



Universidad de Jaén

Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

CUERPOS GEOMÉTRICOS: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA 2º DE ESO

Alumna: Marín Gómez, Fátima

Tutor: Prof. D. Antonio Jesús López Moreno

Cotutor: Prof. D. Julio Guerrero García

Dpto: Matemáticas

Junio, 2021

"Díme y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo"

Benjamin Franklin

ÍNDICE

Resumen	4
Abstract	4
1. Introducción	5
2. Objetivos	7
3. Fundamentación didáctica	8
3.1. Artículo 1.	9
3.2. Artículo 2.	11
3.3. Artículo 3.	14
4. Fundamentación epistemológica	20
4.1. Introducción	20
4.2. Clasificación de los cuerpos geométricos.	21
4.2.1. Poliedros.	21
4.2.2. No poliedros o cuerpos redondos.	24
4.3. Poliedros irregulares.	24
4.3.1. Prisma.	25
4.3.2. Pirámide.	26
4.4. Poliedros regulares o sólidos platónicos.	27
4.4.1. Teorema de Euler.	27
4.4.2. Determinación de los cinco sólidos platónicos.	29
4.4.3. Dualidad.	31
4.5. Poliedros semirregulares o sólidos arquimedianos.	32
4.5.1. Sólidos platónicos truncados.	33
4.5.2. Sólidos platónicos expandidos.	35
4.5.3. Sólidos arquimedianos truncados.	37
4.6. Cuerpos de revolución rectos.	38
4.6.1. Cilindro.	38
4.6.2. Cono.	39
4.6.3. Esfera.	40

5. Fundamentación curricular	42
5.1. Análisis del currículo	42
5.1.1. Legislación.	42
5.1.2. Definiciones.	43
5.1.3. Competencias.	44
5.1.4. Organización de la materia de matemáticas.	45
5.1.5. Objetivos.	46
5.2. Análisis de libros de texto	47
5.2.1. SM.	48
5.2.2. ANAYA.	50
5.2.3. Conclusión.	53
6. Proyección didáctica (UD)	54
6.1. Título	54
6.2. Justificación	54
6.3. Contextualización del centro y del aula.	55
6.3.1. Situación geográfica del centro.	56
6.3.2. Descripción del centro.	56
6.3.3. Descripción del aula.	57
6.4. Objetivos	58
6.5. Competencias clave	59
6.6. Contenidos	61
6.7. Metodología	62
6.8. Actividades y recursos	63
6.8.1. Recursos.	63
6.8.2. Ejemplos, actividades y tareas.	64
6.9. Atención a la diversidad	70
6.10. Temporalización	72
6.11. Evaluación	76
7. Conclusiones	80
8. Referencias bibliográficas	81

9. Anexos	84
Anexo I. Concepciones de los estudiantes para maestro.	84
Anexo II. Objetivos generales en secundaria.	86
Anexo III. Objetivos de la materia de Matemáticas.	88
Anexo IV. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje.	90
Anexo V. Prueba inicial.	92
Anexo VI. Actividad motivadora.	93
Anexo VII. Actividades de clase.	94
Anexo VIII. Actividad de clase	96
Anexo IX. Actividad para casa: Recortables.	97
Anexo X. Actividades de clase.	100
Anexo XI. Actividad para casa: Recortables.	101
Anexo XII. Actividades de clase.	104
Anexo XIII. Actividad para casa: Recortables.	105
Anexo XIV. Prueba individual.	108
Anexo XV. Ejemplo de clase.	111
Anexo XVI. Actividad de clase.	114
Anexo XVII. Actividad IBL.	115
Anexo XVIII. Actividad de clase.	116
Anexo XIX. Problemas.	117
Anexo XX. Prueba individual.	120
Anexo XXI. Resumen de la unidad.	122
Anexo XXII. Examen: Yincana geométrica.	126
Anexo XXIII. Rúbrica de la unidad.	136

Resumen.

En el presente Trabajo Fin de Máster se elabora, teniendo en cuenta la legislación autonómica y nacional vigente, una unidad didáctica orientada a alumnos y alumnas de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria, denominada “Cuerpos geométricos” y perteneciente a la parte de geometría del espacio del bloque de geometría.

Palabras clave: cuerpos geométricos, unidad didáctica, educación secundaria.

Abstract.

In this Master's Final Project, according to regional and national legislation, a teaching unit oriented for students in the second year of Compulsory Secondary Education is developed, which is called "Geometric bodies" belonging to the 3D geometry part of the geometry block.

Keywords: geometric bodies, didactic unit, secondary education.

1. Introducción.

Con el fin de no convertir la lectura del presente documento en tediosa por el uso de un vocabulario reiterativo, y no deseando incurrir en un lenguaje sexista según *Ley Orgánica 3/2007 de 22 marzo, para la igualdad efectiva de mujeres y hombres*, utilizaré el masculino genérico que reconoce la Real Academia Española de la Lengua. De acuerdo con el precepto académico: *«los sustantivos masculinos no solo se emplean para referirse a los individuos de ese sexo, sino también, en los contextos apropiados, para designar la clase que corresponde a todos los individuos de la especie sin distinción de sexos»*. Gramática, RAE, 2009.

La elaboración del presente Trabajo Fin de Máster (TFM) tiene como principal objetivo realizar una intervención didáctica en el aula poniendo en práctica todos aquellos conocimientos, competencias y destrezas obtenidos tras la culminación del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas cursado en la Universidad de Jaén (UJA) durante el curso académico 2020-2021 en la Especialidad de Matemáticas.

La parte práctica de este TFM está vinculada con el Instituto de Educación Secundaria (IES) Cástulo, y se centra en la especialidad de Matemáticas, más específicamente, en el tema de los cuerpos geométricos que se estudia en el segundo curso de la ESO.

Como el objetivo final de este trabajo consiste en fundamentar y diseñar una unidad didáctica (en adelante: UD) sobre los cuerpos geométricos, el presente documento se va a estructurar en dos bloques claramente diferenciados.

El primer gran bloque de este trabajo, la fundamentación, estará formado por tres partes cruciales para el posterior desarrollo de la unidad:

- Fundamentación curricular. Recopilaremos lo que dicta la normativa vigente a nivel estatal y autonómico sobre el tema objeto de estudio. Además, se analizarán diferentes libros de texto con la intención de compararlos para comprobar cuál se ajusta en mayor medida a los contenidos que se pretenden enseñar en la UD desarrollada en la sección 6 del presente TFM.

- Fundamentación epistemológica. Profundizaremos en la formación del pensamiento matemático-científico correspondiente a este tópico utilizando manuales y libros de matemática superior. Elaboramos una propuesta para el tema 45 del temario oficial de oposiciones *“Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos”* que está íntimamente relacionado con los objetivos de este TFM.

- Fundamentación didáctica. En este apartado, se estudian algunos artículos de investigación didáctica relacionados con la enseñanza de los cuerpos geométricos.

Dichos estudios versan sobre errores y dificultades que presenta el alumnado en el área de la geometría espacial, y sobre estrategias, metodologías y recursos para mejorar los resultados del aprendizaje en el mismo.

El segundo bloque consistirá en la elaboración de una UD, en la cual se desarrollarán los conceptos referentes a los cuerpos geométricos (Poliedros, teorema de Euler, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) para estudiantes de 2º de ESO.

2. Objetivos.

A continuación se enuncian los objetivos que persigue este TFM, que van a estar relacionados por una parte con la formación del futuro docente y por otra con el desarrollo de las labores de profesor de matemáticas.

Como fuente, y por coherencia con el plan de estudios del MAES, los objetivos plasmados en este apartado pertenecen a las competencias recogidas en la Guía Docente de la asignatura Trabajo de Fin de Máster:

- Planificar el proceso de enseñanza en el área matemática, diseñando materiales didácticos y tareas educativas.
- Poseer una serie de conocimientos que aporten originalidad a la hora de desarrollar y aplicar ideas.
- Comprender las distintas problemáticas que pueden afectar al aprendizaje de los estudiantes.
- Ahondar en la investigación educativa para identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de la geometría y plantear alternativas y soluciones.
- Adquirir criterios para seleccionar y elaborar material educativo.
- Efectuar un estudio crítico de libros de texto.
- Utilizar diferentes fuentes y metodologías para crear de manera fundamentada tareas y trabajos.
- Conocer los contenidos curriculares relacionados con matemáticas, sus objetivos, estándares de aprendizaje y competencias clave.
- Saber transformar un currículo en un programa de actividades y trabajo.
- Detectar y analizar a los estudiantes con diferentes capacidades y ritmos de aprendizaje e intervenir adecuadamente.
- Diseñar actividades que atiendan a la diversidad y al alumnado con necesidades educativas específicas.
- Adquirir aquellos conocimientos, destrezas y actitudes que se van a necesitar para usar y aprovechar correctamente las TICs cuando se lleven a cabo las funciones docentes.
- Integrar en el proceso de enseñanza-aprendizaje la comunicación audiovisual y multimedia.
- Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de las especialidades integradas en el área matemática.

3. Fundamentación didáctica.

Dentro del temario matemático, la parte geométrica quizás sea la que podamos relacionar de una forma más directa e intuitiva con el espacio en el que vivimos, puesto que estamos rodeados de figuras y cuerpos y por este motivo nos puede resultar más fácil unir los contextos de la realidad con los matemáticos. Por lo tanto la geometría es una herramienta muy importante a la hora de comprender, describir e interactuar con nuestro mundo.

