



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

Trabajo Fin de Grado

MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LA MÚSICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA: REFLEXIÓN Y PROPUESTA DE ACTIVIDADES

Alumno/a: Gabriel Contreras de la Torre

Tutor/a: Isabel María Ayala Herrera

Dpto.: Didáctica de la Expresión Musical, Plástica
y Corporal

Julio, 2017

RESUMEN

Este trabajo realiza una reflexión sobre los vínculos entre música y las matemáticas, a menudo olvidados, y defiende el potencial educativo de esta unión para que el alumnado de Educación Primaria pueda ser competente en diversas áreas. Además aporta una bibliografía de gran utilidad para que el lector pueda juzgar por sí mismo la conexión de áreas tan aparentemente distintas como la de Matemáticas y la Música dentro de la Educación Artística y algunos hitos y tópicos históricos

La revisión de la literatura ha inspirado actividades interdisciplinares encaminadas a aprender contenidos de los distintos bloques y ciclos. Además han sido encontrados multitud de recursos metodológicos que pueden ser fácilmente adaptables a cualquier curso de Educación Primaria, y los cuales supondrían unas conexiones neurológicas grandiosas, fuera del panóptico educacional, dando así lugar a una mayor interdisciplinariedad, puesto que el Currículum actual no responde a ello. Por tanto, ¿sería posible adaptar las clases de música para el aprendizaje de contenidos puramente matemáticos?

PALABRAS CLAVE

Música, Matemáticas, Educación, Interdisciplinariedad, Números, Hertzios, Fracciones, Proporción, Intervalos, Cálculo, Acordes, Geometría.

ABSTRACT

This work reflects on the links between music and mathematics, often forgotten, and defends the educational potential of this union so that the students of Primary Education can be competent in several areas.

It also provides a bibliography of great utility with the aim that the reader can judge for himself the links that different áreas such as Mathematics and Music inside the Arts Education supposedly have.

Thanks to this bibliography, a multitude of methodological resources have been found, which can easily be adapted to any Primary Education course, and which would entail grand neurological connections, outside the educational panopticon, thus giving rise to a greater interdisciplinarity, since the Current curriculum does not respond to this.

Would it be possible to adapt music classes for learning purely mathematical content?

KEY WORDS

Music, Mathematics, Education, Interdisciplinarity, Numbers, Hertz, Fractions, Time, Proportion, Intervals, Calculation, Chords, Geometry.

ÍNDICE

1. Introducción.....	3
2. Objetivos del trabajo.....	4
3. Metodología y plan de trabajo.....	4
4. Fundamentación.....	5
4.1. Matemáticas y Música en la Historia.....	5
4.2. Una perspectiva pedagógica.....	19
4.2.1. El ritmo en las matemáticas.....	20
5. Aplicación didáctica.....	24
5.1 Base legal.....	24
5.1.1. Objetivos.....	25
5.1.2. Contenidos.....	28
5.1.3. Orientaciones metodológicas.....	29
5.1.3.1. Propuesta de actividades.....	30
5.1.3.2. Análisis de los recursos existentes.....	37
5.1.4. Evaluación.....	37
6. Conclusiones.....	39
6.1. Prospectiva.....	39
7. Bibliografía.....	40
8. Anexos.....	41
8.1. Anexo I: recursos de música y matemáticas.....	41

Lista de ilustraciones y tablas

Ilustración 1: Segmentos pitagóricos de una cuerda	6
Ilustración 2: Escala diatónica	8
Ilustración 3: Teorema de Pitágoras	11
Ilustración 4: Círculo de quintas.	12
Ilustración 5: Onda sonora medida en la frecuencia de 1 Hz	15
Ilustración 6: Frecuencias de las notas musicales.	16
Ilustración 7: J. S. Bach, <i>Toccatà and Fugue in re menor</i> . Representación gráfica del minuto 1'32'' con el programa Music Animation Machine	17 22
Ilustración 8: Ejemplo de composición de tres ritmos con la aplicación Groove Pizza.	24
Ilustración 8: Figuras musicales y equivalencias matemáticas según sistema de relación binario	
Ilustración 9: Acorde de Re Mayor en partitura	31
Ilustración 10: Mástil de guitarra	32
Ilustración 11: Espectro de frecuencia de una caja de batería desde el programa X-air de Behringer	33
Ilustración 12: Tetracordio	33
Ilustración 13: Gráfico de las frecuencias que corresponden a cada nota de un acorde	34
Tabla 1: Correspondencia por orden entre las consonancias y las proporciones	7
Tabla 2: Vinculación de los objetivos de Música y Matemáticas	26
Tabla 3: Vinculación de los contenidos de Música y Matemáticas	28
Tabla 4: Intervalos musicales (actividad)	30
Tabla 5: Vinculación de los criterios de evaluación.	37

1. INTRODUCCIÓN: EN CONTRA DEL PANÓPTICO EDUCACIONAL

Hoy en día, la música está quedando casi relegada a lo profesional, fuera de la educación, y debido a que la legislación vigente (RD 126/2014) y la anterior (RD 1513/2006) han dejado a la música como algo de lo que se puede prescindir, se reduce la oportunidad de disfrutar de los beneficios (cognitivos, fisiológicos, afectivos y sociales) de la música a posibles futuros intérpretes y/o compositores. Sin embargo la Educación Musical puede ser utilizada de muchas maneras para la consecución de los objetivos de la educación obligatoria.

Este Trabajo de Fin de Grado consiste en demostrar que la Educación Musical puede ser utilizada de manera transversal, para hacer competente a un alumnado en distintos temas de la asignatura de Matemáticas, ya que algunos de ellos tienen una mayor susceptibilidad que otros para ser enseñados a través de la música. Para ello se propone, por un lado una recopilación de bibliografía acerca de la unión de las Matemáticas y la Música en la Historia y, por otro, la utilización de diferentes recursos didácticos para utilizar en clase de Educación Primaria, tanto aplicaciones en las que se fomente composición como posibles usos de la música en las matemáticas a través del tiempo. Además se ha realizado una propuesta de actividades, algunas de creación propia y otras basándose en la información obtenida.

La motivación en la elección del tema ha sido mi propia crítica de la política educativa, que de manera tradicional ha considerado la Música como una asignatura “maría”, sin ninguna o escasa relación con las demás áreas del currículum, rechazando así un currículum integrado y quedando como “asignatura pendiente” la interdisciplinariedad. Como dice Pozuelos Estrada (2000), “romper con los esquemas y modelos disciplinares resulta verdaderamente complicado ya que, a pesar de su inoperancia, son siempre sumamente resistentes al cambio” (p. 177-198), pero no por ello la Música va a quedar relegada al mero placer y la utilización para la enseñanza de unos pocos.

Aunque parezca una idea innovadora, la relación entre la música y las matemáticas ha sido investigada desde hace más de dos mil años como veremos en la fundamentación teórica. Y es que, por ejemplo, según Jauset Barrocal (2008) “estudios científicos avalan la tesis de que el aprendizaje de un instrumento musical es de gran ayuda para la comprensión de las matemáticas pues el procesamiento de ambas materias lo realizan las mismas áreas cerebrales” (p. 74). Por tanto el currículum debe mirarse

como un remolino de posibilidades en el que todas las asignaturas puedan facilitar que el alumnado sea competente de manera integrada, evitando así un “panóptico educacional”, ese que nos hace ver cada materia (celda) sesgada por los barrotes de la intolerancia curricular.

Esto es un tema que está más que probado por las metodologías alternativas al Currículum convencional. Por ejemplo, la metodología Montessori, se basa en que “cualquier ayuda innecesaria es un obstáculo para el aprendizaje”. También hay escuelas alternativas a todo ello, como el Colegio Ártica en Madrid, donde el aprendizaje por proyectos y el aprendizaje cooperativo son sus máximas bazas, aunque se siga un enfoque por competencias, para conseguir una formación integral en el alumnado. Así que esta unión matemático-musical, podría estar llevándose a cabo con el alumnado de Educación Primaria.

2. OBJETIVOS Y PLAN DE TRABAJO

Los objetivos de este Trabajo de Fin de Grado son:

- 2.1. Presentar bibliografía y principales hitos acerca de la relación de la música con las matemáticas y viceversa.
- 2.2. Seleccionar los contenidos de Matemáticas que son susceptibles de ser enseñados desde una Educación Musical.
- 2.3. Relacionar diferentes aspectos de la música con los contenidos de Matemáticas.
- 2.4. Ofrecer actividades y análisis de recursos educativos existentes a utilizar en clase de Matemáticas en Educación Primaria bajo una perspectiva metodológica de carácter musical.

3. METODOLOGÍA Y PLAN DE TRABAJO

A continuación presento las fases que he seguido para la elaboración del trabajo, así como la metodología seguida en cada una de ellas:

1. Detección del problema y planteamiento del TFG (Octubre - Noviembre)

Analizando la situación del alumnado en el Prácticum I (general), el docente en prácticas recuerda que parte del alumnado no sigue el ritmo normal de clase, le suponía un gran esfuerzo concentrarse con algunas unidades didácticas como la de “Las fracciones” por medio de una metodología de explicación/escucha y una posterior

puesta en práctica con ejercicios para casa. Esto despierta en el docente una curiosidad por buscar otras maneras de enseñar estas unidades y debido a los conocimientos adquiridos y a las habilidades musicales puestas en práctica en la mención, decide posicionarse en favor de la música para enseñar matemáticas, de manera que sea un beneficio mayor y que pueda ser utilizada en clase ordinaria de Matemáticas.

2. Revisión de la literatura (Noviembre - Marzo)

La cuestión queda clara: encontrar métodos alternativos en los que se aprenda matemáticas con música y viceversa. Existe una amplia variedad de bibliografía, estudios realizados en universidades de prestigio internacional, escuelas que ponen en práctica estos métodos diariamente, etc. Sorprende saber que no sea una idea tan original, pero es gratificante saber que sea posible trabajar de manera distinta en el área de Matemáticas.

3. Visita y familiarización a centros educativos con metodologías alternativas

El 4 de marzo de 2016 la UJA organiza un viaje al colegio Ártica en Madrid (Cooperativa de enseñanza José Ramón Otero). Allí el alumnado disfruta de unas instalaciones modernas. A lo largo de la visita la jefa de estudios nos va contando cómo se trabaja allí. “En cada clase se subraya la competencia de aprender a aprender, es decir que el alumnado aprenda por sí solo todo lo que necesita para ser un ciudadano del mañana”. “La labor del docente es la de guiarles al conocimiento”. “Nada de memorizaciones sin sentido, nada de deberes para aburrir, aprender”.

4. Redacción del informe y tutorización (marzo-julio)

La redacción se ha realizado de manera continua, sin embargo los últimos meses han servido para aprender a utilizar a fondo las normas APA, para escribir acerca de la revisión de la literatura antes mencionada, y finalizar ofreciendo una propuesta de actividades basadas en la fundamentación de este trabajo. Las reuniones con la tutora han sido espontáneas, pero muy fructíferas a lo largo del periodo de trabajo, pero han crecido conforme se acercaba la fecha de entrega de este Trabajo de Fin de Grado.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

En este apartado del trabajo se abordará la relación de las matemáticas y la música a lo largo de la Historia y a través de una perspectiva pedagógica en la que se propone una serie de aproximaciones y actividades musicales ricas en contenidos puramente matemáticos elegidas con el fin que el alumnado de Educación Primaria obtenga la competencia matemática

4.1 Matemáticas y Música en la Historia

La relación entre las matemáticas y la música no es ni mucho menos nueva (Martín Moreno, 1984; Fauvel, Flood & Wilson, 2006). Como afirma Páez Gutiérrez (2009), “la relación entre la música y las matemáticas [...] se inició por culturas antiguas como la caldea, la egipcia, la babilónica y la china, pero fueron los pitagóricos los que [...] unieron la música y las matemáticas” (p. 91)

Los pitagóricos creían que toda naturaleza era armonía que brotaba de números y utilizaron las razones numéricas y las proporciones como una forma de teorizar sobre la música, a través del gran conocido experimento del monocordio. Según Abdounur (2009), “se le atribuye a Pitágoras [569-475 a. C.] haber establecido [gracias a este experimento] la correspondencia entre los intervalos musicales y las razones matemáticas de una cuerda, descubriendo que ciertos intervalos podrían ser producidos estableciéndose razones simples $a:b$ en la cuerda” (p. 63)

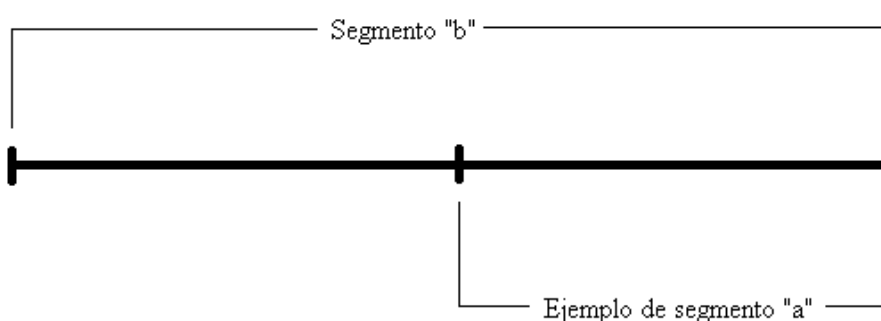


Ilustración 14: Segmentos pitagóricos de una cuerda. Elaboración propia a partir de Abdounur, 2009, p. 63.

