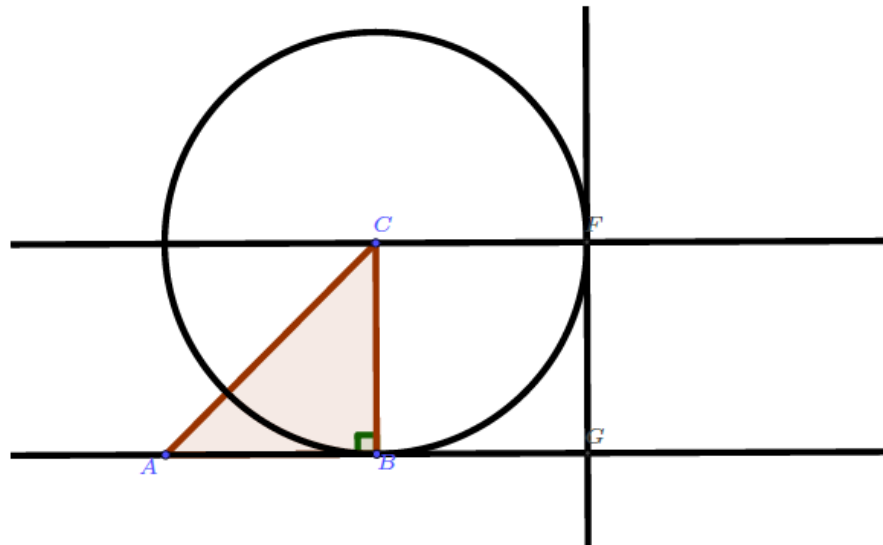
- 2) En el teorema de Pitágoras intervienen los cuadrados de cada lado del triángulo (hipotenusa y catetos). Nuestra idea es construir, sobre cada lado del triángulo, un cuadrado cuyo lado sea de la misma medida del lado seleccionado.
- 3) Seleccionemos para comenzar el lado $\overline{BC}$. Con la herramienta <<Compás>>, dibujaremos una circunferencia de radio igual a dicho lado y centro en C .



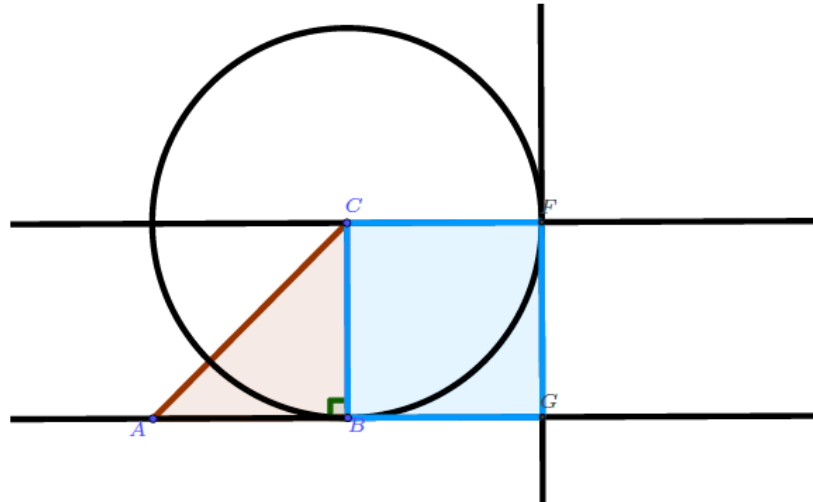
- 4) Ahora podemos trazar dos rectas: una que pase por A y por B , es decir, prolongando a dicho lado y otra que sea paralela a AB y que pase por C :



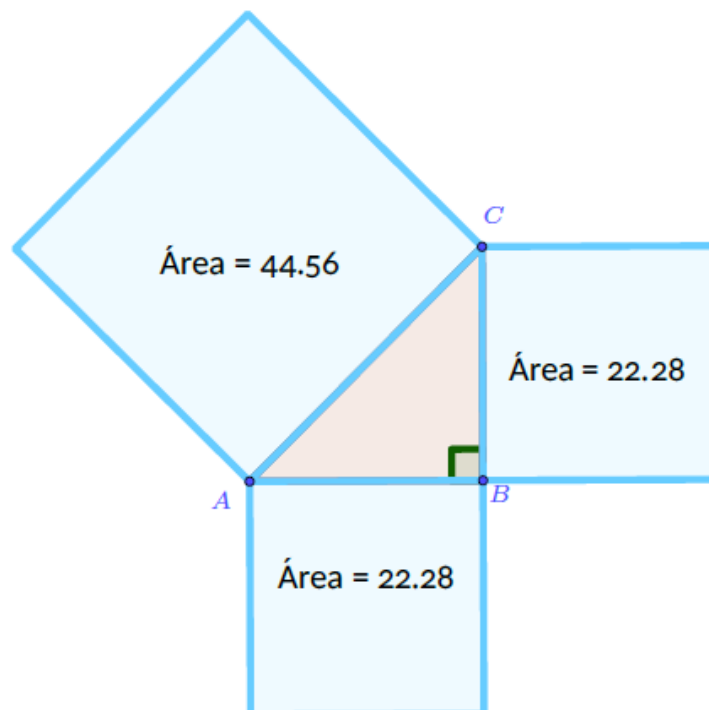
- 5) Como se puede comprobar, esta última paralela corta a la circunferencia que hemos dibujado en un punto F . El segmento $\overline{CF}$ mide lo mismo que el lado $\overline{BC}$ por ser el radio de la circunferencia.
- 6) Tracemos ahora la perpendicular a la paralela CF que pase por F (usar la herramienta <<Perpendicular>>, pinchar en la recta y pinchar en F):



- 7) Podemos dibujar ya un cuadrado sobre el lado $\overline{BC}$:



- 8) Si repetimos este mismo proceso para los tres lados, obtenemos una figura como la siguiente:



- 9) Como en el teorema de Pitágoras aparecen los cuadrados de los lados del triángulo, podemos identificar esas cantidades como áreas de cuadrados con lados iguales a los lados del triángulo.
- 10) Para comprobarlo, usamos la herramienta <<Área>>, pinchando en cada uno de los cuadrados obtenidos.
- 11) Podemos comprobar que se verifica el teorema de Pitágoras, es decir, que la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos es igual al área del cuadrado sobre la hipotenusa.
- 12) Constata que esta igualdad no depende del triángulo rectángulo elegido y se verifica siempre. Para ello, manipula el triángulo y comprueba que las

áreas cambian, pero siempre cumplen la igualdad del teorema de Pitágoras.