Pero sin embargo Báez e Iglesias (2007) señalan que la enseñanza de las matemáticas y en particular de su parte geométrica, presenta dificultades pues a veces los contenidos geométricos que vienen en los programas no se desarrollan porque los docentes no los consideran importantes o no los dominan y, cuando se desarrollan, se acentúa el uso de fórmulas.

Para obtener resultados académicos positivos en el bloque de geometría, por un lado, los alumnos deberían acceder a la secundaria con unos buenos cimientos conceptuales sobre el tema, de manera que se pudieran estructurar sobre ellos los nuevos conocimientos de una forma mucho más sólida y, por otro, se deberían usar metodologías de enseñanza que corrijan y erradiquen los distintos obstáculos y errores que hacen que estos alumnos desarrollen unos esquemas conceptuales insuficientes o inexactos sobre todo lo referente a figuras geométricas planas y espaciales.

Previo al desarrollo de nuestra UD hemos considerado el estudio de los siguientes 3 trabajos de investigación por tener una relación directa con el tema:

- Artículo 1: *“Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje”* desarrollado por Blanco, Lorenzo J. y Barrantes, Manuel (2003) publicado en la revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 6, núm. 2, pp. 107-132.
- Artículo 2: *“La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes”* desarrollado por Ballesterio Alfaro, Esteban y Gamboa Araya, Ronny (2010) publicado en la revista electrónica Educare, vol. 14, núm. 2, pp. 125-142
- Artículo 3: *“Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas”* desarrollado por Zapata Esteves, Marcos Augusto y Barrantes López, Manuel (2008) publicado en la revista de educación Campo Abierto, vol. 27, núm. 1, pp. 55-71

Con el primer artículo pretendemos demostrar que los alumnos llegan a niveles de secundaria con una base muy pobre, de geometría en general y de cuerpos geométricos en particular, por motivos que están demostrados a través de diversos estudios.

Ya que nuestra UD se ubica en 2ºESO, y teniendo en cuenta que en 1ºESO la ORDEN 14/07/2016 (de normativa hablaremos en el apartado 5 del TFM) no dicta nada sobre cuerpos geométricos, parece lógico remontarnos un poco más atrás para ver qué sucede con este tema en cursos anteriores. Por este motivo el primer artículo trata sobre cómo los maestros de primaria conciben la enseñanza de la geometría.

Es imposible que alguien aprenda un concepto nuevo que debe basarse en otro que se ha aprendido de forma errónea, insuficiente o simplemente no se ha aprendido. Por lo tanto intentar la enseñanza-aprendizaje de nuevos conceptos dando por sentado que nuestros alumnos ya poseen los conocimientos necesarios sin tan siquiera comprobarlo no parece lo ideal.

El objetivo del segundo artículo es comprobar de qué manera conciben los alumnos de secundaria el estudio de la geometría, con lo que tendremos una base realista sobre cómo enfocar su enseñanza-aprendizaje para conseguir una mejor asimilación de los conceptos.

Por último en el tercer artículo se hace una recopilación sobre aquellos obstáculos que dificultan el estudio de las figuras geométricas, en este caso está claro que pretendemos evitar cometer esos errores para poder transmitir de una forma más clara y exacta aquello que los alumnos deberían estructurar en sus esquemas conceptuales.

▪ 3.1. *Artículo 1.*

Con el análisis de este primer trabajo de investigación fundamentamos la idea de que los alumnos de primaria obtienen su conocimiento sobre la parte geométrica de la asignatura de matemáticas en base a las concepciones de sus maestros, y por este motivo se debería prestar una especial atención a la formación inicial de estos maestros como elemento clave si se quiere conseguir una óptima enseñanza-aprendizaje de esa parte.

Si queremos que los alumnos construyan un conocimiento matemático a partir de su comprensión, necesitamos que el profesor posea unas nociones que le permitan conectar conocimientos previos y futuros del estudiante.

Ya hace décadas que se viene denunciando la inadecuada preparación de los profesores en lo que a geometría se refiere. Teniendo en cuenta que en España los estudiantes para maestro de primaria se forman en las Facultades de Educación, a las cuales acceden con 18 años tras cursar el bachillerato y el periodo de formación es de cuatro años, es evidente que no reciben una formación especializada sobre la materia, a lo sumo un par de asignaturas de unos pocos créditos sobre matemáticas en general. A esto se añade que la formación impartida en los centros de profesores ya ha sido

reiteradamente criticada por la falta de congruencia entre la enseñanza que reciben y el tipo de educación que posteriormente deben desarrollar.

Todo lo que se ha descrito en los párrafos anteriores provoca que muchos maestros reproduzcan en su profesión aquellos modelos que recibieron cuando eran estudiantes y no sean capaces de crear modelos diferentes ni de innovar. Y muchas veces los conceptos recordados son incorrectos porque van a depender de la forma en que los aprendemos, ya que el contexto (físico y emocional) y la forma en que procesamos la información afecta a su posterior recuperación, siendo mejor o peor según hayan sido obtenidos.

En el artículo 1 se indaga sobre los recuerdos relacionados con la dificultad de la geometría escolar y la resolución de problemas mediante una serie de cuestionarios a estudiantes que aún no han recibido ninguna instrucción sobre la geometría y su enseñanza-aprendizaje en el ámbito de la educación matemática, para evitar que estuvieran influidos por contenidos o prácticas de enseñanza desarrolladas en el centro de formación de maestros.

En el [Anexo I](#) se presenta un cuadro resumen de esas concepciones que los estudiantes para maestro poseían previo a su paso por los centros de formación. Entre las contestaciones dadas en esos cuestionarios, destacamos aquellas que señalan que la dificultad radica en las fórmulas porque había que memorizarlas y en los problemas puesto que no se llegaba a comprender que fórmula se tenía que aplicar y por qué razón se usaba esa y no otra. Por otra parte, el hecho de que se dedicara más tiempo a los temas numéricos los convertían en más fáciles que los geométricos ya que al trabajarlos de manera asidua conseguían acostumbrarse a ellos. Por último, declaran conocer mejor los contenidos relacionados con la geometría plana, así que la influencia de sus conocimientos les hace concebir que la geometría espacial es más difícil, por ende la geometría plana es más importante dentro del currículo de primaria y su enseñanza es prioritaria.

Los estudiantes para maestro recuerdan que aprendían las fórmulas de memoria, y para tal fin se elaboraban recetarios que nadie les enseñaban a razonar. Estos hechos son corroborados por Martínez y otros (1889), al describir el carácter expositivo de la geometría escolar en la que se ha fomentado el aprendizaje de conceptos, teoremas o fórmulas de una forma excesivamente memorística, simplemente apoyando unos conceptos sobre otro previos y eliminando demasiado pronto la intuición como instrumento de acceso al conocimiento geométrico, todo para acelerar la adquisición por parte de los alumnos de esos conceptos, teoremas y fórmulas como si condensaran el verdadero saber geométrico. Así que no es de extrañar que a muchos alumnos les resulte extremadamente difícil, cuando no imposible, comprender el tema que se está tratando.

Los estudiantes del grado en magisterio no desean imitar a sus maestros, ya que intuyen que tiene que existir otra cultura en lo que a enseñanza-aprendizaje se refiere que podría ser aplicada, pero como apenas la conocen y no la han experimentado, sus concepciones sobre geometría están más influenciadas por sus recuerdos que por sus expectativas.

Las ideas preconcebidas que estos estudiantes para maestro tienen sobre la geometría escolar es un importante referente a la hora de aprender a enseñar, por lo tanto, el objetivo debería ser adecuar esas ideas a una enculturación matemática más afín a las propuestas que los currículos presentan en la actualidad.

▪ 3.2. Artículo 2.

Según Barrantes (2005) y Blanco (2004) algunas de las concepciones que los estudiantes ya graduados tiene sobre la enseñanza de la geometría son entre otras que su finalidad es adquirir conocimiento destinado a enriquecer su cultura general, que es una materia teórica, abstracta y difícil de entender a la que se le dedica poco tiempo y en la que hace falta memorizar muchas fórmulas y saber en qué momento aplicar cada una, por lo que se necesita mayor capacidad de razonamiento, que la metodología y los recursos más utilizados son el método clásico basado en teoría-práctica y la pizarra ayudada por el libro de texto mientras que el uso de otros materiales como figuras son poco frecuentes, que los contenidos más estudiados se relacionan con geometría plana, profundizando menos en la espacial y que el examen es el elemento más importante de la evaluación.

Teniendo como base estos referentes y como objetivo conseguir una visión general de la situación en la que se encuentra la enseñanza-aprendizaje de la geometría, en el artículo analizado en esta sección, se aplicó un cuestionario a 233 estudiantes de secundaria durante el curso 2008, para conocer su perspectiva sobre esta enseñanza y elaborar un diagnóstico sobre la misma en las aulas, teniendo en cuenta que las clases se han basado en un sistema tradicional, en las cuales los docentes presentan la teoría, desarrollan ejemplos y aportan ejercicios que deben ser resueltos por los discentes.

El cuestionario constaba de 24 preguntas relacionadas con información general, opinión personal sobre qué es aprender geometría, temas en los cuales habían tenido mayor dificultad y de qué tipo de dificultad se trataba, estrategias metodológicas empleadas por los profesores, estrategias de estudio y uso de la tecnología.