Abdounur (2009) afirma que, a esos intervalos resultantes de las proporciones simples ($1/2$, $2/3$ y $3/4$) “se les llamaba consonancias perfectas y [...] consistían estrictamente en intervalos cuyas razones subyacentes estaban formadas solamente por pequeños números 1, 2, 3 y 4 -la Tetraktys-” (p. 63). *Grosso modo*, el experimento se

basaba en tensar una cuerda de una longitud determinada (b) y luego ir estableciendo relaciones simples dividiendo la cuerda en partes (a). Al tensar las cuerdas de longitudes más pequeñas se podía establecer una proporción entre la nota fundamental (la de mayor longitud) y las otras notas, resultando uno de los sonidos.

Según Paloma Otaola (2000), “los pitagóricos sólo admitían [...] tres consonancias simples porque eran las únicas que se hallaban en proporciones múltiples [...], dentro de los límites impuestos por la tetraktys o suma de los cuatro primeros números: $1+2+3+4=10$ ” (p. 154) Estos intervalos serían la 8ª, 5ª y 4ª, base del sistema musical polifónico hasta la aparición de las terceras

Tabla 2: Correspondencia por orden de perfección entre las consonancias y las proporciones. Fuente: Elaboración propia a partir de Otaola, 2000, p. 153.

Consonancia	Intervalo	Ratio	Proporción	Audición
Diapason	Octava	2:1	Dupla	http://www.mediafire.com/file/6m2wmex6abyh77v/Diapason+Octava+Dupla.mid
Diapente	Quinta	3:2	Sesquiáltera	http://www.mediafire.com/file/44domwl7ljs4dla/Diapente+Quinta+Sesqui%C3%A1ltera.mid
Diatessaron	Cuarta	4:3	Sesquitercia	http://www.mediafire.com/file/36jnf5279e9hjl/Diatessaron+Cuart+Sesquitercia.mid

Otaola (2000) además señala que “el sistema de clasificación variará a lo largo de la Edad Media [...]. Mientras que la octava y la quinta siempre fueron consideradas consonancias la cuarta correrá diferentes suertes, según los distintos sistemas de clasificación” (p. 154), siendo desplazada, a la postre, por la tercera (base del acorde tríada y de la armonía moderna).

Habiendo realizado relaciones de proporcionalidad con una misma nota, el siguiente paso era establecer relaciones a partir de las notas que habían resultado de aquellas. Así, los pitagóricos se percataron de que la quinta de Sol era Re por medio de la multiplicación del valor de Sol como quinta de Do ($3/2$) por él mismo, de manera que $3/2$ por $3/2$ es igual a $9/4$, pero este no es el valor que le correspondía a la nota Re. Al ser $9/4$ mayor que dos, se salía de la octava en la que estaban operando, pero como habían descubierto con anterioridad que la nota de una cuerda con su mitad era la misma nota, decidieron dividir el resultado de $9/4$ entre dos, para que estuviera dentro de la octava y llamarlo Re con el resultado final de $9/8$. Esto podía continuar mientras el resultado fuesen números enteros. Así pudieron averiguar la quinta de Re (La), siendo La igual a $27/16$, resultado de multiplicar los $9/4$ equivalentes a la quinta de una quinta (Re) por $3/2$ y dividirlo entre dos con el objetivo de mantenerlo en la misma octava

como había sido realizado con la nota Re. Así, la quinta de La (Mi), era igual a $81/64$, resultado de multiplicar los $27/16$ equivalentes a la quinta de una quinta de una quinta (La) por otra quinta ($3/2$) y dividirlo entre dos; y la quinta de Mi (Si), era igual a $243/128$, repitiendo la misma operación que las anteriores: $81/64 \times 3/2 = 243/128$.

De esta manera fue posible crear la escala ordenando los valores, porque para que estas operaciones no se pasaran de octava, era importante seguir reduciéndolas con el objetivo de que no fuesen mayores que dos. En la siguiente ilustración aparecen las notas de la escala, con las equivalencias de sus valores en fracciones y la diferencia tonal o semitonal según corresponde:

The illustration shows a musical staff in 4/4 time with a treble clef, containing the notes of the diatonic scale: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, and Do. Above the staff, the notes are labeled with their solfège names. Below the staff, the numerical ratios for each note are given as fractions, and the intervals between them are labeled as T (Tono) or ST (Semitono).

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Ratión	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
Intervalo	T	T	ST	T	T	T	ST	T

Ilustración 15: Escala diatónica. T=Tono, ST= Semitono

Esta escala era comúnmente conocida como escala jónica, sin embargo “existían en total siete modos o tonos [...]. Ellos eran el modo Dórico, el Hipodórico, el Frigio, el Hipofrigio, el Lidio y el Mixolidio, derivados de los nombres de las tribus griegas” (Toro Himiob, 1992 p. 38). Gracias a los modos, diferentes ordenaciones de notas (descendentes, en un principio), se obtenían distintas sonoridades en función de la ubicación del semitono en la escala. El conjunto de todos estos conocimientos musicales, descubiertos por los griegos y que son la base de la música occidental, responden al ideal de belleza estético-filosófico griego. Según esto, Abdunour afirma “que el experimento del monocordio representó en Grecia el inicio de una ciencia orientada hacia las matemáticas, teniendo razón y proporción como conceptos esenciales” (2009, p. 65).

Y es que la armonía consistía para los pitagóricos en algo más allá que la mera relación entre notas musicales. Según Martín Moreno (1984) “la ciencia matemático-musical recibió un extraordinario impulso [...] puesto que la base eran las proporciones numéricas que se encontraban tanto en el macrocosmos (el universo) como en el

microcosmos (el ser humano)” (tomo 4, p. 8). Sin embargo, esto no fue percibido de la misma forma en otras épocas.

En la Edad Media, aunque se la continuaba considerando como una materia más cercana a la aritmética, la geometría o la astronomía (Quadrivium), y es que, según Marcial (2015), “la música en tanto que arte liberal hemos de entenderla como el sonido en un orden matemático propio de la razón, por encima de emociones, de figuras y añoranzas que serían más propias del oído” (sección II, p. 3). Porque como bien dice el autor “la música como parte del Quadrivium es armonía antes que melodía”, es decir que la música se valora como una materia más especulativa, conceptual-racional, contrapuesto a la subjetividad de las emociones que nos sugieren esas músicas.

Aunque siglos después Willems afirma que “en la música se reúnen la ciencia matemática y la sensibilidad emotiva” (1981, p. 205), “Boecio y todos los autores de la Edad Media entienden por música no la práctica sino la teoría, [y es que] la música ahora no es considerada un arte sino una ciencia, la ciencia de los sonidos y las proporciones” (Pajares Alonso, 2014 p. 61). En la época medieval, pues, adquiere una mayor importancia el compositor, como científico que conoce las proporciones, en pos del intérprete. Es el compositor el que debe poseer grandes conocimientos musicales y filosóficos que le permitan crear una música adecuada en un contexto determinado. Sin embargo, esta es una época llena de inestabilidades causadas por las guerras, el hambre y la peste, por lo que la música quedaba relegada a la Iglesia pues, según Alsina y Sesé (1994), era “una institución que mantenía un poco de cohesión, [que] disponía de una cierta estabilidad y estructura donde poder dedicar algún tiempo a cultivar el espíritu” (p. 23). La Edad Media es una época en la que la evolución musical es muy lenta, aunque Alsina y Sesé (1994) continúan afirmando que “a la Iglesia le debemos la mínima continuidad musical con el legado de la antigüedad, como, por ejemplo, el establecimiento de los modos eclesiásticos, claramente derivados de los modos griegos” (p. 23). Sin embargo, las evoluciones en la práctica (ejemplo, desplazamiento de las cuartas a favor de las terceras en la polifonía) se impondrían cada vez más a las reglas teóricas porque hacía necesario legitimar las bases matemáticas de la teoría musical como veremos.

El Renacimiento se caracteriza por la vuelta a los elementos clásicos de Grecia y Roma. Como afirma Hernando González (2014), desde finales del siglo XV “la matemática que usan los teóricos musicales se apoya fundamentalmente en la obra de Boecio [y de] Nicómaco [que] establecían lazos muy íntimos entre teoría musical y

aritmética” (p. 92). Como ha sido señalado en este mismo apartado, la teoría musical y la aritmética se fundían en los intervalos pitagóricos como elemento principal, teniendo como principales la octava, la quinta y la cuarta, cosa que cambió, entre otros, a partir del Tratado de Ramos de Pareja *Música Práctica* (Bolonia, 1482). En este tratado, el músico, natural de Baeza (Jaén), “precisa el valor acústico [del] tercer grado menor y el tercer grado mayor [...] punto de partida para la definición del acorde perfecto y por ende, para la base de la armonía moderna” (Hernández Castelló, 2006, p. 141). Según Hernando González (2014), estos intervalos “se empiezan a utilizar en los libros de teoría musical [como] $5/4$, que corresponde a una tercera mayor y el $6/5$ [ajustándolo a las proporciones pitagóricas], que corresponde a una tercera menor, y que no aparecen en Boecio” (p. 93).

En esta época aparecen los problemas de temperamento en la afinación de instrumentos, en lo que trabajarán grandes músicos y teóricos como Fogliano, Zarlino o Salinas. Este último “procede a construir un sistema perfecto utilizando la escala justa [cuarta, quinta y octava de una nota] [...] más simétrico y armonioso” (Hernando González, 2014, p. 93), que los de los otros dos autores. Como veíamos al principio de esta fundamentación, la cuarta, la quinta y la octava tienen una relación peculiar entre sí, puesto que si se suman la cuarta y la quinta, dan lugar a la octava. Pues bien, Salinas se basa en la geometría musical, puesto que “observa que las notas, [...] que son 9, 16 y 25 corresponden a tres cuadrados sucesivos [y] que la suma de los dos primeros es igual al último, cosa que ocurre exactamente en la construcción del triángulo rectángulo” (Hernando González, 2014, p. 94), como ocurre en el teorema de Pitágoras. Trasladándonos a nuestras aulas, estos conocimientos son impartidos en clase de matemáticas desde que el alumnado conoce las potencias, puesto que consiste en que la suma de los dos catetos de un triángulo rectángulo al cuadrado deben ser iguales a la hipotenusa al cuadrado, como podemos ver en la imagen:

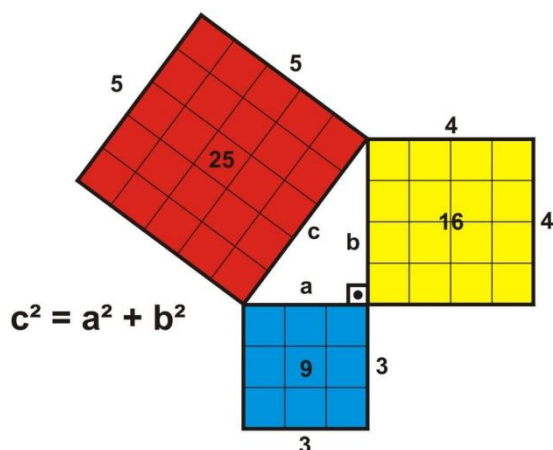


Ilustración 16: Teorema de Pitágoras. <http://teoremadepitagoras.info/>

Aunque como hemos visto “los pitagóricos sólo admitían [...] tres consonancias simples porque eran las únicas que se hallaban en proporciones múltiples [la cuarta, la quinta y la octava]” (Otaola, 2000, p. 153) basándose en la aritmética, en el Renacimiento “cuando [los músicos] tienen que calcular intervalos en los que aparecen números irracionales no dudan en salir del terreno aritmético. La primera obra que los incluye [es] de Lefevre d’Etaples [que] recurre a un teorema de los elementos de Euclides” (Hernando González, 2014, p. 96). Gracias a este uso, Salinas, como afirma García Pérez (2014), “recurre a un instrumento geométrico-mecánico, el mesolabio, que permite hallar tantas medias proporcionales como se quiera” con el objetivo de utilizar un temperamento igual de doce notas. Sin embargo, “no se está inventando nada nuevo, él solo explicita una realidad”, puesto que “el temperamento igual era el sistema habitual de afinación de instrumentos de cuerda con trastes en el Renacimiento” (2014, pp. 64-66).

Por tanto, a partir del Renacimiento se auguran tiempos de renovación del temperamento de los instrumentos, aplicando leyes matemáticas como las usadas por Salinas. Sin embargo será J. S. Bach, considerado el “primer padre de la armonía” según Ludwig van Beethoven, en su famosa carta a Hofmeister, 1801 (Crofton y Fraser, 2007, p. 41), el que sentará, ya en el Barroco, las bases del temperamento que hoy conocemos con su obra *Clave bien temperado* (1722), la cual “incluye veinticuatro melodías en todas las tonalidades y modos posibles” según Merino de la Fuente (2007, p. 138).