Si bien un gran número de estudiantes señala que estudiar geometría es algo importante e interesante, otra cifra no despreciable de ellos manifiesta que es difícil y aburrido. Entre las razones que dan para justificar que su estudio no es importante se encuentran:

- “No me gusta, es muy aburrido, innecesario, es el tema que complica la resolución del examen de matemática en bachillerato”.
- “No veo el modo de utilizarla ni ahora ni nunca”.
- “Algunas veces no se necesita en el futuro”.
- “No tiene nada que ver con la carrera que yo quiero estudiar”.
- “Es muy difícil y sirve de muy poco, depende de la carrera que se escoja”.
- “Creo que es un tema fácil, por lo cual en la secundaria no sería tan importante”.
- “Se ve en la escuela y no es preciso volver a verlo”.

A continuación se presentan los resultados más relevantes.

Frase	Absoluto	Porcentaje
Algo importante, interesante	72	30,9
Difícil, una situación que no es de mi agrado, aburrido	70	30,0
Estudiar propiedades de las figuras	19	8,2
Fácil	18	7,7
Una forma de aprender, pensar y razonar	11	4,7
Aprender matemática	9	3,9
Poco útil, una pérdida de tiempo	4	1,7
Otros	14	6,0
No respondió	16	6,9
Total	233	100

Tabla 2: Comentarios realizados por el estudiantado para completar la frase “para mi aprender geometría es...” (EDUCARE, 2010, Vol.14, nº2, p.125-142).

Teniendo en cuenta que el principal argumento que brindan es que no le encuentran una utilidad, es lógico que consideren que lo aprendido en etapas anteriores es más que suficiente y no muestren interés en esta materia.

Las lecciones sobre esta disciplina se desarrollan de manera abstracta, no proporcionando al estudiante ejemplos reales o contextos para facilitar un mejor entendimiento de esos contenidos, de manera que su enseñanza frecuentemente se limita a dibujar y reconocer figuras en un papel.

Si la geometría se presenta como un conjunto de definiciones, fórmulas y teoremas alejados de la realidad, y los ejercicios se muestran de manera descontextualizada, los alumnos perciben la materia como poco importante por ser inaplicable en sus vidas.

Todo esto choca con las razones que presentan aquellos que consideran que aprender geometría es esencial, justamente indicando que los contenidos desarrollados son aplicables en la vida cotidiana. Ellos sostienen que la geometría es

un pilar en la formación académica y cultural de las personas debido a su aplicabilidad en diversos contextos, su capacidad formadora del razonamiento lógico (Báez e Iglesias, 2007) y la manera en que contribuye para desarrollar habilidades de visualización, intuición, pensamiento crítico, conjeturización, razonamiento deductivo, resolución de problemas y argumentación de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002).

No obstante, el actual sistema de educación usualmente presenta los contenidos de geometría como el producto acabado de la actividad matemática. Su enseñanza tradicional se centra en memorizar fórmulas para calcular áreas y volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, y como mucho se apoya en construcciones de manera descontextualizada y mecánica.

Como los resultados obtenidos en la [Tabla 2](#) se basan en un sistema tradicional de enseñanza, es evidente que con el tipo de actividades inherentes a esta metodología se enfatiza la aplicación de fórmulas y aspectos memorísticos, relegando a un segundo plano los procesos de visualización, argumentación y justificación.

Por este motivo también se pidió la opinión sobre si sería conveniente recibir las clases en un aula donde pudieran utilizar ordenadores, y el 75'5% contestó de manera afirmativa argumentando que:

- “Con el uso de ordenadores es más fácil el estudio de la geometría”.
- “Se pueden realizar muchos más ejemplos y practicar más que en un libro”.
- “Jugar con las figuras tridimensionales es menos aburrido”.
- “Se llevan a cabo trabajos mejores y más ordenados”.
- “Se aprende mediante memoria visual”.
- “Cambiar la rutina aumenta el interés”.
- “Es un medio que permite aclarar algunas dudas de manera inmediata”.
- “Investigar de manera autónoma hace que se aprenda más sobre el tema”.

Para aquellos que se posicionaron en contra de esta metodología argumentaban:

- “Los ordenadores dan la respuesta, lo que provoca la pérdida de la práctica que se adquiere mediante el trabajo realizado a mano”.
- “Es mucho más difícil”.
- “La atención se centraría en los ordenadores y no en el tema a desarrollar, nadie pondría atención ni dejaría poner atención”.

Seleccionar los recursos más adecuados para la enseñanza de la geometría es responsabilidad de los docentes que deberían emplear estrategias metodológicas de

manera que se facilite el aprendizaje. Para ello la tecnología podría ser un gran aliado, pero se utiliza poco.

Además del uso de pizarra, tiza y libros de texto se podrían utilizar otros recursos como juegos, materiales concretos ad hoc, fotocopias y alguna aplicación móvil o programa de ordenador especial para geometría.

Si queremos que los alumnos aprendan geometría de una manera significativa para que no carezca de sentido, tendríamos que centrarnos en desarrollar sus habilidades para la exploración, visualización, argumentación y justificación. Deberían ser capaces de descubrir, aplicar y obtener conclusiones, en lugar de simplemente memorizar.

Dentro del proceso formativo del individuo, los estudiantes deben ser promotores de su aprendizaje y los docentes simples guías que contribuyan planteando actividades y recursos para facilitarlos.

En conclusión, no se trata de enseñar contenidos como una “receta” o por cumplir con el currículo, con la enseñanza de la geometría se debería pretender que los discentes aprendan a pensar lógicamente.

▪ 3.3. Artículo 3.

En este artículo se reflexiona sobre aquellos obstáculos y errores que provocan un desarrollo incompleto o mal construido de esquemas conceptuales sobre nociones, propiedades y clasificación de figuras geométricas y se dan sugerencias basadas en una metodología constructiva para corregirlos con el fin de erradicarlos.

Vinner (1991) habla de “esquema conceptual como aquello que se presenta en la mente cuando se nombra el concepto”, así que cuando pedimos que un alumno identifique o construya un ejemplo de un concepto previamente explicado, entra en juego aquella estructura cognitiva que el estudiante asocia al concepto matemático, y que ha sido formada por una serie de imágenes mentales que el alumno relaciona con ese concepto fruto a su vez de la propia experiencia personal.

En la actualidad existe una corriente pedagógica fundamentada en el conocimiento constructivista (constructivismo) que considera los errores como una línea de trabajo en las que se examinan sus causas y evolución. En los últimos diseños curriculares basados en el constructivismo, se considera a los alumnos como el eje de su propio aprendizaje y los errores que puedan cometer se consideran como un elemento de ese proceso. De esta manera, los errores cometidos por los alumnos ya no son un elemento sancionable convirtiéndose en incapacidades sin interés que hay que ignorar hasta que se corrijan, esperando que eso suceda espontáneamente. Así según Contreras y Blanco, 2001 muchos estudiantes muestran errores que ni evolucionan ni son subsanados a lo largo de los distintos niveles educativos perdurando incluso tras formarse como maestros y transmitiéndolos a sus alumnos.

La enseñanza tradicional se basa en libros de texto en los que frecuentemente encontramos estilos generalizados sobre los conceptos de geometría y el diseño de las figuras, esta generalización obstaculiza el desarrollo de un pensamiento más abierto creando en los alumnos esquemas conceptuales que impiden el proceso de abstracción y manejo de ideas. Además el hecho de trabajar exclusivamente con libros y actividades en papel obliga a la representación bidimensional de objetos tridimensionales con la que se pierde el efecto de profundidad.

La exclusiva utilización del libro de texto en el proceso de aprendizaje de figuras geométricas es una de las causas principales por las que se generan los siguientes errores:

- Los libros presentan las distintas figuras geométricas a través de un número tan pequeño de dibujos que el alumnado construye su esquema conceptual alejándose de la verdadera definición del concepto.
- las figuras son representadas de manera que el profesor y el alumno hacen diferentes interpretaciones del mismo dibujo, sobre todo en el caso de representaciones planas de figuras tridimensionales, ya que el paso del espacio al plano en muchas ocasiones admite más de una interpretación, como ejemplo la **figura 1_a** puede interpretarse como un cuadrado y sus diagonales, una pirámide cuadrada vista desde el ápice o una bipirámide cuadrada.
- las figuras vienen dibujadas en un sistema de representación que los alumnos no dominan, como ejemplo la **figura 1_b** muestra unos ejes en sistema isométrico que dificulta o imposibilita a los alumnos que no conocen este sistema el poder ver los ángulos rectos del plano.

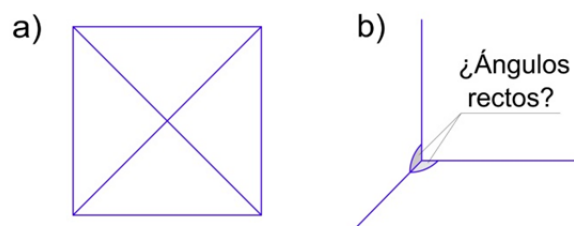


Figura 1: Ejemplos (remasterización propia de CAMPO ABIERTO, 2008, Vol.27, nº1, p.58).

Si separar el objeto abstracto del real es complicado para los alumnos, a esto muchas veces se le añade la dificultad de que los libros muestran fotografías poco adecuadas para una primera presentación de esa figura o sólido. Como ejemplo presentar como primera aproximación para el concepto de pirámide una foto de La Gran Pirámide de Guiza, como si el niño hubiera estado en Egipto y las hubiera podido ver en realidad, provoca que el niño sea incapaz de formarse una imagen mental adecuada.

Algunas veces, solo por tener unas características visuales fuertes, los alumnos incluyen en su esquema conceptual propiedades visuales irrelevantes que pertenecen

exclusivamente a algunos ejemplos y que nada tiene que ver con el concepto. En estos casos los alumnos no son capaces de identificar figuras o propiedades por haberse formado una imagen mental sin haber interiorizado otros ejemplos que serían igualmente válidos:

- Cuando se explican los ángulos se suelen dibujar con un lado paralelo al borde horizontal del libro y por este motivo algunos alumnos incluyen este atributo en su esquema conceptual sobre ángulos, creyendo que siempre tienen que dibujarlos con un lado horizontal (véase [Figura 2_a](#)). Lo mismo ocurre con el trazado de rectas paralelas o perpendiculares entre sí que suele hacerse siguiendo la dirección de los bordes del libro (véase [Figura 2_b](#)). Lo que se podría evitar haciendo algunas veces representaciones con rectas perpendiculares entre sí pero no paralelas a los laterales del libro.

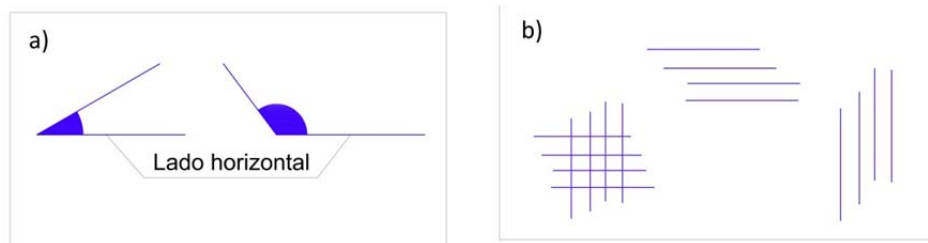


Figura 2: Ejemplos (remasterización propia de CAMPO ABIERTO, 2008, Vol.27, nº1, p.59).

- A la hora de construir triángulos rectángulos es muy común representarlos apoyados sobre uno de los lados que forma el ángulo recto (véase [Figura 3_a](#)), lo mismo sucede con los rombos que suelen dibujarse apoyados sobre un vértice (véase [Figura 3_b](#)) o los sólidos sobre su base (véase [Figura 3_c](#)), provocando la creencia en los alumnos de que esta es la única forma de dibujarlos, cosa evitable si se hicieran representaciones de triángulos rectos orientados de diferentes formas, rombos apoyados en alguno de sus lados y prismas apoyados sobre un vértice o una cara lateral.

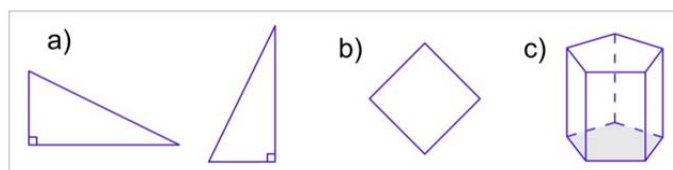


Figura 3: Ejemplos (remasterización propia de CAMPO ABIERTO, 2008, Vol.27, nº1, p.59).

- Los libros de textos conceden cierta importancia a la base de los sólidos como objeto clasificador, puesto que determina el nombre que reciben o su condición de regularidad, contribuyendo a que los alumnos piensen que la base es la cara en la que los cuerpos geométricos se apoyan o simplemente no es una cara en el caso de prismas y pirámides ya que en muchos libros se consideran como caras solo a las laterales (véase [Figura 4](#)).

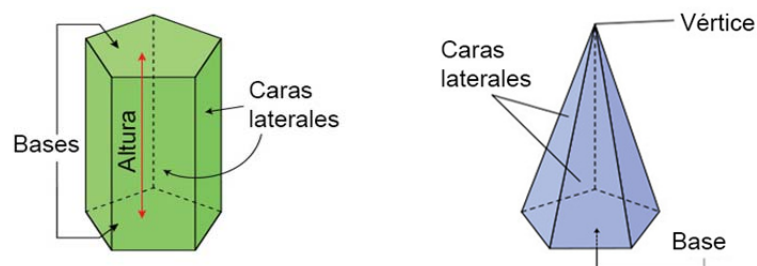


Figura 4: Figuras ejemplo de prisma y pirámide (ANAYA, 2017, p.216 y 218).

Y en otras ocasiones debido a una exclusión intencionada de algún elemento o propiedad la presentación del concepto es incompleta:

- Al presentar triángulos isósceles se suelen trazar apoyados por el lado desigual que normalmente se dibuja más pequeño que los otros dos (véase Figura 5).

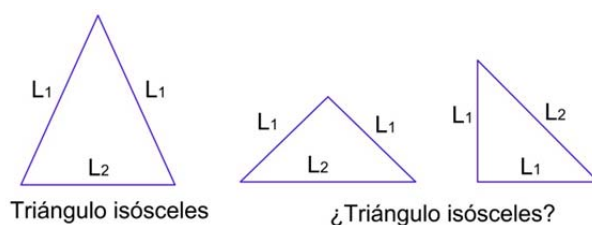


Figura 5: Ejemplos (remasterización propia de CAMPO ABIERTO, 2008, Vol.27, nº1, p.60).

- El estudio de alturas dibujándolas siempre interiores al triángulo repercute en la incapacidad que tienen algunos alumnos para trazarlas en triángulos obtusángulos (véase Figura 6_a) y rectángulos (ya que dos alturas condicen con dos lados), por otro lado como hemos visto anteriormente el hecho de disponer siempre un lado del triángulo horizontal crea una altura paralela al lado del folio y esto provoca la concepción errónea de dibujarla siempre paralela al borde aunque no sea perpendicular a la base (véase Figura 6_b).

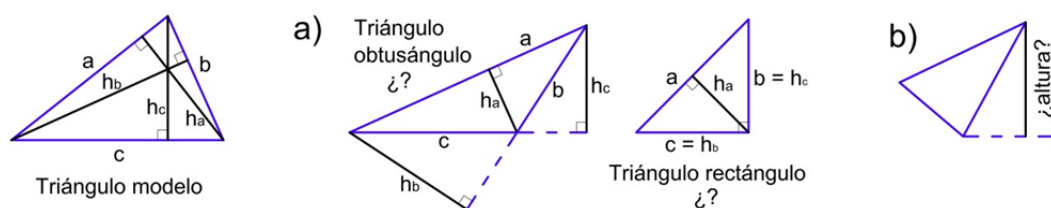


Figura 6: Ejemplos (remasterización propia de CAMPO ABIERTO, 2008, Vol.27, nº1, p.60).

- El hecho de representar constantemente la altura de la misma manera en definiciones, actividades, Teorema de Pitágoras etc... provoca en los alumnos la idea equivocada de que en los triángulos existe una única altura dificultándoles el trabajar actividades con alturas que no sean la estándar o en las que se les pide que dibujen todas las alturas ya que desconocen la existencia de las otras.
- Durante la enseñanza de la geometría se muestran pocas o ninguna imagen de figuras planas cóncavas y sólidos cóncavos, lo que incapacita al alumnado para

identificarlas y clasificarlas incitando a que únicamente conciban la existencia de figuras y sólidos convexos.

El estudio de Medici y otros (1986) señala que se comete un error al hacer una insistencia desmesurada sobre la nomenclatura tradicional, puesto que pareciera considerarse únicamente como figuras geométricas aquellas que tienen un nombre común “oficial”. Provocando que los alumnos identifiquen más fácilmente aquellas que conocen por su nombre (ej. pentágono, cubo) y se muestren reticentes a identificar como polígonos o sólidos a los demás (ej. polígono de 15 lados “pentadecágono”).

En Gutiérrez y Jaime (1996) se apunta cómo en el proceso de enseñanza-aprendizaje los conceptos elementales sobre geometría se presentan de dos formas distintas:

1. Con el enunciado de la definición y ejercicios tanto memorísticos como de reconocimiento de figuras.
2. Presentando distintas figuras con las que se describen sus características para posteriormente definirlas, después realizar ejercicios con los que memorizar esa definición y actividades para reconocer figuras.

En ambas metodologías se presta más atención a las definiciones que a los ejemplos, por lo tanto estas impactan en los alumnos de una manera más duradera y profunda, provocando que los alumnos memoricen las definiciones pero no sepan utilizarlas para resolver actividades.

Por otra parte, los errores también pueden ocasionarse porque una misma expresión puede tener distintas interpretaciones. Por ejemplo si definimos triángulo isósceles como “*triángulo con dos lados iguales*” se puede interpretar de dos formas:

1. Dos lados son iguales y el otro es desigual.
2. Dos lados son iguales pero el otro puede ser igual o desigual.

Así que una correcta definición de triángulo isósceles sería “*triángulo que tiene como mínimo dos lados iguales*”, con lo que no se descarta que pueda tener los tres lados iguales (triángulo equilátero).

La primera definición se da en primaria, mientras que la segunda se da en secundaria. Y este tipo de errores puede ocasionar que un alumno clasifique en diferentes familias de polígonos a un mismo conjunto de elementos geométricos.