La música del Barroco como afirma Schonberg “tiene cualidades manieristas: misticismo, exuberancia, complejidad, decoración, deformación, el aprovechamiento de lo sobrenatural o lo grandioso, todo entre mezclado” (2007, p. 48), y además, en

ocasiones supone el uso de una gran variedad de instrumentos, entre ellos el clave, que tiene un temperamento fijo. La forma de afinar estos instrumentos era el Método de las Quintas que según Merino de la Fuente “consistía en definir el tono para una nota grave, [...] a partir de la cual se afinaban la quinta superior [+ 3/2] y de nuevo la superior [+ 3/2] para luego descender una octava [- 1/2] y luego volver a repetir el proceso” (2007, p. 137). De acuerdo con Liern Carrión (2009), si esto “lo planteamos sobre un círculo (círculo de quintas) comprobamos que la duodécima quinta no lo cierra [el círculo], sino que lo sobrepasa ligeramente porque con 12 quintas no tenemos 7 octavas exactamente” (p. 116). Diferencia conocida por “coma pitagórica”, que tal y como afirma Merino de la Fuente (2007), “como mal irremediable aparecía una quinta disminuida [que no es igual a 3/2]” (p. 137) llamada “quinta del lobo”. Liern Carrión (2009, p.116) propone una fórmula matemática de demostración como sigue:

$$2^7 = 128 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129,7463$$

Así, el resultado de las siete octavas es 128, y el de las doce quintas es 129,7463, que al restarse aparece un resultado de 1,7463 de imprecisión por tanto hay un desajuste.

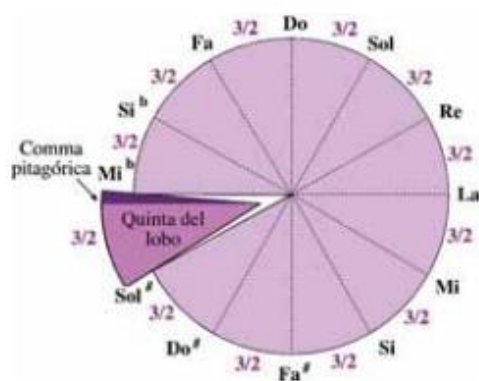


Ilustración 17: Círculo de quintas. Liern Carrión, 2009, p. 116.

Debido a esta pequeña pero notoria diferencia “los compositores de la época eludían sistemáticamente los sonidos simultáneos que estuvieran separados por este intervalo” (Merino de la Fuente, 2007, p. 137). Además de ser desagradable el intervalo, “imposibilitaba el uso de algunas tonalidades, la trasposición o la convivencia de algunos instrumentos dentro de la misma agrupación” (Liern Carrión, 2009, p. 117). Con el objetivo de conseguir un efecto que no se notase en demasía, los intérpretes

como ya veíamos con Salinas, según Merino de la Fuente (2007) “afinaban sus instrumentos por el procedimiento de las quintas desafiando ligeramente a la baja y por igual todas ellas [consiguiendo que] la ligera desafinación apenas se notara” (p. 138).

Claro que, en una época de tanta complejidad como el Barroco “el problema se hace insostenible y más si pensamos en compositores como Bach, para los que las transposiciones [y modulaciones] eran una herramienta fundamental de su obra” (Liern Carrión, 2009, p. 117); además, algunos de estos compositores creaban obras para tocar una gran variedad de instrumentos en conjunto.

La solución al problema que proponía Bach era distribuir esa coma entre varias de las quintas, tal y como hacían los intérpretes de cuerda en el Renacimiento, según Liern Carrión (2009), “acortando $\frac{1}{4}$ de coma de las quintas siguientes: Do-Sol, Sol-Re, Re-La, Si-Fa#. Por lo tanto el valor de esas quintas sería [...] 1,49493” (p. 117), adoptando así el sistema de afinación Werckmeister.

Sin embargo y para concluir con el temperamento de instrumentos, según Merino de la Fuente (2007) “el procedimiento adoptado actualmente para la afinación de la escala Temperada o Templada [...] consiste en establecer un intervalo constante llamado semitono que constituye la unidad mínima de la escala cromática templada. Su valor es: 1,0594631 (p. 138). Esta escala Temperada es la que divide la octava en doce partes iguales que equivalen al intervalo constante que se refiere Merino de la Fuente, el semitono, aunque aparezca con decimales muy pequeños. Supone una diferencia de lo que Bach proponía y se acerca más a los estudios de Marin Mersenne en su obra *Harmonie Universelle*, en la que afirmaba que

muchos constructores de instrumentos dividen la longitud del laúd o de la cuerda al vacío en 18 partes, colocando el primer traste en la división 17. Y después dividen el resto de la cuerda en otras 18 partes, de las cuales vuelven a coger 17 para colocar el segundo semitono. Y así sucesivamente hasta que tienen 8 o 9 semitonos (García Pérez, 2014, p. 72).

Aun así el resultado de $\frac{18}{17}$ no es igual a 1,0594631, sino un poco menos (1,058823), siendo inexacto, pero se aproxima bastante a lo que siglos después sería definido como el valor del semitono. Según E. Roberts,

el sacerdote francés Marin Mersenne [...] fue el primer científico en medir con exactitud la frecuencia de una cuerda con un tono audible (a 84 hz). Mersenne era consciente de la conexión clave entre la relación 2:1 y la octava. Usando una cuerda suficientemente larga, pudo contar el número de ciclos producidos bajo la vibración, y luego doblándolo repetidamente por la mitad, multiplicó por la

potencia correcta de 2 para determinar la frecuencia de la nota dada [...] Mersenne es a veces recordado como el padre de la acústica¹ (2016, p. 88).

Entonces y gracias al sistema temperado, como afirma Maor (2006), las “notas musicales separadas por intervalos iguales corresponden a frecuencias en una progresión geométrica [puesto que] las frecuencias están expresadas en ciclos por segundo [...] cuando la ley de Weber-Fechner² se aplica al tono” (p. 118). Por lo tanto, se podría deducir que la música es frecuencia, como se expone en el siguiente párrafo.

El *Diccionario* de la RAE define música entre otras acepciones como la “sucesión de sonidos modulados para recrear el oído” y es que según H. Cromer (1996) “el sonido es la vibración de elementos de aire bajo la acción de fuerzas mecánicas” (p. 325). Si el sonido es vibración, Chinchilla Sibaja (2002) define a esta última como “todo movimiento oscilatorio de un cuerpo sólido respecto a una posición de referencia” y afirma que “al igual que el ruido, las vibraciones se caracterizan por su frecuencia, [...] el número de veces por segundo que se realiza el ciclo completo de oscilación” (p. 121).

Según el Sistema Internacional de Unidades la frecuencia se mide en Hz. Así que si la medida exacta de la frecuencia de una cuerda con un tono audible es 84 Hz (como decía Mersenne) significa que el número de ciclos en un segundo es de 84 veces (según la definición del hertzio). Los ciclos o las ondas no se mueven en línea recta, sino que oscilan ascendiendo hacia un punto más alto del que han comenzado y descendiendo hacia un punto más bajo del que han comenzado, finalizando en el punto de inicio. Este proceso repetido un número de veces por segundo (Hz) produce la frecuencia, responsable de la altura del sonido, el Hz.

¹ Traducción propia del original en inglés: “The French priest Marin Mersenne [...] was the first scientist to accurately measure the frequency of a plucked string with an audible pitch (at 84 Hz). Mersenne was aware of the key connection between the ratio 2:1 and the octave using a long enough string, he was able to count the number of cycles produced under vibration, and then by repeatedly folding it in half, he multiplied by the correct power of 2 to determine the frequency of the given note. [...] Mersenne is sometimes remembered as the father of acoustics”, Gareth E. Roberts, *From Music to Mathematics: Exploring the connections*, 2016, p. 88.

² La ley de Weber-Fechner según Urtubia (1999) “ofrece una explicación satisfactoria para una enorme gama de intensidades de estímulos que puede explorar nuestro sistema nervioso [...] Una progresión geométrica de la intensidad del estímulo, le corresponde una progresión aritmética de la sensación percibida” (p. 50). César Urtubia Vicario, *Neurología de la vision*, 1999, p. 50.

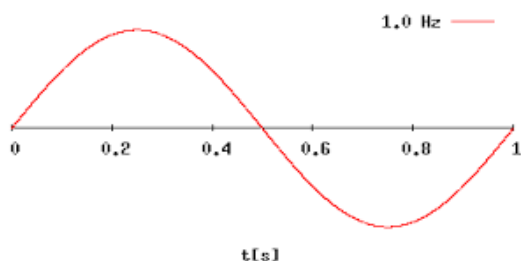


Ilustración 18: Onda sonora medida en la frecuencia de 1 Hz

Por tanto, si las vibraciones de las notas musicales se pueden medir en Hz según el sistema internacional de unidades, entonces la música es cuantificable en frecuencias. Soriano et al. (2007) afirman que “el oído humano capta un rango de frecuencias que va aproximadamente desde los 20 Hz hasta los 20kHz [20.000 Hz], aunque la capacidad para percibir frecuencias altas se deteriora con la edad” (p. 111). Sin embargo las ondas sonoras no corresponden solamente a la frecuencia. Tal y como expone Lieury (2008) en su libro *A qué juega mi cerebro* (p. 139), las ondas también corresponden a la intensidad o fuerza de presión, que se mide en decibelios, y a la complejidad de las mismas o timbre que, continuando con Soriano et al. (2007), “está determinado por la mezcla de frecuencias que pueden estar contenidas en la onda sonora y determina el nivel de complejidad de la misma [además] nos proporciona información sobre la naturaleza del sonido que escuchamos” (p. 113).

De esta manera, la altura (y también timbre) de los instrumentos musicales puede ser expresada en números, a través de las frecuencias. Castro Lobo (2003) afirma a este respecto que “el sonido la central (o la 5) del piano, posee una frecuencia de 440 vibraciones por segundo [Hz]. El sonido la de la escala superior siguiente (la 6) duplica la frecuencia a 880” (p. 6). Sin embargo la norma ISO16 de 1975 aceptada internacionalmente, afirma que es el la 4 (A4) el que corresponde a 440 Hz. Por tanto si asignamos ese número (440) a esa nota (A4), cada nota que aparece en el piano puede ser cuantificada. Sin embargo, esta es una convención que según Maneveau (1992) parte de “un congreso reunido en Londres [que] ratifica la costumbre europea y fija el diapasón en 440 [aunque] hoy prevalece el uso de un la de 442 periodos” (p. 81), puesto que el diapasón ha ido cambiando a lo largo de la historia, dependiendo de las necesidades de músicos y compositores³.

³ Maneveau ofrece una nota a pie de página sobre la historia del diapasón en su libro *Música y Educación*, en la que aparece de forma breve y concisa de la evolución de la afinación más aceptada en cada momento desde finales del siglo XVII.

Frecuencias (en hertzios) de las notas musicales									
	Oc. 0	Oc. 1	Oc. 2	Oc. 3	Oc. 4	Oc. 5	Oc. 6	Oc. 7	Oc. 8
Do		32,70	65,41	130,81	261,63	523,25	1046,50	2093,00	4186,01
Do#		34,65	69,30	138,59	277,18	554,37	1108,73	2217,46	
Re		36,71	73,42	146,83	293,66	587,33	1174,66	2349,32	
Re#		38,89	77,78	155,56	311,13	622,25	1244,51	2489,02	
Mi		41,20	82,41	164,81	329,63	659,26	1318,51	2637,02	
Fa		43,65	87,31	174,61	349,23	698,46	1396,91	2793,83	
Fa#		46,25	92,50	185,00	369,99	739,99	1479,98	2959,96	
Sol		49,00	98,00	196,00	392,00	783,99	1567,98	3135,96	
Sol#		51,91	103,83	207,65	415,30	830,61	1661,22	3322,44	
La	27,50	55,00	110,00	220,00	440,00	880,00	1760,00	3520,00	
La#	29,14	58,27	116,54	233,08	466,16	932,33	1864,66	3729,31	
Si	30,87	61,74	123,47	246,94	493,88	987,77	1975,53	3951,07	

Ilustración 19: Frecuencias de las notas musicales. Fuente:
<http://aulavirtualdepabloalmazan.blogspot.com.es/2015/02/>

La ilustración 6, aunque registra las frecuencias que aparecen al tocar todas las notas de un piano y están redondeadas a la centésima, resulta muy útil para observar el exponente que determina el intervalo de dos notas, puesto que cada valor se ha de multiplicar por la constante (1,059463) para subir la altura en un semitono o dividirla para bajar. Así, para hallar el valor en hertzios siguiente a 440 Hz se multiplica por 1,059463, que es la constante, y resulta 466,16372 que, al redondearlo a la centésima, da el valor de 466,16.