Un problema muy común se plantea con la clasificación de las formas planas (triángulos y cuadriláteros) que repercute en la clasificación de otros conjuntos como son los sólidos.

En primaria se suelen hacer clasificaciones por partición debidas al tipo de definiciones que se utilizan, como ejemplo los triángulos se clasifican en equiláteros, escalenos e isósceles dependiendo del número de lados que tienen iguales.

Pero en secundaria se realiza una clasificación jerárquica o por inclusión ya que las definiciones se realizan con mayor exactitud, como ejemplo el triángulo equilátero pertenece a un subconjunto de los isósceles y estos a su vez pertenecen a un subconjunto de los generales.

La falta de claridad y unificación en los criterios de clasificación de las figuras planas provoca en los alumnos dificultad a la hora de clasificarlos y por extrapolación les cuesta trabajo clasificar los sólidos.

Las primeras imágenes conceptuales y definiciones aprendidas por los alumnos se encuentran tan arraigadas que las nuevas definiciones, que se crean con el objetivo de cambiar esa imagen conceptual, no son admitidas, ya que no hay nadie que les advierta del cambio de definición (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992).

La mayoría de estos errores y obstáculos se subsanarían si se trabajase con otros materiales o recursos como poliedros reales o aplicaciones informáticas con las que el alumnado pueda girar y observar el sólido desde diferentes puntos de vista, ya que se podrían formar un esquema conceptual mucho más amplio, conciso y mejor estructurado.

4. Fundamentación epistemológica.

▪ 4.1. Introducción.

Para comenzar a hablar de geometría nos tenemos que remontar al año 3000 a.C, momento en que podemos encontrar algunos registros ya en tiempo de los sumerios. Después, los Babilónicos fueron capaces de resolver múltiples problemas de áreas y volúmenes utilizando métodos empíricos o de tanteo. Pero fueron los griegos los que transformaron la naturaleza empírica de las matemáticas prehelénicas en deductiva, obteniendo conclusiones geométricas mediante deducciones lógicas, y no por simples experimentos.

La principal fuente de información que poseemos de la Geometría Antigua fue escrita por Proclo y es conocida como “Sumario de Eudemo”. Contiene una breve descripción del origen y desarrollo de la geometría desde los tiempos primitivos hasta Euclides.

Los primeros trabajos sobre sistematización de la geometría fueron realizados por Tales de Mileto. Le sucede Pitágoras, reconocido por fundar la famosa Escuela Pitagórica donde se hicieron grandes aportes a la geometría, demostraron proposiciones y desarrollaron teorías bastante completas. Esas proposiciones se combinan en cadenas mayores de razonamientos y surge la idea de que el desarrollo de la geometría se puede establecer en una sola cadena larga. Pero no fue hasta el año 300 a.C. que el matemático Euclides escribió el libro “los Elementos” que contendría esta cadena de proposiciones que comprende la Geometría plana y del Espacio.

La Geometría Euclidiana se puede considerar una ciencia deductiva puesto que sus bases son las definiciones, los postulados y las nociones comunes. Las deducciones lógicas tienen que ser independientes de cualquier significado que pudiera relacionarse con los conceptos, convirtiéndose en un procedimiento algebraico que solo emplean símbolos y fórmulas. La geometría se reduce a un procedimiento estrictamente formal, completamente independiente de cualquier interpretación que se le pudiera dar a los símbolos que intervienen.

Debemos a Platón y sus seguidores un estudio muy completo de los cinco poliedros regulares, y por este motivo también reciben el nombre de sólidos platónicos.



Ilustración 1: Teoría cosmogónica de los sólidos platónicos (López, S. Sólidos Platónicos).

Tomando estos sólidos como base, se construyó una teoría cosmogónica: cuatro elementos de la naturaleza estarían representados por cuatro de ellos, y el quinto representaría el universo. El tetraedro es el fuego, el cubo la tierra, el octaedro el aire, el icosaedro el agua y el dodecaedro simbolizaba el cosmos puesto que puede englobar a los demás.

Los trece poliedros semirregulares también son conocidos como sólidos arquimedianos ya que su estudio y descripción se atribuye al gran Arquímedes.

Los cuerpos geométricos constituyen uno de los objetos esenciales de la geometría desde las pirámides egipcias hasta los rascacielos modernos. A lo largo de los siglos, la arquitectura ha basado sus estructuras en las figuras poliédricas. Le Corbusier las presenta como formas primarias sin ambigüedad y bellas.

Observando la naturaleza podemos encontrar poliedros regulares: los cristales de sal tienen forma cubica, la estructura molecular del carbono puede ser un octaedro o un tetraedro y podemos encontrar modelos exactos de dodecaedros, icosaedros y octaedros en los esqueletos de algunos diminutos animales marinos.

▪ 4.2. Clasificación de los cuerpos geométricos.

Los cuerpos geométricos son entes abstractos que solo existen en nuestra mente, por lo tanto son figuras idealizadas de objetos de la vida real que no tiene existencia en el espacio físico.

Son figuras geométricas tridimensionales con anchura, profundidad y altura que en una primera aproximación se pueden clasificar dependiendo de si todas sus caras son planas (poliedro) o tiene alguna superficie curva (no poliedro).

▫ 4.2.1. Poliedros.

Como el concepto de poliedro no es fácil de concretar, usualmente se opta por una definición descriptiva donde se explica cuáles son las propiedades que lo caracterizan y que debe cumplir.

Definición de poliedro.

Un poliedro es un cuerpo del espacio tridimensional limitado por un conjunto finito de polígonos planos tales que cada uno de los lados pertenece a dos de dichos polígonos, y dos polígonos con un lado común no pertenecen al mismo plano.

Elementos que conforman un poliedro.

- Los polígonos planos que delimitan el poliedro se llaman CARAS.
- Los lados de los polígonos, que son la intersección de dos caras, se llaman ARISTAS.

- Los vértices de los polígonos, que son la intersección de más de dos caras, se llaman VÉRTICES DEL POLIEDRO.
- Dos CARAS que tengan una arista en común se llaman CONTIGUAS.
- Dos VÉRTICES serán CONTIGUOS si son los extremos de una misma arista.
- Las ARISTAS que tengan un vértice en común se llaman CONTIGUAS

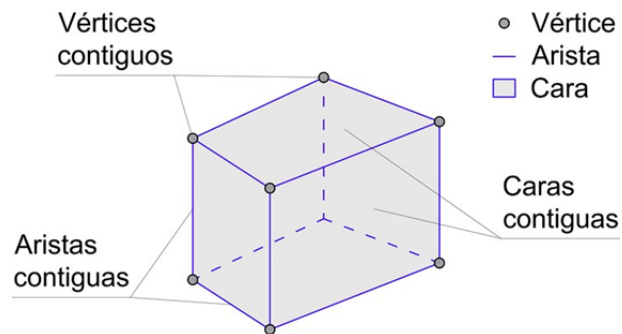


Ilustración 2: Elementos que conforman un poliedro (elaboración propia).

Nombre de los poliedros.

Los poliedros o “n-edros” se nombran atendiendo al número “n” de sus caras ($n > 3$):

Tetraedro	$n=4$	Octaedro	$n=8$
Pentaedro	$n=5$	Eneaedro	$n=9$
Hexaedro	$n=6$	Decaedro	$n=10$
Heptaedro	$n=7$	Etc...	

Clasificación inicial de poliedros.

Existen infinitos poliedros y pueden ser clasificados atendiendo a diferentes criterios basados en sus características.

En un principio los vamos a clasificar según sean cóncavos o convexos (Véase [Figura 7](#)):

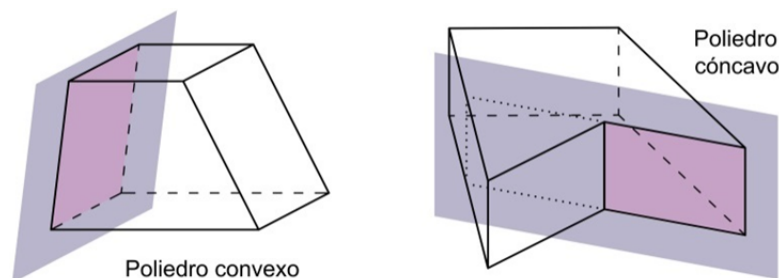


Figura 7: Ejemplo de poliedro cóncavo y convexo (elaboración propia).

- Poliedro cóncavo: Aquel que tiene alguna cara cuyo plano atraviesa al poliedro, es decir, existe alguna cara que al prolongarla lo corta. También se puede describir como aquel que tiene alguna cara que no se puede apoyar sobre un plano.

- Poliedro convexo: Aquel en que prolongando una cualquiera de sus caras queda todo él en una de las regiones del espacio formadas por el plano ilimitado de dicha cara. En este caso, cualquiera de sus caras puede ser apoyada sobre un plano.

Debido a la amplitud del tema nos limitaremos a estudiar los poliedros convexos.

Tipos de poliedros convexos.

Antes de comenzar con la clasificación aclaremos algunos conceptos que utilizaremos posteriormente:

- Polígono regular: En geometría plana, polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí.

- Polígono irregular: En geometría plana, polígono que no es regular. Es decir, cualquier polígono que cumpla una de las dos condiciones siguientes: no todos los lados son de igual longitud, o no todos los ángulos interiores tienen el mismo tamaño.

- Orden de un vértice: Número de caras que concurren en ese vértice.

- Vértices uniformes: Se dice que un poliedro tiene vértices uniformes cuando todos sus vértices tienen el mismo orden. En este caso, el número de caras que concurren en cada vértice del poliedro es siempre igual.

- Paralelogramo: Es el cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son paralelos e iguales.

- Perpendicularidad: Propiedad geométrica por la cual una línea o plano forma noventa grados con otra línea o plano.

- Paralelismo: Propiedad geométrica por la cual una línea o plano forma cero grados con otra línea o plano, pudiendo estar separados cierta distancia.

Lo usual a la hora de clasificar los poliedros es atender a tres propiedades:

- 1.- Sus caras son polígonos regulares.
- 2.- Se hace uso del mismo polígono para toda su construcción.
- 3.- A cada vértice concurren el mismo número de caras.

Atendiendo a estos criterios podemos clasificar los poliedros en diferentes categorías:

✓ **Poliedros regulares o sólidos platónicos:** Aquellos cuyas caras son polígonos regulares idénticos y todos sus vértices son uniformes.

✓ **Poliedros semirregulares o sólidos arquimedianos:** Aquellos cuyos vértices tienen el mismo orden y sus caras son polígonos regulares de dos o más tipos.

✓ **Poliedros irregulares:** Aquellos cuyas caras son polígonos irregulares, o bien aquellos que teniendo polígonos regulares por caras tienen vértices de distinto orden.

En secciones posteriores estudiaremos estos tres tipos de poliedros con mayor profundidad.

▣ 4.2.2. No poliedros o cuerpos redondos.

Un no poliedro es un cuerpo geométrico cuyas caras encierran un volumen finito y que posee, al menos, una superficie curva (véase [Figura 8](#)).

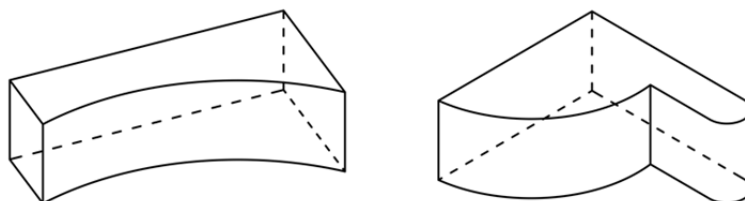


Figura 8: Ejemplos de no poliedros (elaboración propia).

Teniendo en cuenta la abundancia de cuerpos redondos, vamos a limitarnos a ver los cuerpos de revolución.

Definición de superficie y cuerpo de revolución.

Una superficie de revolución viene engendrada por una línea que gira alrededor de una recta llamada eje. La línea que gira se llama GENERATRIZ, y en la rotación los puntos de la generatriz se mantienen a la misma distancia del eje describiendo circunferencias cuyos centros se encuentran en el eje y cuyos planos son perpendiculares a él.

Los cuerpos de revolución van a estar delimitados por una superficie de revolución y un par de planos. Dependiendo de si estos planos son perpendiculares al eje o están inclinados respecto de él serán rectos u oblicuos respectivamente (véase [Figura 9](#)).

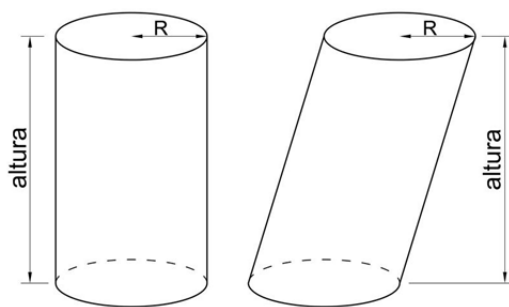


Figura 9: Ejemplo de cilindro recto y oblicuo (elaboración propia).

En la sección 4.6 del presente TFM estudiaremos más detenidamente los tres **cuerpos de revolución rectos** más importantes.

▣ 4.3. Poliedros irregulares

Algunas de las clases fundamentales de este tipo de poliedros son:

Prisma, formado por dos polígonos iguales y paralelos (BASES), unidos, por tantos paralelogramos (CARAS LATERALES) como lados tienen las bases.

Pirámide, formada por un polígono (BASE) de cuyas aristas salen triángulos (CARAS LATERALES) que convergen todos en un mismo vértice (ÁPICE).

Antiprisma, como el prisma pero con caras laterales triangulares (véase Figura 10).

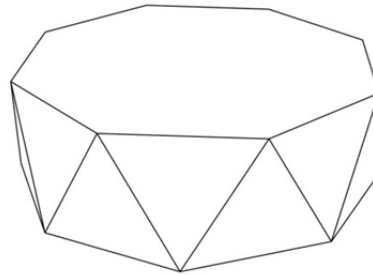


Figura 10: Ejemplo de antiprisma (elaboración propia).

Paralelepípedo, es un hexaedro cuyas caras son paralelogramos paralelos e iguales dos a dos (véase Figura 11). Dentro de este grupo encontramos los ortoedros formados por rectángulos (véase Figura 11).

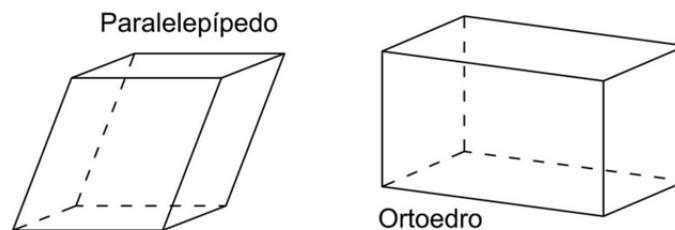


Figura 11: Ejemplo de paralelepípedo y ortoedro (elaboración propia).

Deltaedro, formado por caras que son triángulos equiláteros iguales (véase Figura 12).

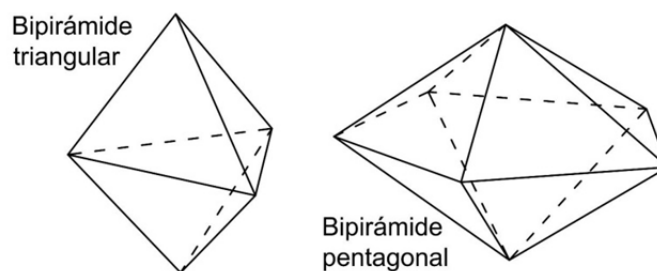


Figura 12: Ejemplos de deltaedros (elaboración propia).

▣ 4.3.1. Prisma.

Los prismas se pueden clasificar de acuerdo a cuatro criterios:

1- Si son cóncavos o convexos. Esta primera clasificación ya se había visto con anterioridad y hemos circunscrito el estudio a los convexos.

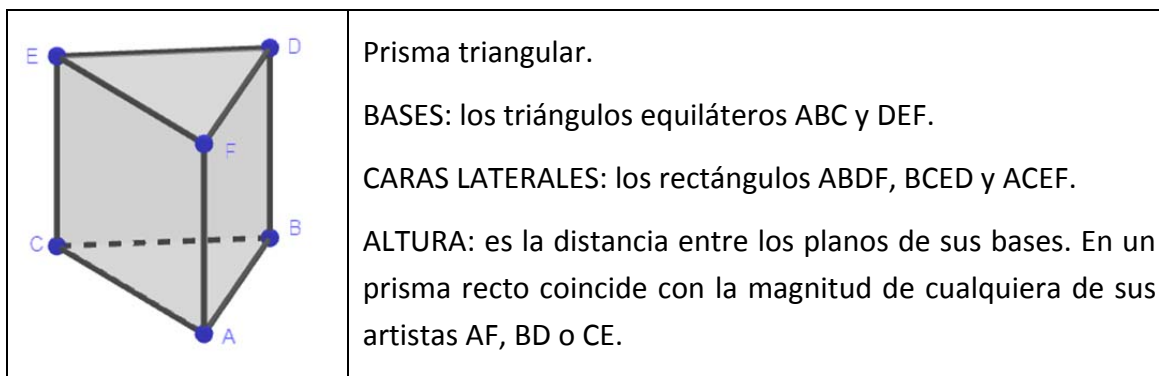
2- El número de lados “n” que tienen sus bases.

Prisma triangular	n=3	Prisma pentagonal	n=5
Prisma cuadrangular	n=4	Etc...	

3- Regularidad del polígono usado en sus bases. Según esto reciben el nombre de prisma regular o prisma irregular.

4- Si son rectos u oblicuos. Si se puede trazar una recta perpendicular a las bases que pase por los centros de ambos polígonos decimos que el prisma es recto, y sus caras laterales serán cuadrados o rectángulos. En caso contrario será oblicuo.

A continuación estudiaremos un prisma regular y recto. Sus caras laterales serán rectángulos o cuadrados todos iguales.



Área y Volumen del prisma.

Área de una base: es el área de uno de los polígonos regulares que tiene por bases. Por lo tanto, es la mitad del perímetro por la apotema.

$$A_B = \frac{p \cdot a}{2}$$

Área lateral: se calcula multiplicando la altura por el perímetro de la base.

$$A_L = p \cdot H$$

Área total: es el área de ambas bases más el área lateral.

$$A = 2 \cdot A_B + A_L$$

También se puede calcular multiplicando el perímetro de la base por la suma de la apotema de la base y la altura del prisma.

$$A = p(a + H)$$

Volumen: es igual al área de la base por altura.

$$V = A_B \cdot H$$

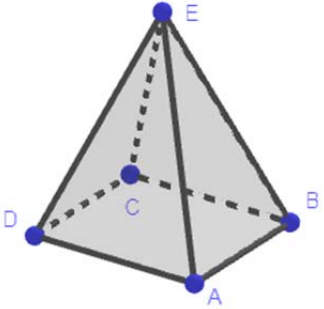
▣ 4.3.2. Pirámide.