Reduciendo las notas a frecuencias, hoy en día y gracias a la informática, es fácil poder representarlas de manera gráfica, pero ello ha necesitado una larga investigación y evolución técnica. Por ejemplo, Schillinger propone un sistema de composición cuyo método es matemático, y es que este músico de la primera mitad del siglo XX ofrece una relación de la música y las matemáticas en varios niveles. Según Slonimsky (1946),

una de las nuevas herramientas musicales de Schillinger es la notación geométrica, un gráfico musical en el que la abscisa indica las duraciones relativas de las notas en un fragmento melódico, y la ordenada muestra el número de semitonos. En esta notación, una fuga de Bach parece un rascacielos escalonado. Por el contrario, es posible transformar cualquier curva, gráfico o diagrama, en una progresión musical (p. 468).

Aunque supone una versión más moderna de lo que Schillinger proponía, puede entenderse mejor visionando ejemplos de obras musicales traducidas a grafismos desde

archivos MIDI con el programa Music Animation Machine, tal y como puede verse en la imagen y enlace siguientes.



Ilustración 20: J. S. Bach, Toccata and Fugue in re menor. Representación gráfica del minuto 1'32'' con el programa Music Animation Machine. En línea: <https://www.youtube.com/watch?v=ATbMw6X3T40>

Como podemos ver, la altura está expresada en el eje de abscisas y el tiempo⁴ en el de ordenadas, que va sucediéndose para dar lugar a un gráfico que exprese la música de toda la partitura.

Sin embargo Schillinger no es el único que hace referencia a la geometría de las composiciones de Bach. Liern Carrión (2009) afirma que “las estructura de sus obras es pura geometría [y es que el compositor somete a sus obras] a transformaciones geométricas que mantienen la forma del tema: traslaciones, giros y simetrías” (p. 115). Por tanto, como podemos ver Schillinger no es la primera persona en relacionar la geometría con la música, sin embargo esta rama de las matemáticas no es la única que aborda. Así pues, continuando con Slonimsky (1946),

Schillinger analiza todos los patrones rítmicos como resultado de la proyección de varias filas de valores de notas no coincidentes [...] con la misma velocidad de metrónomo, o en palabras de Schillinger “los grupos rítmicos producidos por la interferencia de dos periodicidades de monomios sincronizados”. El valor de este tratamiento analítico del ritmo es que permite la formación de piezas de contrapunto que poseen un equilibrio natural de elementos contrastantes. El tipo más común de esta “interferencia de periodicidades monomiales” es la síncopa, pero Schillinger va mucho más allá, mediante la sincronización de cuadrados y cubos de binomios (grupos de dos notas

⁴ Este elemento desde la perspectiva musical va a ser abordado en el siguiente apartado de esta fundamentación “una perspectiva pedagógica”, debido a su potencial didáctico.

diferentes), trinomios (grupos de tres notas) y polinomios [...] (grupos de varias notas con la misma duración)⁵ (p. 468-469).

Además de relacionar la geometría con el ritmo, Schillinger también lo hace con las escalas y según Slonimsky (1946)

Introduce un concepto de escalas simétricas basado en la división de la octava en dos, tres, cuatro, seis y doce partes iguales. [...] La interpolación de las notas de paso llena los intervalos entre las notas de corte⁶ (p. 469).

Aunque en un principio pueda parecer controvertido realizar una afirmación acerca de la relación entre geometría y música, Schillinger demuestra con su sistema de composición que esto es posible, aunque él no fuera el primero en experimentar esta relación y es que parece que la imaginación de los compositores no tiene límites. Contreras, Díez y Pacheco (2007) proponen una explicación matemática de la evolución de la música en la que aparecen diferentes movimientos que relacionan matemáticas y música, además de la relación de las matemáticas y la música que hemos visto en diferentes épocas, tales como la atonalidad donde “la ruptura con la tonalidad depende del uso de las relaciones matemáticas de modo no convencional [y] las matemáticas pasan a ser creadoras de música” (p. 47-48). Además de esto, Contreras, Díez y Pacheco (2007) proponen ejemplos de obras interesantes como “la obra de Bartok *Música para instrumentos de cuerda, percusión y celesta*, en la que utiliza algunos términos de la serie de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...” (p. 48).

Sin embargo Bartok no es el único que utiliza esta famosa serie en el uso de la música. Según Pajares Alonso (2014) “otros compositores como O. Messiaen, L. Nono, G. Ligeti, K. Stockhausen, I. Xenakis o S. Gubaidulina utilizan [...] los números Fibonacci pero muy pocos hacen de ello la base de su estilo” (p. 147).

⁵ “Schillinger analyzes all rhythmic patterns as resultants of the projection of several rows of non-coincident note values [...] in the same metronome speed, or in Schillinger's own words, "rhythmic groups as produced by the interference of two synchronized monomial periodicities". The value of this analytical treatment of rhythm is that it permits the formation of contrapuntal parts possessing a natural balance of contrasting elements. The most common type of this "interference of monomial periodicities" is syncopation, but Schillinger goes far beyond that, by synchronizing squares and cubes of binomials (groups of two different note values), trinomials (groups of three note values), and higher polynomials [...] (that is, groups of notes of the same duration)”, Slonimsky, 1946, p. 468-469.

⁶ Traducción propia del inglés: “He introduces a concept of symmetric scales, based on the division of the octave into two, three, four, six, and twelve equal parts. The interpolation of passing notes fills in the large intervals between pivotal tones.” (Slonimsky, 1946, p.469) The Schillinger System of Musical Composition by Joseph Schillinger

Contreras, Díez y Pachecho (2007) también le dan gran importancia a la obra de Jonson (2001) quien señala que

partiendo de un objeto matemático se llega al objeto musical [a través de automatismos]. Teniendo en cuenta que por las codificaciones ya sabidas podemos comenzar con $do = 0\dots$, se generan las siguientes sucesiones numéricas:

0

010

010 121 010

010121010 121232121 010121010

...

las cuales se corresponden con partituras musicales (p. 48).

En la actualidad, nos parece necesario señalar la existencia de la “Conferencia Internacional de Matemáticas y Cálculo en Música, organizada en Méjico, por la Facultad de Ciencias de la UNAM, la St. Mary’s College de Maryland (EEUU), la Universidad Estatal de Georgia (EEUU) o la Escuela Superior de Música de Ciudad de Méjico, la cual realiza su sexta edición entre el 26 y el 29 de junio de 2017. Según su página web⁷, la Conferencia supone un cómputo mundial de investigadores en la relación entre las matemáticas y el cálculo con diferentes aspectos musicales como referentes al análisis y la teoría, y la composición, ofreciendo ámbitos de actuación que parte desde la musicología, la informática o las matemáticas. Además afirman que

las disciplinas de Matemáticas y Música comparten una historia entrelazada que se remonta a más de dos milenios y medio [y que] más recientemente, la informática ha hecho posible nuevos enfoques a estas disciplinas, a menudo con un efecto transformador⁸.

Hay uno de los elementos de la música que conlleva una evidente relación con las matemáticas del que todavía no se ha hablado en este trabajo en gran profundidad, que es el ritmo y la duración de las notas. Este lo vamos a ver en el siguiente apartado de esta fundamentación debido a su potencial didáctico.

4.2. Una perspectiva pedagógica

Como ya ha sido señalado en el apartado primero de la fundamentación epistemológica de este trabajo “Matemáticas y Música en la Historia”, la relación entre

⁷ <http://www.mcm2017.org/> Último acceso 22 de junio de 2017. La página ha expirado una vez celebrado el evento.

⁸ Traducción propia del original en inglés: “. The disciplines of Mathematics and Music share an intertwined history stretching back more than two and a half millennia. More recently, computer science has made possible new approaches to these disciplines, often with transformative effect”. <http://www.mcm2017.org/>

música y matemáticas no es ni mucho menos nueva. Gracias a ese compendio se realizan grandes descubrimientos de los que se benefician ambas, y es que, según Montiel y Gómez (2014), “las matemáticas son una ciencia en tanto que es un conjunto de conocimientos sistemáticos; desde este punto de vista, la música es también una ciencia. Además, los fenómenos musicales se prestan al estudio matemático, ya que la música está llena de patrones y estructura”⁹ (p. 153).

Esta afirmación puede parecer controvertida desde el desconocimiento y más si las leyes educativas en España contemplan la música únicamente dentro del terreno artístico y olvidan su visión científica y, como tal, es excluida de la troncalidad (LOMCE, RD126/2014). Y es que, como afirma Giráldez (2007) “la identificación popular de las artes con la creatividad no dejará de ser errónea si el trabajo en el aula se limita a la audición, la memorización y la reproducción” (p. 30), porque de esta manera no se estaría difundiendo la expresión personal a través de la composición. Según Mills “[los docentes] debemos promover situaciones en las que se despierte en los niños el deseo de componer, agregar material para enriquecer sus composiciones y responder a su trabajo para ayudarlos a aprender de él” (1991, p. 46). En la creación de música la composición da lugar a una ciencia, la de las matemáticas, y a la vez “la música es un medio de expresión y comunicación, un lenguaje [en el que] el hablar equivaldría a improvisar, y el escribir, a componer, aunque la composición no siempre debe ser registrada con signos” (Giráldez, 2007, p. 30). Por tanto las matemáticas están en la improvisación, definida por Hemsy de Gainza (1986) como “toda ejecución instantánea producida por un individuo o grupo” (p.11) y en la composición, definida por Giráldez (2007) como “la elaboración de un producto musical (a través de un proceso consciente, voluntario y controlado) que puede ser interpretado en diferentes ocasiones” (Giráldez, 2007, p. 31), a partes iguales.

La composición entonces sería en gran parte la práctica de las matemáticas en la música, puesto que se unen el ámbito intelectual-racional y el ámbito artístico como búsqueda de belleza, haciendo buena la afirmación de Montiel y Gómez (2014): “Las

⁹ Traducción propia del original en inglés: “Mathematics is a science inasmuch as it is a body of systematic knowledge; from this standpoint, music is also a science. Furthermore, music phenomena lend themselves to mathematical study, as music is so full of patterns and structure”, Montiel y Gómez, 2014, p. 153.

matemáticas y la música son actividades artísticas en el sentido de que buscan una belleza, a la vez intelectual y emocional belleza”¹⁰ (p. 153).

Por otro lado, la animación a la composición al alumnado no persigue un objetivo práctico, sino teórico, desde una perspectiva de futuro para los compositores del mañana. Mills (1991), afirma que “John Paynter habla de su composición como plantearse problemas uno mismo, tomar decisiones que respondan a esos problemas y tener la satisfacción de haberlos resuelto. Componer en grupo puede destacar los procesos de selección y de rechazo” (p. 46), puesto que las composiciones deben tener una dirección y el alumnado debe poder decidir acerca de la validez de una composición u otra para la actividad que se va a realizar.

Montiel y Gómez (2014), proponen el abordaje de la relación de las matemáticas y la música a través de la distancia y la semejanza:

En primer lugar definimos las representaciones abstractas de las melodías y, en segundo lugar, cómo ciertas transformaciones se aplican a estas representaciones para obtener una medida de semejanza¹¹ (p. 155).

De esta manera la persona que compone puede aplicar la representación a través de la distancia y la semejanza en las melodías que compone, subiéndolas de octava, por ejemplo. Además las transformaciones pueden ser de varios tipos, como “transformaciones de tono, transformaciones rítmicas y compás simbólico”¹² (p. 155).

4.2.1 El ritmo en las matemáticas

Según Montiel y Gómez (2014), la relación entre la música y las matemáticas se puede abordar a través del ritmo y las rotaciones:

Entre todos los ritmos, elegimos los llamados ritmos clave. Los ritmos claves son ritmos que se repiten a través de una pieza, y cuyas funciones musicales incluyen mantener la estabilidad rítmica, organizar el fraseo, o servir como referencias temporales dentro de una pieza¹³ (2014, p. 154)

¹⁰ Traducción propia del original en inglés: “Mathematics and music are artistic activities in the sense that they seek to create beauty, both intellectual and emotional beauty”, Montiel y Gómez, 2014, p. 153.

¹¹ Traducción propia del original en inglés: “In the first place we defined the abstract representations of the melodies and, in the second place, how certain transformations are applied to these representations to get a similarity measure”. Montiel y Gómez, 2014, p. 155.

¹² Traducción propia del original en inglés: “Transformations can be of diverse nature [...] some of the most relevant ones: pitch transformations, rhythmic transformations, and symbolic measures”. Montiel y Gómez, 2014, p. 155.

¹³ Traducción propia del original en inglés: “Among all rhythms, we chose the so-called clave rhythms. Clave rhythms are rhythms that repeat themselves throughout a piece, and whose musical functions

De esta manera el alumnado puede componer melodías basándose en esos ritmos, que pueden ser tocados por él, o pueden ser facilitados utilizando aplicaciones como Groovepizza (la cual emplearemos en las actividades propuestas donde explicaremos cómo se utiliza y qué ramas de las matemáticas se ven desarrolladas) en la mediante la selección de un ritmo y su reproducción constante para centrarse en la melodía o en componer ritmos adyacentes al reproducido.