Las pirámides se pueden clasificar de acuerdo a los mismos cuatro criterios que los prismas, por lo tanto nos centraremos en el único criterio diferente:

4- Si son rectas u oblicuas. Si se puede trazar una recta perpendicular a la base que pase por el centro del polígono y por el vértice de la pirámide, nos encontramos

con una pirámide recta. En caso contrario la pirámide es oblicua y no todos los triángulos laterales serán isósceles.

A continuación estudiaremos una pirámide regular y recta. Sus caras laterales serán triángulos isósceles todos iguales.

	Pirámide cuadrangular. BASE: el cuadrado ABCD. CARAS LATERALES: los triángulos isósceles ABE, BCE, CDE y ADE. ALTURA: es la distancia del plano de la base al ápice, en una pirámide recta es la magnitud del segmento OE, donde O es el centro del polígono regular.
---	---

Área y Volumen de la pirámide.

Área de la base: es el área del polígono regular que tiene por base.

$$A_B = \frac{p \cdot a}{2}$$

Área lateral: se calcula multiplicando el perímetro de la base por la altura del triángulo de la cara lateral y dividiendo entre dos.

$$A_L = \frac{p \cdot h}{2}$$

Área total: es el área de la base más el área lateral.

$$A = A_B + A_L$$

También se puede calcular multiplicando la mitad del perímetro de la base por la suma de la apotema de la base y la altura del triángulo lateral.

$$A = \frac{p}{2} (a + h)$$

Volumen: Es un tercio del volumen de un prisma con la misma base y altura. Por lo tanto es igual a un tercio del área de la base por altura.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H$$

■ 4.4. Poliedros regulares o sólidos platónicos.

A continuación se estudian los cinco poliedros regulares, cómo se determinan y la razón de que solo sean 5 y no existan más. También vamos a estudiar la propiedad de dualidad por la cual se pueden inscribir unos dentro de otros.

□ 4.4.1. Teorema de Euler.

En todo poliedro convexo el número de caras más el de vértices es igual al de aristas más dos unidades.

$$C + V = A + 2$$

Probar la fórmula de Euler es fundamental para demostrar que solo existen cinco poliedros regulares y de esta manera la clasificación de los sólidos arquimedianos se reduce a un ejercicio de combinatoria.

Proposición 1.

Sean A el número de aristas, V el número de vértices y C el número de caras de una red plana convexa, entonces $C - A + V = 1$.

Demostración.

Vamos a probar el resultado por inducción sobre C.

Comenzamos con C=1, es decir una red formada por un solo polígono. Sabemos que en cualquier polígono el número de lados y de vértices coinciden A=V, por lo tanto nuestra base de inducción queda demostrada.

$$\begin{cases} C - A + V = 1 \\ C = 1 \\ A = V \end{cases} \Rightarrow 1 - V + V = 1 \rightarrow 1 = 1$$

Hipótesis de inducción: Supongamos que es cierto el enunciado para redes de (C-1) caras. Sea ahora una red de C caras, localizamos una cara con una arista que solo pertenezca a esa cara (véase [Figura 13](#)). Dicha cara tendrá (k) aristas que no pertenecen a ninguna otra cara de la red y (k-1) vértices que tampoco pertenecen a otra cara.

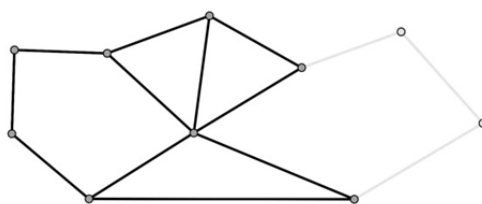


Figura 13: Red plana convexa (elaboración propia).

Si eliminamos esas (k) aristas, los (k-1) vértices van a desaparecer también, y nos quedamos con una cara menos. Obteniendo una nueva red con (C-1) caras, (A-k) aristas y (V-(k-1)) vértices.

$$\begin{cases} C - A + V = 1 \\ C = C - 1 \\ A = A - k \\ V = V - k + 1 \end{cases} \Rightarrow (C - 1) - (A - k) + (V - k + 1) = 1$$

$$C - A + V = 1$$

♦

Por lo tanto nuestra proposición para redes planas convexas queda demostrada.

Proposición 2.

Sean A , V y C el número de caras, vértices y aristas de un poliedro convexo, entonces $C - A + V = 2$.

Demostración.

Desarrollando el diagrama de Schlegel (Victor Schlegel, 1886) de un poliedro convexo (véase [Figura 14](#)), obtenemos una red plana convexa en la que se ha excluido la cara del poliedro desde la que se está dibujando el referido diagrama.

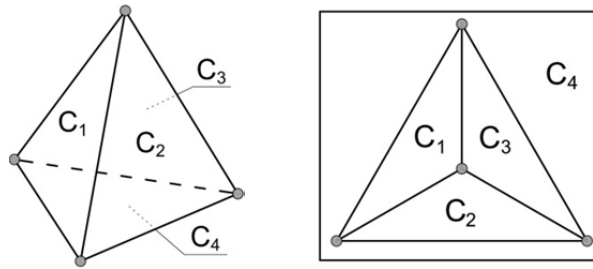


Figura 14: Diagrama de Schlegel de un poliedro convexo (elaboración propia).

Por lo tanto aplicando esto a la proposición anteriormente demostrada obtenemos:

$$(C - 1) - A + V = 1$$

$$C - A + V = 2$$

◆

Quedando de esta manera demostrado el Teorema de Euler.

▣ 4.4.2. Determinación de los cinco sólidos platónicos.

Sean A , V y C el número de caras, vértices y aristas de un poliedro regular. Por ser regular, todas sus caras son polígonos regulares idénticos y sus vértices son uniformes.

m = orden de los vértices = número de aristas concurrentes en cada vértice.

n = número de lados del polígono = número de aristas de cada cara.

Sabemos que cada arista contiene a 2 vértices. Por ende, podemos deducir que el número total de aristas se obtiene multiplicando “ m ” por “ V ” y dividiendo entre 2, puesto que hemos contado cada arista dos veces $2 \cdot A = m \cdot V$.

También sabemos que en un poliedro cada arista pertenece solo a dos caras. Entonces el número total de aristas se obtiene multiplicando “ n ” por “ C ” y dividiendo entre 2, puesto que hemos contado cada arista dos veces $2 \cdot A = n \cdot C$.

Teniendo en cuenta estas dos igualdades y la fórmula de Euler, podemos probar que solo existen cinco poliedros regulares.

$$2A = nC \Rightarrow A = \frac{nC}{2}$$

$$2A = mV \Rightarrow 2 \frac{nC}{2} = mV \Rightarrow V = \frac{nC}{m}$$

$$C - A + V = 2 \Rightarrow C - \frac{nC}{2} + \frac{nC}{m} = 2 \Rightarrow 2mC - mnC + 2nC = 4m$$

El polígono regular con menos aristas que podemos encontrar es el triángulo equilátero, por lo tanto $n \geq 3$.

El vértice de un poliedro pertenece como mínimo a tres caras y tres aristas, por lo tanto $m \geq 3$.

$$C(2m - mn + 2n) = 4m$$

$$C > 0 \text{ y } 4m > 0 \Rightarrow 2m - mn + 2n > 0$$

Tomamos el menor valor posible de “m”, y sustituimos.

$$2 \cdot 3 - 3n + 2n > 0$$

$$6 - n > 0 \Rightarrow n < 6$$

De manera que los únicos valores posibles para “n” son 3, 4 y 5.

- $n = 3$

$$2m - 3m + 2 \cdot 3 > 0$$

$$6 - m > 0 \Rightarrow m < 6$$

De manera que los únicos valores posibles para “m” son 3, 4 y 5.

$$m = 3$$

$$C(2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3) = 4 \cdot 3 \Rightarrow C = 4$$

$$m = 4$$

$$C(2 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3) = 4 \cdot 4 \Rightarrow C = 8$$

$$m = 5$$

$$C(2 \cdot 5 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3) = 4 \cdot 5 \Rightarrow C = 20$$

- $n = 4$

$$2m - 4m + 2 \cdot 4 > 0$$

$$8 - 2m > 0 \Rightarrow m < 4$$

De manera que el único valor posible para “m” es 3.

$$m = 3$$

$$C(2 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = 4 \cdot 3 \Rightarrow C = 6$$

- $n = 5$

$$2m - 5m + 2 \cdot 5 > 0$$

$$10 - 3m > 0 \Rightarrow m < \frac{10}{3}$$

De manera que el único valor posible para “m” es 3.

$$m = 3$$

$$C(2 \cdot 3 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 5) = 4 \cdot 3 \Rightarrow C = 12$$

Estos cinco poliedros regulares son los únicos sólidos platónicos que existen puesto que no hay más casos posibles (véase [Figura 15](#)).



Figura 15: Poliedros regulares (elaboración propia).

Sustituyendo “n”, “m” y “C” en las ecuaciones de los vértices y las aristas se obtiene el resto de datos de los poliedros.