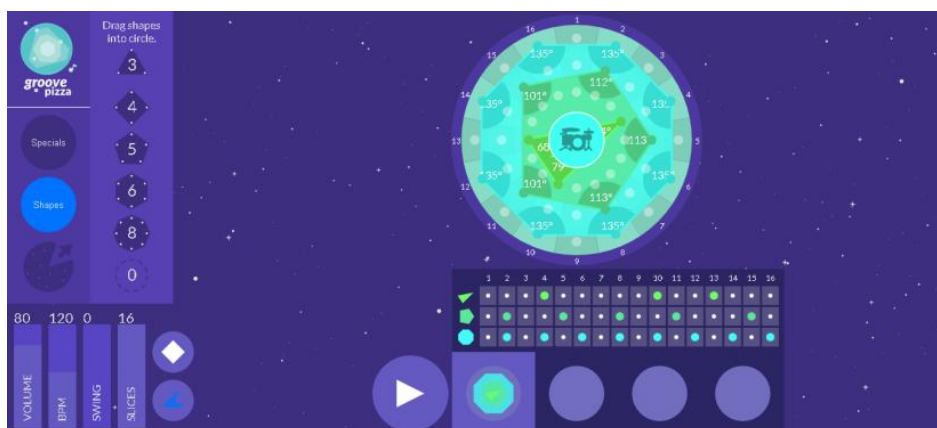


Ilustración 21: Ejemplo de composición de tres ritmos con la aplicación Groove Pizza. FUENTE: <https://apps.musedlab.org/groovepizza/>

William A. Sethares del Departamento de Ingeniería electrónica e informática de la Universidad de Wisconsin responde a la pregunta de “¿cómo puede ser el ritmo descrito matemáticamente?” y de “¿cómo puede ser detectado automáticamente?” con la siguiente afirmación:

La gente aplaude espontáneamente a tiempo en una pieza musical, y puede interiorizar y comprender sin esfuerzo los fenómenos rítmicos, pero es difícil crear un programa informático que pueda mantener el tiempo al compás. Enseñar al ordenador a sincronizar la música requiere tanto de matemáticas como de procesamiento de señal de tipo inusual [aleatorio] (2007, p.1)¹⁴

Esto puede estar causado porque la aleatoriedad que muestra un ordenador tiene ciertos límites que las personas no tenemos, y esto debe ser aprovechado con el alumnado de Educación Primaria, de manera que el docente ofrezca actividades para practicar el ritmo con diferentes secuencias, integrándolo además o no con la melodía. En relación a esto Sethares (2007), afirma que

include maintaining the rhythmic stability, organizing the phrasing, or serving as temporal references within a piece”. Montiel y Gómez, 2014, p. 154.

¹⁴ Traducción del original en inglés: “People spontaneously clap in time with a piece of music, and can effortlessly internalize and understand rhythmic phenomena – but it is tricky to create a computer program that can keep time to the beat. Teaching the computer to synchronize to music requires both interesting mathematics and unusual kinds of signal processing”. Sethares, 2007, p. 1.

hay muchas maneras de pensar y aprender patrones rítmicos [por ejemplo] un pedal de “tap” (golpeteo) electrónico diseñado para imitar la capacidad de sincronización del sonido en las personas, las cuales deben escuchar el sonido, localizar el pulso del ritmo subyacente, anticiparse al momento en el que sonará el siguiente pulso y pulsar el pedal (p.1)¹⁵.

Esta afirmación podría servir para comprobar la escucha, la anticipación o la coordinación del alumnado entre recepción-actuación, y que además pudiera ser medido con el objetivo de mejorar marcas, tal y como se hace en otras disciplinas donde, por ejemplo, se mide la resistencia de los deportistas a través del “Test de Cooper” (1968)¹⁶, siendo la recepción, la escucha, y siendo la actuación, el pulsado del pedal de “tap”, cuestión similar a lo que Fraisse (1974) propone con gran profundidad en su libro *Psicología del ritmo*.

¿Este tipo de actividades estarían alabadas por las leyes educativas o podría ser vinculado a ellas? La respuesta es sí, puesto que en la contribución del Área de Educación Artística a la Competencia matemática y Competencias en ciencia y tecnología, en la Orden del 17 de marzo de 2015 se afirma que “al abordar conceptos y representaciones geométricas [...] se necesitan referentes para organizar la obra artística en el espacio. Asimismo, aspectos trabajados en música como el ritmo y las escalas, colaboran directamente con la consecución de la Competencia matemática” (p.412 del PDF completo, o 313 del tercer PDF de seis). Sin embargo, más allá de esto, no se realiza una relación entre la música y las matemáticas, aunque este tema será abordado más profundamente en la proyección didáctica de este trabajo.

Y sin embargo, este tipo de actividades musicales requieren de una inteligencia lógico-matemática necesaria para poder resolverlas satisfactoriamente, puesto que como veíamos en el primer apartado de la fundamentación de este trabajo, la relación y proporción están unidas al ámbito musical en cuanto a la altura de las notas; pero es que según Spang (1983), “la rítmica musical [también] se basa en su temporalidad en proporciones exactas y numéricas (medibles con metrónomo) siendo capaz por ese motivo de múltiples diferenciaciones, de combinaciones simultáneas y superposiciones de sus figuras” (p.112)

¹⁵ A foot-tapping machine designed to mimic people’s ability to synchronize to complex rhythmic sound must “listen” to the sound, locate the underlying rhythmic pulse, anticipate when the next beat timepoint will occur, and then provide an output. Sethares, 2007, p. 1.

¹⁶ “Tests de aptitud física y tests de esfuerzo”, Harichaux y Medelli., 2006, p. 92.

Por tanto hablar de ritmo es hablar de matemáticas porque según Matthews (2012) “un ritmo es una serie de pequeñas divisiones del tiempo [que] se entienden con relación a un pulso subyacente con el cual suelen mantener una relación matemática relativamente sencilla” (p. 185), puesto que el tiempo en música se mide en subdivisiones del compás, ya sea la mitad, el doble, la cuarta o la tercera parte.

Estas subdivisiones del compás están determinadas por las figuras de nota, que según Salcedo (2007) son “las diferentes formas que éstas representan para indicar su duración [además afirma que] existen siete figuras básicas [que] son por orden decreciente de duración: redonda, blanca, negra, corchea, semicorchea, fusa y semifusa” (p. 63) cuyas equivalencias se pueden visualizar en la ilustración siguiente:

Redonda $\frac{4}{4} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{4} =$ cuatro partes

Blanca $\frac{2}{4} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{4} =$ dos partes

Negra $\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{4} =$ una parte

Corchea $\frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}}{8} =$ media parte

Semicorchea $\frac{1}{16} = \frac{\frac{1}{32} + \frac{1}{32}}{16} =$ un cuarto de una parte

Fusa $\frac{1}{32} = \frac{\frac{1}{64} + \frac{1}{64}}{32} =$ un octavo de una parte

Semifusa $\frac{1}{64} =$ un dieciseisavo de una parte

Ilustración 22: Figuras musicales y equivalencias matemáticas según sistema de relación binario. Elaboración propia.

Cada figura representa una proporción en el compás, por tanto requiere de una fracción cuyo resultado sea exacto o decimal exacto, porque tal y como afirma Salcedo (2007) “los compases se representan con fracciones, en las que el numerador indica el número de figuras que completan el compás y el denominador indica el tiempo total del

compás” (p. 72). Estas subdivisiones del compás podrían ser practicadas con la propuesta del “tap” electrónico de Sethares que ha sido expuesto más con anterioridad en este apartado. Sería recomendable pulsar el pedal para marcar negras, corcheas, etc, según las instrucciones del docente, con el objetivo de que el alumnado aprenda a fraccionar el tiempo musical a través del ritmo.

Sin embargo, el carácter fraccionario de la música no es el único aspecto que se trabaja en cuestiones de ritmo, puesto que el ritmo de la canción que marcan las figuras musicales va a estar marcado por el tempo, y es que “la medida de los tiempos es necesaria para hallar la relatividad de cada una de las notas y sus duraciones” (Gomis, 2014, p.12). Por lo tanto la duración de las notas es un concepto que irá ligado a la “velocidad de las pulsaciones” que es como definen el tempo Pilhofer y Day (2010, p.16) y es que, según Gomis (2014) y como ya hemos visto “sabemos que una blanca dura dos tiempos y que una negra siempre dura un tiempo, [así] si aceleramos la obra al doble de velocidad, la blanca durará la mitad y a su vez la negra también durará la mitad” (p.12)

Además de esto, “desde el punto de vista de la acentuación, en todo compás el primer tiempo es el más fuerte y el último el más débil” (Salcedo. 2007, p.72) con lo cual el alumnado debe saber contar al ritmo de la música para saber cuántos tiempos tiene un compás, dependiendo del tempo que marque la música que esté sonando, para lo cual es necesario la realización de actividades.

En este trabajo las actividades van a fomentar un desarrollo competencial en cuestiones matemáticas a través del uso de la música en los bloques de contenidos de matemáticas. Esta propuesta de actividades que el alumnado de Educación Primaria llevaría a cabo, se desglosa en la proyección didáctica de este trabajo.

5. APLICACIÓN DIDÁCTICA

5.1 Base legal

Según el RD 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria (LOMCE) “en la Educación Primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones” (2014, p. 38). Y como ya hemos visto en el apartado 4 de la “Fundamentación epistemológica”, en la música hay muchas matemáticas. Sin embargo en la Orden del 17 de marzo de 2015 que

desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, aparece como finalidad del área de Matemáticas “el desarrollo de la Competencia matemática focalizando el interés sobre las capacidades de los sujetos para analizar y comprender las situaciones, identificar conceptos y procedimientos matemáticos aplicables, razonar sobre las mismas, generar soluciones y expresar los resultados de manera adecuada” (2015, p.310)

Lo que se afirma más arriba es abordable desde una perspectiva musical, sin embargo se hace complicado encontrar alguna relación entre la música y las matemáticas en la Orden del 17 de marzo de 2015, al menos a primera vista. Si se profundiza un poco más la música no es considerada, en el área de matemáticas, ni en las orientaciones metodológicas ni en la contribución del área a las competencias clave. Sin embargo sí ocurre en la contribución de la Competencia matemática y Competencias en ciencias y tecnología al área de Educación Artística, donde se afirma que “aspectos trabajados en música como el ritmo y las escalas, colaboran directamente con la consecución de la Competencia matemática” (p. 313).

5.1.1. Objetivos

Aunque se hace complicado relacionar dos áreas tan aparentemente diferentes desde el punto de vista curricular, a continuación se propone una vinculación de los objetivos de las áreas de Matemáticas y de Educación Artística, según la orden del 15 de marzo de 2015

Tabla 2: Vinculación de los objetivos de Matemáticas y Artística en Ed. Primaria. Elaboración Propia a partir de la Orden del 17 de marzo de 2015 y el Real Decreto 126/2014.

Objetivos del área de Matemáticas	Objetivos del área de Educación Artística
O.MAT.1. Plantear y resolver de manera individual o en grupo problemas extraídos de la vida cotidiana, de otras ciencias o de las propias matemáticas, eligiendo y utilizando diferentes estrategias, justificando el proceso de resolución, interpretando resultados y aplicándolos a nuevas situaciones para poder actuar de manera más eficiente en el medio social.	O.EA.5. Mantener una actitud de búsqueda personal y colectiva, integrando la percepción, la imaginación, la sensibilidad, la indagación y la reflexión de realizar o disfrutar de diferentes producciones artísticas. O.EA.8. Analizar las manifestaciones artísticas y sus elementos más significativos en el entorno para conseguir progresivamente una percepción sensible de la realidad y fomentar la identidad personal como andaluz.
O.MAT.2. Emplear el conocimiento matemático para comprender, valorar y reproducir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana, en un ambiente creativo, de investigación y proyectos cooperativos y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.	O.EA.2. Utilizar las posibilidades del sonido, la imagen y el movimiento como elementos de representación y comunicación para expresar ideas y sentimientos, contribuyendo con ello al equilibrio afectivo y a la relación con los demás.
O.MAT.3. Usar los números en distintos contextos, identificar las relaciones básicas entre	O.EA.2. Utilizar las posibilidades del sonido, la imagen y el movimiento como elementos de

ellos, las diferentes formas de representarlas, desarrollando estrategias de cálculo mental y aproximativo, que lleven a realizar estimaciones razonables, alcanzando así la capacidad de enfrentarse con éxito a situaciones reales que requieren operaciones elementales.	representación y comunicación...
O.MAT.4. Reconocer los atributos que se pueden medir de los objetos y las unidades, sistema y procesos de medida; escoger los instrumentos de medida más pertinentes en cada caso, haciendo previsiones razonables, expresar los resultados en las unidades de medida más adecuada, explicando oralmente y por escrito el proceso seguido y aplicándolo a la resolución de problemas.	O.EA.3. Identificar y reconocer dibujos geométricos en elementos del entorno, utilizando con destreza los instrumentos específicos para representarlos en sus propias producciones artísticas.
O.MAT.5. Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural y analizar sus características y propiedades, utilizando los datos obtenidos para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.	O.EA.3. Identificar y reconocer dibujos geométricos en elementos del entorno...
O.MAT.6. Interpretar, individualmente o en equipo, los fenómenos ambientales y sociales del entorno más cercano, utilizando técnicas elementales de recogida de datos, representarlas de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.	O.EA.3. Identificar y reconocer dibujos geométricos en elementos del entorno.... O.EA.4. Reconocer las manifestaciones artísticas más relevantes de la Comunidad autónoma de Andalucía y de otros pueblos, desarrollando actitudes de valoración, respeto, conservación y adoptando un sentido de identidad que le permita plasmar a través del lenguaje plástico y musical las interpretaciones y emociones del mundo que le rodea. O.EA.5. Mantener una actitud de búsqueda personal y colectiva... O.EA.6. Utilizar los conocimientos artísticos en la observación y el análisis de situaciones y objetos de la realidad cotidiana y de diferentes manifestaciones del mundo del arte y la cultura, para comprenderlos mejor y formar un gusto propio.
O.MAT.7. Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de la exploración de distintas alternativas, la conveniencia de la precisión, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la posibilidad de aportar nuestros propios criterios y razonamientos.	O.EA.6. Utilizar los conocimientos artísticos en la observación y el análisis... - O.EA.7. Participar y aprender a ponerse en situación de vivir la música: cantar, escuchar, inventar, danzar, interpretar, basándose en la composición de sus propias experiencias creativas con manifestaciones de diferentes estilos, tiempos y cultura. O.EA.8. Analizar las manifestaciones artísticas y sus elementos más significativos en el entorno...
O.MAT.8. Utilizar los medios tecnológicos, en todo el proceso de aprendizaje, tanto en el cálculo como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones diversas; buscando, analizando y seleccionando información y elaborando documentos propios con exposiciones argumentativas de los mismos.	O.EA.1. Conocer y utilizar las posibilidades de los medios audiovisuales y las tecnologías de la información y la comunicación y utilizarlos como recursos para la observación, la búsqueda de información y la elaboración de producciones propias, ya sea de forma autónoma o en combinación con otros medios y materiales. O.EA.5. Mantener una actitud de búsqueda personal y colectiva... O.EA.8. Analizar las manifestaciones artísticas y sus elementos más significativos en el entorno...

Aunque en la tabla anterior se han vinculado, de manera generosa, los objetivos de la Orden del 17 de marzo de 2015, podría decirse que no existe demasiada relación entre ellos, puesto que están especificados para el área en cuestión. Sin embargo no ha sido posible vincular el siguiente objetivo del área de Educación Artística:

- O.EA.9. Valorar y conocer las manifestaciones artísticas del patrimonio cultural de Andalucía y de otros pueblos y culturas; colaborar en la conservación y enriquecimiento desde la interculturalidad.

Además de esto es necesario señalar que algunos objetivos están orientados a la Educación Plástica, por tanto esto dificulta más aún, que se pueda relacionar la música y las matemáticas desde una perspectiva curricular a través de los objetivos.

5.1.2. Contenidos

A continuación los contenidos del área de Educación Artística de la Orden del 17 de marzo de 2015 se vinculan con los contenidos del área de Matemáticas del Real Decreto 126/2014, puesto que según el artículo 3 de este Real Decreto “corresponderá al gobierno [...] determinar los contenidos comunes [y a] las Administraciones educativas podrán [...] complementar los contenidos del bloque de asignaturas troncales [y] establecer los contenidos de los bloques de asignaturas específicas”, como lo es Educación Artística.

Tabla 3: Vinculación de los contenidos de Matemáticas y Artística. Elaboración propia a partir de la Orden del 17 de marzo de 2015 y el Real Decreto 126/2014

Educación Artística	Matemáticas
3.1. Identificación de conceptos geométricos de la realidad que le rodea, relacionándolo y aplicándolos al área de matemáticas (2º ciclo) Bloque Dibujo geométrico	Cuerpos geométricos Regularidades y simetrías: Reconocimiento de regularidades. Sistema de coordenadas cartesianas.
4.6. Realización de sencillos y pequeños dictados musicales melódicos y rítmicos. (2º ciclo)	Medida de tiempo: Unidades de medida del tiempo y sus relaciones. Equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos. Lectura en relojes analógicos y digitales. Cálculos con medidas temporales.
5.11. Escritura e interpretación de ritmos utilizando signos de repetición, prolongación y melodías en escala pentatónica. (2º ciclo)	Medida de tiempo: Unidades de medida del tiempo y sus relaciones. Equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos. Lectura en relojes analógicos y digitales. Cálculos con medidas temporales.
3.1. Identificación de conceptos geométricos de la realidad que le rodea, relacionándolos y aplicándolos al área de matemáticas. (3º ciclo) Bloque Dibujo geométrico	Cuerpos geométricos Regularidades y simetrías: Reconocimiento de regularidades. Sistema de coordenadas cartesianas.
3.9. Reconocimiento y aplicación del término escala para sus propias producciones. (3º ciclo) Bloque Dibujo geométrico	Cuerpos geométricos Regularidades y simetrías: Reconocimiento de regularidades. Sistema de coordenadas cartesianas.

Como se puede comprobar tras la comparación realizada en la tabla, las relaciones que pueden aparecer entre los contenidos de las dos áreas son indirectas y, además, no explícitas con la música. Por tanto, la realización de actividades musicales en matemáticas se ve de alguna manera limitada por los contenidos del Currículum, así que lo que podemos ofrecer es una realización de actividades matemáticas en música, lo cual va a poder comprobarse en la propuesta que se ofrece más adelante en este mismo apartado.

5.1.3. Orientaciones metodológicas

Aunque como ya ha sido comprobado en los objetivos y contenidos del RD 126/2014 y de la Orden del 17 de marzo de 2015, la relación que ofrece el Currículum entre Música y Matemáticas, es bastante pobre *a priori*, en las orientaciones metodológicas del área de Matemáticas de la Orden del 17 de marzo de 2015, se afirma que “la resolución de problemas debe contribuir a introducir y aplicar los contenidos de forma contextualizada, a conectarlos con otras áreas de conocimiento contribuyendo a su afianzamiento” (p. 314). Por tanto, aunque el trabajo de esta proyección didáctica se vea limitado, se ofrece la posibilidad de que los docentes puedan utilizar la música para realizar procesos de enseñanza-aprendizaje de contenidos matemáticos, puesto que se propone “conseguir ambientes de aula creativos y realizar investigaciones [...] y proyectos, en los que los elementos relevantes son el tratamiento de información, la aplicación y aprendizaje de nuevos conocimientos matemáticos de forma cooperativa, constituyen actividades matemáticas de primer orden” (p. 314). Por tanto, las actividades que se plantean en este trabajo “deben permitir el enfoque globalizado” (p. 409) del área de Educación Artística, no sólo entre sus bloques de contenidos, sino la relación con otras áreas. Además, en la contribución de esta área a la Competencias matemática y Competencias en Ciencias y Tecnología, aparece lo siguiente:

El área contribuye a la adquisición de la Competencia matemática y Competencias en ciencias y tecnología al abordar conceptos y representaciones geométricas presentes en la arquitectura, en el diseño, en el mobiliario, en los objetos cotidianos, en el espacio natural, y en aquellas ocasiones en las que se necesitan referentes para organizar la obra artística en el espacio. Asimismo, aspectos trabajados en música como el ritmo y las escalas, colaboran directamente con la consecución de la Competencia matemática (p. 412).

Así, el máximo exponente de las orientaciones metodológicas sería la relación interdisciplinar de las dos áreas y la integración de los aprendizajes, porque como

afirma Morin (2005) “es preciso asociar gente de diversas disciplinas para iluminar un mismo objeto desde perspectivas diferentes” (p. 9).

5.1.3.1 Propuesta de actividades

A continuación se desarrollan unas actividades no contextualizadas divididas por bloques de contenidos del área de Matemáticas desde una metodología musical. Esta es una propuesta general no contextualizada en ningún curso, pero adaptable a la etapa según el nivel, por eso en cada actividad aparecerá el ciclo al que va orientada y una breve descripción. El docente puede adaptarlas según el contexto.

Bloque 2: Números

1. Cálculo de intervalos (3er. ciclo):

Trabajar en clase los intervalos musicales supone que el alumnado debe saber la sucesión de notas en escala cromática, por eso lo primero que el docente debe hacer es cerciorarse de que esta sucesión no supone un problema. Así que, habiendo visto el orden de las notas (do, do#/reb, re, re#/mib, mi, fa, fa#/solb, sol, sol#/lab, la, la#/sib, si), el alumnado podrá calcular la distancia entre una nota y otra, y mirando en una tabla que le dará el docente, para comprobar el nombre que corresponde a la distancia en semitonos que hay entre las dos notas, deberá responder con el nombre del intervalo.

Tabla 4: Intervalos musicales (actividad). Elaboración propia.

Nombre del intervalo	Grado	Distancia
Unísono	1	0
Segunda menor	2	1
Segunda mayor	2	2
Tercera menor	3	3
Tercera mayor	3	4
Cuarta justa	4	5
Cuarta aumentada / Quinta disminuida		6
Quinta justa	5	7
Sexta menor	6	8
Sexta mayor	6	9
Séptima menor	7	10
Séptima mayor	7	11
Octava justa	8	12



Para facilitar el trabajo, el docente puede tocar las notas con un piano digital y, además puede situar la escala cromática encima de la pizarra o donde esté a vista de todo el alumnado.

2. Cálculo de acordes (3er. ciclo):

La tríada básica puede suponer una complicación si no se ha visto el apartado anterior, por eso es importante reforzar y recordar esos contenidos para ver lo que ahora va a acontecer. Formar acordes de tríada básica no es más que realizar un cálculo de intervalos, aplicándolo en operaciones combinadas. De manera que si el alumnado tiene que averiguar las notas que componen el acorde de Re Mayor, simplemente sabrá que Re será la nota tónica, le sumará los semitonos equivalentes a una tercera mayor (puesto que el acorde es mayor), que son cuatro, para averiguar la nota modal (Fa sostenido), y le sumará los semitonos equivalentes a una quinta justa, que son siete para averiguar la nota dominante (La).

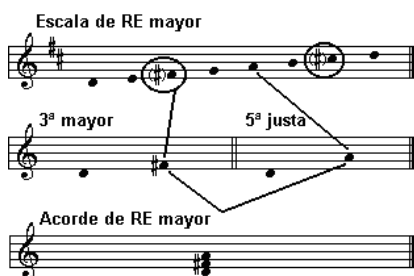


Ilustración 23: Acorde de Re Mayor en partitura

3. Cálculo de frecuencias entre acordes (3er. ciclo):

Si el alumnado asigna a cada nota una frecuencia o un conjunto de ellas, a través de un micrófono que capta la señal de un instrumento, será capaz de traducir las notas de ese instrumento en hercios. La representación de las frecuencias de este instrumento o de otro podrá resolverse en la actividad del bloque 3, llamada “Representación de frecuencias con acordes”. Incluso se podrá calcular frecuencias multiplicando o dividiendo por la constante semitonal, que es 1,0594631.

Bloque 3: Medida

1. Música = Medida:

1.1. Si observamos un instrumento de cuerda con trastes, como puede ser una guitarra clásica, conforme vamos bajando desde la cejuela hasta donde empieza el cuerpo de la guitarra, la distancia entre trastes varía. Una actividad posible para trabajar con el alumnado consiste en obtener la distancia que hay entre estas dos partes de la guitarra y señalar por escrito la distancia que hay entre cada traste con el siguiente, de manera que se pueda averiguar qué medida se le va quitando al traste anterior, pudiendo así fomentar el cálculo de números decimales e incluso averiguar la fracción que va surgiendo conforme se avance hacia el cuerpo. Para ello se necesita un metro extensible. Así, el alumnado podrá relacionar la magnitud de la longitud con la de la frecuencia, según el Sistema Internacional de Medida. **3º ciclo.**

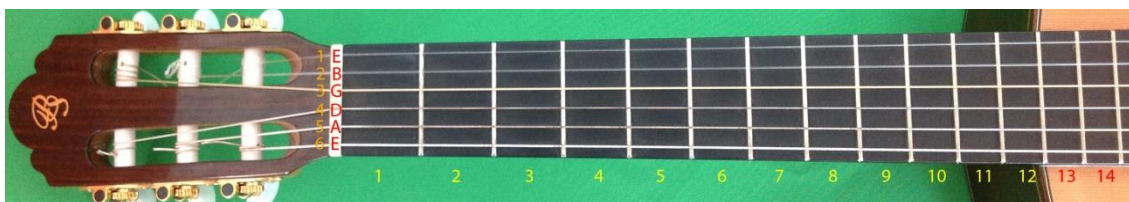


Ilustración 24: Mástil de guitarra

1.2. Aprovechando el instrumento musical empleado en la actividad anterior, podemos medir las frecuencias de las notas que se toquen para poder expresarlo en gráficos. El alumnado señala en los ejes de de ordenadas (vertical) la nota que está tocando la guitarra clásica, y en el de abscisas (horizontal), la frecuencia. Así podrán recoger en una tabla el espectro de frecuencias de las notas de la guitarra española. **3º ciclo**

1.3. El uso de la magnitud de frecuencia se ha visto reforzado en las actividades anteriores. Ahora podemos repasar los acordes vistos en el Bloque 2 “Números” a través del análisis de espectro de los armónicos naturales de la guitarra que tenemos en clase ¿Cómo se hace esto? Simplemente se usa un micrófono que recoge la señal de la guitarra, que conectado a una tarjeta de sonido a un ordenador, se puede utilizar un programa como X-air de Behringer para comprobar las frecuencias recogidas. Esto puede dar mucho juego, porque determinadas frecuencias se van a ver reforzadas según la posición, la situación y el ángulo del micrófono. **3º ciclo**



Ilustración 25: Espectro de frecuencia de una caja de batería desde el programa X-air de Behringer

1.4. Construcción de un “tetracordio”, haciendo mención al monocordio pitagórico. Se va a construir con cuatro cuerdas con el objetivo de relacionar la medida de las cuerdas, que va a ser hilo de pescar, con la razón de cada una. La cuarta cuerda será la unidad, la tercera su cuarta, la segunda su quinta y la primera su octava. Así el alumnado podrá reforzar la comprensión de los intervalos justos y la razón entre ellos. Para la caja se podrá utilizar material reciclable como un bote de detergente o una caja de cartón reforzado. **3º ciclo.** Podría corresponderse con la siguiente imagen si cumpliera con los intervalos anteriormente explicados:



Ilustración 26: Tetracordio

2. Representación de frecuencias con acordes (3º ciclo):

Puesto que el alumnado conoce las frecuencias de cada nota, podemos aplicarlas a los acordes de triada básica anteriormente aprendida (bloque 2 “Números”) formando una gráfica que muestre los tres puntos álgidos como en los ejes de coordenadas propuestos en las actividades anteriores. En el siguiente gráfico podemos visualizar las tres notas de un acorde correspondiendo cada nota a las frecuencias de la ilustración 6 de este trabajo. Los números del gráfico corresponden a esas frecuencias.

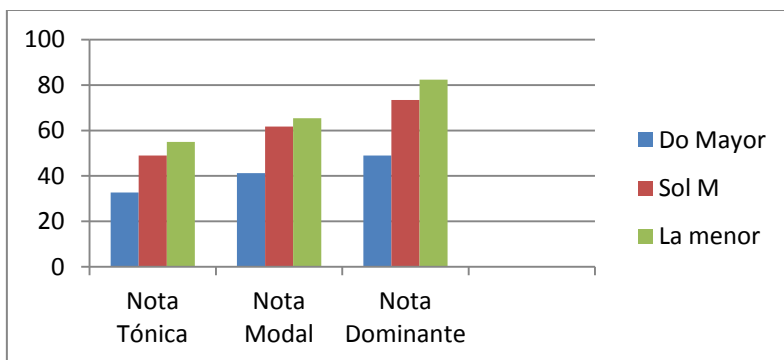


Ilustración 27: Gráfico de las frecuencias que corresponden a cada nota de un acorde

3. Experimento de “tap” (1º, 2º y 3º ciclo):

Emulando al experimento de Sethares, podría ser curioso hacer una yincana de duración de notas. Usando un pedal de golpeteo (tap tempo) o un stompbox, se puede medir la capacidad del alumnado a mantener el tempo sin adelantarse o atrasarse. El pedal iría conectado a un ordenador con un programa de grabación como el Audacity o el Cubase que tenga metrónomo, con el objetivo de que las marcas del alumnado se queden registradas para una posterior evaluación. Además de mantener el tempo, se podría complicar la cosa indicando el docente la figura o duración de la nota que el alumnado debería utilizar a la hora de pulsar, de esta manera se aprende la duración de las figuras y la cantidad de golpes que se deben efectuar, puesto que el tempo va a ir marcando la negra y el docente va a indicar la figura, ya sea señalando en la pizarra la figura ya dibujada, o transmitiéndosela oralmente.

Bloque 4: Geometría

1. Triángulos con escalas: (1º, 2º y 3º ciclo)

Aportándole al alumnado las notas de una escala, ordenadas de manera que su resultado forme una figura triangular mediante la unión de los tres puntos extremos, tendrán que unirlos y señalar qué tipo de triángulo es según sus ángulos y sus lados.

- Otra ejemplificación de trabajo a través de triángulos con escalas puede ser, trabajar el teorema de Pitágoras teniendo en cuenta que el docente ha organizado las notas para que formen un triángulo rectángulo.
- Además de esto el docente puede pedir al alumnado que ideen una escala para formar un tipo de triángulo determinado.

2. Simetría y gráficas: (1º, 2º y 3º ciclo)

- El docente puede aportar melodías grabadas, reproduciéndolas en un equipo de música. Las melodías serán tocadas de manera ascendente y luego de manera descendente,

pudiendo ser simétricas, si son la misma, o asimétricas, si no lo son. El objetivo de este juego auditivo es fomentar la escucha y potenciar el oído musical, y consiste en responder en un casillero si la melodía es simétrica o no, de manera que empiece igual que acabe pasando por ese punto de inflexión. Además de esto se puede expresar en una gráfica el proceso que sigue la melodía, si sube o baja, si vuelve a subir, y señalar el punto de inflexión, ya sea una nota muy aguda, muy grave, un silencio, etc. 1º, 2º y 3º ciclo

- Animaciones orquestales. En youtube podemos encontrar algunas “animated scores”, que consisten en expresar la música a través de unas gráficas en movimiento donde se señala la altura y el tiempo que duran una o varias notas a la vez. Según la American Mathematical Society (Sociedad Americana de las Matemáticas), la visualización de estos vídeos puede ser beneficiosa para entender la expresión numérica en gráficas. El alumnado es susceptible de estar más motivado con el uso de las nuevas tecnologías, así que esta actividad consistirá en crear nuestra propia animación gráfica orquestal, a través de la composición de sus propias líneas melódicas, que se trasladarán a un programa MIDI, que exprese gráficamente. De esta manera, el alumnado podrá comprobar los saltos entre notas que han creado (no tienen porqué tener una cadencia o una armonía definida), e incluso unir varias de las melodías, cambiándolas de octava, si es necesario para que el programa no las confunda y puedan coincidir entre ellas en algunas notas. Esto puede consistir en un repaso de la altura y las frecuencias de las actividades propuestas del Bloque 3 “Medida” explicado más arriba

He aquí un ejemplo (hacer click en el siguiente enlace):

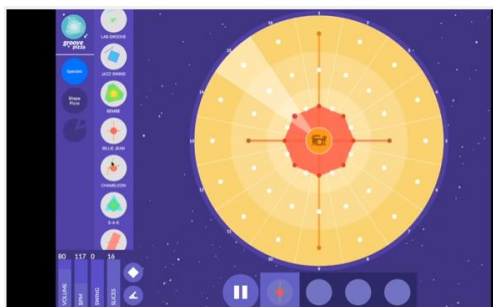
<https://www.youtube.com/watch?v=gsdtwVZJo5Y&list=PLrntsUPCY3hsgL6iJrzCPRS kQOeoAIl4j>

- A partir del conocimiento del uso de los programas informáticos necesarios para llevar a cabo este tipo de actividades, el alumnado podrá crear un conjunto de melodías como obra musical, de manera que lo expresen mediante animaciones orquestales, señalando si la obra creada es simétrica o asimétrica a partir de la partitura que se proporciona.

3. Patrones rítmicos y equivalencias. (1º, 2º y 3º ciclo)

- Como ya ha sido señalado, hoy en día es muy fácil trabajar con música y las Nuevas Tecnologías. Hay una APP llamada “Groove Pizza” con la que se pueden crear patrones rítmicos de manera muy intuitiva. En ella aparece una pizza/reloj en el que se va marcando el tiempo, puesto que divide los compases, con puntitos que pueden ser

pinchados para asignar un sonido de percusión del estilo que desee el alumnado. Además permite asignar distintas formas geométricas que equivalen a las distintas figuras que se pueden leer en un pentagrama. Por ejemplo, si estamos en un compás de cuatro por cuatro las corcheas equivalen a un octógono y las negras a un cuadrado, apareciendo en los ángulos de cada figura los grados que tienen cada uno. Aún así, se pueden cortar esas formas para crear una nueva, adecuada a lo que el alumnado quiera crear. Veamos un ejemplo:



<https://www.youtube.com/watch?v=Cn65GZD4NS8>

Así, de manera transversal, el alumnado podrá ver reforzados conceptos que atañen al bloque de Geometría e incluso conceptos musicales como las equivalencias, que podrán aparecer cuando dos de las formas coinciden en el tiempo de una figura. Aplicando ritmo y diversión, se pueden aprender muchas cosas y Groove Pizza es claro ejemplo de ello. La actividad consistiría en crear patrones rítmicos con los que hacer una canción y explicarlo a partir de la división de compases y las formas utilizadas, señalando el ángulo que formaba cada una y los grados que componen el total de la figura.

Esta APP puede ser probada pinchando en el siguiente enlace:

<https://apps.musedlab.org/groovepizza/?source=pub&museid=B1b0KNG6x&show-grid=true&multi-lock=&brainpop=false&midimap=&>

- Simultaneidad. Una actividad física tan simple como dar pasos puede tener escondidas grandes posibilidades. El docente puede aprovechar una actividad tan simple como utilizar distintos ritmos por grupos, alternando simultaneidad entre ellos. Cada grupo llevará asignado un color y un ritmo concreto. Por ejemplo se puede asignar el azul, para el grupo que dé pasos siguiendo un ritmo de cuatro por cuatro a negras; el rojo dará los pasos a blancas (el doble de duración del anterior grupo), y el verde a corcheas (la mitad de duración del grupo azul). De esta manera se hará muy fácil observar los momentos en los que coinciden los pasos de unos y de otros, respetando el tempo marcado por el docente. Así, el alumnado podrá alternarse en la función rítmica del

grupo al que pertenecen, con el objetivo de continuar aprendiendo acerca del tiempo y el ritmo y la duración de las notas que deben marcar con sus pasos.

4. Figuras y formas geométricas. (1º, 2º y 3º ciclo)

Toda aquella persona que haya estado relacionada con la música, ya sea como profesional o como aficionado, seguramente le suene aquello de las figuras musicales (blanca, negra, corchea, etc). El objetivo de la actividad es que cada alumno cree un lenguaje rítmico a partir de una canción de fácil resolución, como por ejemplo la famosa “We will rock you”. El alumnado asignará una forma geométrica a cada sonido que escuche y así podrá exponerlo en clase para que todo el mundo le acompañe.

Esta propuesta de actividades es adaptable para el alumnado de Atención a la diversidad, puesto que la mayoría de los fenómenos que se experimentan en ellas tienen un nivel orientativo, pero con la opción de restarle dificultad.

5.1.3.2. Análisis de recursos existentes

Existen muchos recursos que trabajan ambas disciplinas (Música y Matemáticas) que han inspirado la realización de este trabajo. En el anexo I se muestra la relación de los mismos con una descripción y los ámbitos que se pueden trabajar.

5.1.4. Evaluación

Finalizando con el análisis curricular iniciada en los objetivos, el presente trabajo va a evaluarse vinculando los criterios de evaluación que aparece en la Orden del 15 de marzo de 2015, para el área de Educación Artística, y el Real Decreto 126/2014, para el área de Matemáticas.

Tabla 5: Vinculación de los criterios de evaluación. Elaboración propia a partir de la Orden del 17 de marzo de 2015 y el Real Decreto 126/2014

Educación Artística	Matemáticas
CE.1.16. Acercarse a la sonorización de imágenes, piezas musicales e instrumentos, tomando como referencia los medios audiovisuales y los recursos informáticos. Ciclo 1º	12. Utilizar los medios tecnológicos de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos.
CE.2.10. Identificar conceptos geométricos de la realidad que les rodea relacionándolos y aplicándolos al área de matemáticas. Ciclo 2º (Bloque Dibujo Geométrico)	1. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, geometría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. 2. Conocer las figuras planas; cuadrado, rectángulo, romboide, triángulo, trapecio y rombo. 3. Comprender el método de calcular el área de un

	paralelogramo, triángulo, trapecio, y rombo. Calcular el área de figuras planas. 4. Utilizar las propiedades de las figuras planas para resolver problemas. 5. Conocer las características y aplicarlas a para clasificar: poliedros, prismas, pirámides, cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera y sus elementos básicos. 6. Interpretar representaciones espaciales realizadas a partir de sistemas de referencia y de objetos o situaciones familiares. 7. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.
CE.2.17. Buscar y seleccionar información bibliográfica en las TIC sobre compositores, intérpretes, instrumentos y eventos, con un uso responsable y seguro de los mismos. Ciclo 2º	12. Utilizar los medios tecnológicos de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos.
CE.3.10. Identificar conceptos geométricos de la realidad que les rodea relacionándolos y aplicándolos al área de matemáticas. Ciclo 3º (Bloque Dibujo Geométrico)	1. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, geometría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. 2. Conocer las figuras planas; cuadrado, rectángulo, romboide, triángulo, trapecio y rombo. 3. Comprender el método de calcular el área de un paralelogramo, triángulo, trapecio, y rombo. Calcular el área de figuras planas. 4. Utilizar las propiedades de las figuras planas para resolver problemas. 5. Conocer las características y aplicarlas a para clasificar: poliedros, prismas, pirámides, cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera y sus elementos básicos. 6. Interpretar representaciones espaciales realizadas a partir de sistemas de referencia y de objetos o situaciones familiares. 7. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.
CE.3.17. Indagar en los medios audiovisuales y recursos informáticos para crear piezas musicales, utilizando las posibilidades sonoras y expresivas que nos ofrecen. Ciclo 3º	12. Utilizar los medios tecnológicos de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos.

Como se puede comprobar, los criterios de evaluación relativos a música del área de Educación Artística apenas tienen relación con los del área de Matemáticas. El único punto en común es el uso de las TICs, sin embargo no se utilizan de la misma manera, por tanto es lógico pensar que hay un vacío curricular en la relación entre la música y las matemáticas, a pesar de toda la relación que ha sido expuesta en la fundamentación epistemológica de este trabajo, que no ha sido corta.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado una búsqueda de información acerca de los puntos de conexión entre la música y las matemáticas, y gracias a la sorprendente gran cantidad de bibliografía es innegable que la música y las matemáticas tienen en común gran cantidad de teoría, situaciones, propuestas y actividades que deberían poder ser aprovechadas en el aula de Educación Primaria. Por tanto, la Música y las Matemáticas están emparentadas, tienen un origen común que está en la proporción. Aunque hayan evolucionado hacia “especies” distintas, el “código genético” es muy parecido, por eso la gran cantidad de recursos que existen vinculándolas entre sí es fácilmente adaptable al aula. Sin embargo, de acuerdo con nuestra experiencia, esto no suele ocurrir así.

La actualidad legal educativa (RD 126/2014 para el Estado español y Orden del 17 de marzo de 2015 para la Comunidad Autónoma de Andalucía) hace difícil que pueda haber una relación más estrecha entre la música y las matemáticas. Sin embargo, es necesario una propuesta que integre en mayor medida estas áreas, puesto que no solamente están emparentadas, sino que además la una nace donde la otra.

Desde el punto de vista educativo esta unión tiene un gran potencial y es que, en este trabajo se aboga por que se utilicen metodologías que impliquen una mayor interdisciplinariedad.

6.1 Prospectiva

El análisis de propuestas de actividades que aparecen en el Anexo I, supone la creación de distintas ideas para aplicar en un aula de Educación Primaria. Tal es así, que, gracias a las aportaciones de Sethares (2009), se podría realizar un experimento para comprobar la capacidad de sincronización del pulso.

Hoy en día disponemos de gran tecnología informática, por lo que el docente podría aportar un pedal “tap” que consiste en un interruptor electrónico que manda una señal de audio a un ordenador, el cual marca un tempo determinado. Así el alumnado debería pulsar el interruptor intentando mantener el ritmo marcado por el pulso del ordenador. Esto se podría guardar en un archivo con el objetivo de realizar una evaluación fuera de la instantaneidad, y así comprobar cómo el alumnado mide el ritmo.

7. BIBLIOGRAFÍA

- Abdounur, Oscar Joao y otros (2009). *La proporción: arte y matemáticas*, Volumen 266. Barcelona: ediciones GRAÓ.
- Alain Lieury (2008) *¿A qué Juega mi Cerebro?* Barcelona: ediciones Robinbook.
- Alsina, Pep y Sesé, Frederic (1994). *La música y su evolución*. Barcelona: ediciones GRAÓ.
- Benson, Dave (2007). *Music: A mathematical offering*. Cambridge.
- Castro Lobo, Manuel R (2003). *Música Para Todos: Una Introducción Al Estudio de la Música*. Costa Rica: editorial de la Universidad de Costa Rica.
- Chinchilla Sibaja Ryan (2002). *Salud y Seguridad en el Trabajo*. Costa Rica: editorial EUNED.
- Cifarelli, Gloag, Greenberg, Sconyers, Zahner, (2011) *CK-12 Geometría- Edición española*, CK-12 Foundation (U.S.A)
- Contreras, Díez y Pacheco (2007) Las matemáticas y la evolución de las escalas musicales, *Revista Summa*, 54, 43-49.
En línea: <https://revistasuma.es/IMG/pdf/54/043-049.pdf>
- Crofton, Ian y Fraser, Donald (2007). *La música en citas: diccionario de citas de la música y los músicos*. Barcelona: ediciones Robinbook.
- Cromer, Alan H. (1996). *Física para las ciencias de la vida*. Barcelona: editorial Reverté S.A.
- Cyrułnik, Boris y Morin Edgar (2005). *Diálogo sobre la naturaleza humana*, Barcelona: ediciones grupo Planeta.
- García Pérez, Amaya; Hernando González, Alfonso y Otaola González, Paloma (2014). *Francisco de Salinas: música, teoría y matemática en el Renacimiento*. Salamanca: ediciones Universidad de Salamanca.
- Giráldez, Andrea y otros (2007). *La creatividad en la clase de música: componer y tocar*. Barcelona: editorial GRAÓ, de IRIF S.L.
- Gomis Fuentes, José R (2014) *Método graduado de autoaprendizaje de Solfeo: Cuaderno 1*, León: ediciones Pixel.
- H. Jeans, Sir James (1968). *Science and Music*. New York: Dover edition.
- Hernández Castelló, Esteban (2006). *España y Bolonia: siete siglos de relaciones artísticas y culturales*. Madrid: editorial Centro de Estudios Europa Hispánica.
- Jauset Barrocal, Jordi A. (2008). *Música y neurociencia: la musicoterapia*. Barcelona: editorial UOC
- Liern Carrión, V (2009), Las matemáticas de Johann Sebastian Bach, *Revista Summa*, 61, pp. 113-118. En línea: <https://revistasuma.es/IMG/pdf/61/113-118.pdf>
- Maneveau, Guy (1992) *Música y Educación*, Madrid: ediciones Rialp, S.A.
- Maor, Eli (2006) *E: historia de un número*, Méjico D.F: DR Librería.
- Marcial, Honorio (2015). *Columna de la armonía*. sección II, Oviedo: editorial masónica.
- Mariana Montiel & Francisco Gómez (2014) Music in the pedagogy of mathematics, *Journal of Mathematics and Music*, 8 (2), 151-166. En línea: <http://dx.doi.org/10.1080/17459737.2014.936109>
- Martín Moreno, Antonio (1984). *Fundamentos de la Teoría Musical*, *Enciclopedia Salvat de Los Grandes temas de la Música*, 4 tomos. Pamplona: Salvat.
- Matthews, Wade (2012) *Improvisando: la libre creación musical*, Madrid: Turner Publicaciones S.L.
- Merino de la Fuente, Jesús Mariano (2007). *Las vibraciones de la música*. Alicante: editorial Club Universitario.

- Mills, Janet (1991). *La Música en la Enseñanza Básica*. Santiago de Chile: editorial Andrés Bello.
- Otaola, Paloma (2000). *Tradición y modernidad en los escritos musicales de Juan Bermudo: del Libro primero (1549) a la Declaración de instrumentos musicales (1555)*. Kassel: Edition Reichenberger.
- Páez Gutiérrez, Tomás David (2009). *Las Matemáticas a lo largo de la historia: de la Prehistoria a la Antigua Grecia*. Madrid: editorial Visión Libros.
- Pajares Alonso Roberto L. (2014). *Historia de la música para conservatorios*, Madrid: editorial Visión Libros.
- Pajares Alonso, Roberto L. (2014). *Historia de la música en seis bloques*. Madrid: Visión Libros.
- Pilhofer, Michael y Day Holly (2010) *Teoría musical para dummies*, Barcelona: ediciones grupo Planeta.
- Pozuelos Estrada, Francisco J. (2000). El currículum integrado en el panorama educativo español, *Revista de Educación XXI*, 2, pp. 177-198. Universidad de Huelva. En línea:
<http://www.uhu.es/francisco.pozuelos/biblioteca/curriculum%20integrado%20en%20el%20panorama%20educativo%20espanol.pdf>
- Roberts, Gareth E. (2016) *From Music to Mathematics: exploring the connections*, Baltimore (Maryland): Jonhs Hopkins University Press.
- Salcedo Campos, Francisco Javier (2007). *Modelos Ocultos de Markov: Del Reconocimiento de Voz a la Música*. Granada: Lulu.com
- Schonberg, Harold (2007). *Los grandes compositores*. Barcelona: ediciones Robinbook.
- Sethares W.A. (2009). Rhythm and Transforms, Perception and Mathematics. In: Klouche T., Noll T. (eds) *Mathematics and Computation in Music. MCM 2007. Communications in Computer and Information Science*, vol 37. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Slonimsky, Nicolas (1946) The Schillinger System of Musical Composition by Joseph Schillinger, *The Musical Quarterly*, 32 (3), 465-470, Oxford University Press. En línea: <http://www.schillingersociety.com/blog/wp-content/uploads/2015/09/Schillinger-Review-by-Nicolas-Slonimsky.pdf>
- Smith, Charles J. (2008). *Music Theory and Mathematics: Chords, Collections and Transformations*. New York: University of Rochester Press
- Soriano Mas, Carles y Guillazo Blanch, Gemma (2007). *Fundamentos de neurociencia*. Barcelona: editorial UOC
- Spang, Kurt (1983). *Ritmo y versificación: teoría y práctica del análisis métrico y rítmico*. Murcia: ediciones Platería.
- Toro Himiob, Bernardo (1992). *Apolo y Dionisos: la integración en la sombra*. Caracas: ediciones Universidad de Venezuela.
- Urtubia Vicario, César (1999) *Neurología de la visión*, Barcelona: ediciones UPC.
- Willems, Edgar (1981). *El valor humano de la educación musical*. Barcelona: editorial Paidós.

8. ANEXOS

8.1 Anexo I: Recursos música y matemáticas

Enlace web	¿Qué nos ofrece?
https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-642-04579-0	Nos ofrece una serie de lecturas que tienen que ver con las Matemáticas y la Informática en la Música
http://www.mcm2017.org/	Nos ofrece información acerca de la Conferencia <i>Mathematics and Computation in Music</i> , de carácter internacional, que se ha celebrado en Méjico entre el 26 y el 29 de junio
http://www.smcm-net.info/	Esta es la web oficial de la <i>Society for Mathematics and Computation in music</i> , que ofrece algunos artículos referentes al tema de la relación entre estas materias
https://mathsciencemusic.org/	Nos ofrece información, entrevistas y recursos didácticos, tales como Groove Pizza u OIID, que guardan relación entre la música y las matemáticas.
http://www.ams.org/samplings/math-and-music	La web de la <i>American Mathematical Society</i> nos ofrece información relevante acerca de las matemáticas que hay en la música, así como artículos, entrevistas, vídeos y recursos
http://www.rsme.es/index.php?searchword=divulgamat&option=com_search&Itemid=	La web de la Real Sociedad Matemática Española nos ofrece bibliografía para encontrar relación entre las dos materias
http://labmadrid.com/lineas-basicas-proyecto-educativo/	Esta web es la del Colegio Ártica en Madrid, en la que nos ofrece unas líneas básicas de su Proyecto Educativo que está basado en el enfoque por competencias, el modelo inclusivo, el aprendizaje cooperativo, el aprendizaje basado en proyectos, los rincones de actividad y el aprendizaje basado en problemas
http://www.vancouversun.com/Entertainment/interesting+connection+between+math+music/1473881/story.html	Esta web nos ofrece un artículo dedicado a la <i>interesante conexión entre matemáticas y música</i>
http://content.time.com/time/magazine/article/0,9171,1582330-1,00.html	Este es un artículo que nos ofrece información acerca de la geometría y la música
http://ed.ted.com/lessons/music-and-math-the-genius-of-beethoven-natalya-st-clair	Nos ofrece un vídeo explicativo acerca de las matemáticas que aparecen en la música de Beethoven
http://tuvalu.santafe.edu/projects/musicplumath/index.php?id=34	Nos ofrece información y recursos, así como propuestas de actividades y vídeos curiosos que atañen a la unión de la música y las matemáticas
https://musiclab.chromeexperi	Nos ofrece recursos didácticos a partir de

ments.com/Experiments	aplicaciones en las que podemos tocar acordes en un círculo perfecto de quintas o incluso crear melodías, evitando así el difícil uso de algunos programas para crear música
https://apps.musedlab.org/grovepizza/?source=pub&mused=B1b0KNG6x&show-grid=true&multilock=&brainpop=false&midimap=&	Esta aplicación/web nos ofrece una serie de posibilidades rítmicas que podemos ordenar a nuestro gusto utilizando hasta tres instrumentos diferentes que corresponden a una batería simple: bombo, caja, charles. Además, las posibilidades rítmicas suponen el uso de formas geométricas, en las que además aparecen los ángulos de cada una según se vayan tocando los instrumentos anteriormente mencionados, con lo cual geometría y ritmo se unirían en un recurso didáctico
http://enriquealexandre.es/2013/02/20/pitagoras-las-matematicas-y-la-musica/	Nos ofrece información y lecturas que abordar en la relación entre las matemáticas y la música por la escuela pitagórica griega