<i>n</i>	<i>Nombre del polígono</i>	<i>m</i>	<i>C</i>	$V = \frac{nC}{m}$	$A = \frac{nC}{2}$	<i>Nombre del poliedro</i>
3	triángulo	3	4	4	6	tetraedro
4	cuadrado	3	6	8	12	cubo
3	triángulo	4	8	6	12	octaedro
5	pentágono	3	12	20	30	dodecaedro
3	triángulo	5	20	12	30	icosaedro

Tabla 3: Características de los cinco poliedros regulares (elaboración propia).

▣ 4.4.3. Dualidad.

El poliedro conjugado de un poliedro convexo “P” es aquel cuyos vértices son un punto interior de cada una de las caras de “P”. Los poliedros conjugados de los poliedros regulares son también poliedros regulares.

En la [Tabla 3](#) podemos comprobar que “C” del cubo es igual a “V” del octaedro, y “V” del cubo es igual a “C” del octaedro. Por lo tanto, uniendo los centros de las caras contiguas del cubo, obtenemos un octaedro como su poliedro conjugado (véase [Figura 16](#)). Recíprocamente, uniendo los centros de las caras contiguas del octaedro, obtenemos un cubo como su poliedro conjugado (véase [Figura 16](#)).

Por esta propiedad el cubo y el octaedro son poliedros duales, al igual que son duales el dodecaedro y el icosaedro (véase [Figura 17](#)), y el dual del tetraedro sería otro tetraedro (véase [Figura 17](#)).

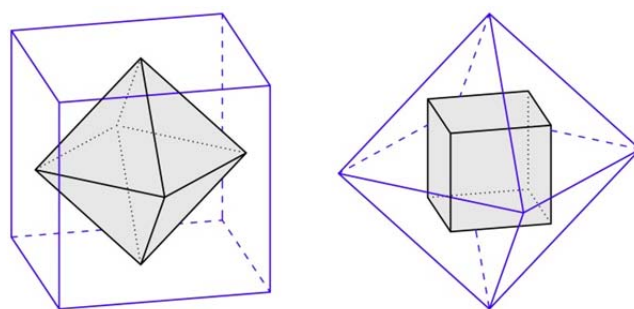


Figura 16: Dualidad cubo-octaedro y viceversa (elaboración propia).

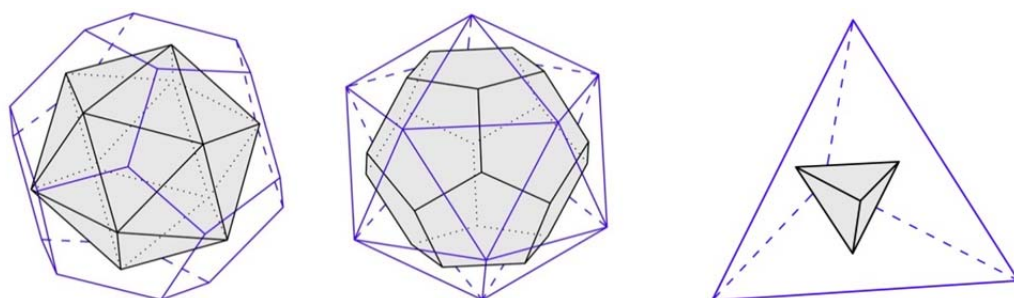


Figura 17: Dualidad dodecaedro-icosaedro y tetraedro-tetraedro (elaboración propia).

■ 4.5. Poliedros semirregulares o sólidos arquimedianos.

A continuación se estudian los trece poliedros semirregulares conocidos como sólidos arquimedianos (véase **Figura 18**). Veremos cómo se obtienen y los clasificaremos en tres grupos: Sólidos platónicos truncados, sólidos platónicos expandidos y sólidos arquimedianos truncados.

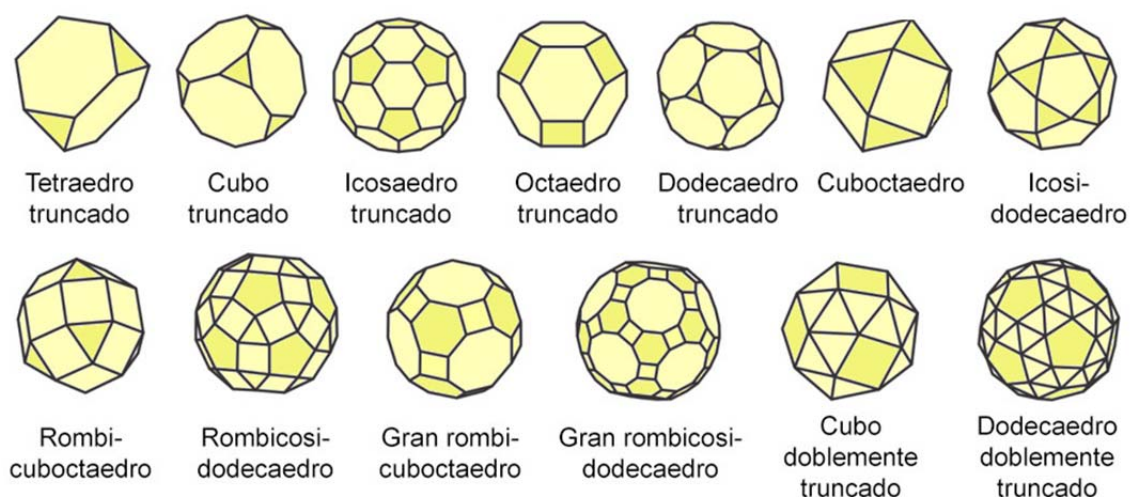


Figura 18: Poliedros semirregulares (elaboración propia).

Es evidente que existen más poliedros semirregulares, como los antiprismas de base regular cuyas caras laterales son triángulos equiláteros, o los prismas de base regular y caras cuadradas. Pero en este apartado no se va a hacer un seguimiento completo para no complicar demasiado este estudio.

▣ 4.5.1. Sólidos platónicos truncados.

Si cortamos un poliedro por un plano cercano a un vértice, se obtiene un nuevo poliedro con una cara más. Aplicando esta operación, llamada truncamiento, a todos los vértices de un poliedro regular, obtenemos poliedros semirregulares, siempre y cuando las nuevas caras obtenidas sean polígonos regulares.

De esta manera podemos distinguir dos tipos de truncamiento:

Truncamiento tipo I.

En este caso, los planos de corte pasan por los puntos medios de las aristas. Como podemos observar utilizando este tipo de truncamiento en un tetraedro obtenemos un octaedro (véase Figura 19).

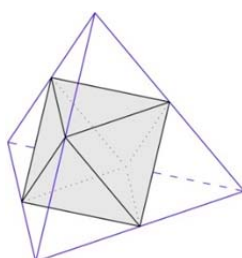


Figura 19: truncamiento tipo I de un tetraedro (elaboración propia).

Sean A_0 , V_0 y C_0 el número de caras, vértices y aristas del poliedro regular que vamos a trincar. Sea m_0 el orden de los vértices y n_0 el número de aristas de cada cara. Sean los mismos con subíndice T para el poliedro truncado que obtendremos.

Sabemos que por cada arista (A_0) vamos a obtener un vértice (V_T). Es evidente que vamos a tener dos tipos de caras (C_T), las caras que se generan al trincar cada vértice (V_0), cuyo número de lados (n_T) se corresponderá con el orden de los vértices (m_0) y las caras que se encuentran en los mismos planos que las caras (C_0) y que van a tener tantos lados (n_T) como lados tuvieron esas caras (n_0). Del primer tipo tendremos tantas caras como vértices (V_0), y del segundo tipo, tantas como caras (C_0). Por último recordamos las siguientes fórmulas $2 \cdot A = n \cdot C$ $2 \cdot A = m \cdot V$

Como el poliedro obtenido en el ejemplo anterior es un sólido platónico, vamos ahora a trincar un octaedro para conseguir el cuboctaedro (véase Figura 20).

$$\begin{aligned} A_0 &= 12 = V_T \\ C_0 &= 8 = C_T \text{ con } n_T = 3 = n_0 \\ V_0 &= 6 = C_T \text{ con } n_T = 4 = m_0 \\ A_T &= \frac{(3 \cdot 8) + (4 \cdot 6)}{2} = 24 \\ m_T &= \frac{2 \cdot A_T}{V_T} = \frac{2 \cdot 24}{12} = 4 \end{aligned}$$

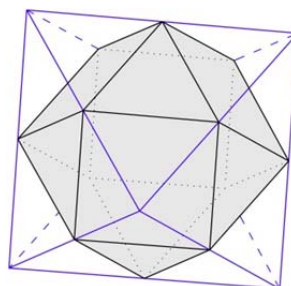


Figura 20: cuboctaedro (elaboración propia).

En la [Tabla 4](#) se recogen los nombres de los poliedros semirregulares obtenidos por truncamiento tipo I y el poliedro del que han sido sacados:

<i>Nombre del poliedro inicial</i>	<i>Nombre del poliedro truncado</i>	<i>Caras</i>	<i>A</i>	<i>V</i>	<i>m</i>
tetraedro	octaedro				
cubo	cuboctaedro	8 triángulos 6 cuadrados	24	12	4
octaedro					
dodecaedro	icosidodecaedro	20 triángulos 12 pentágonos	60	30	4
icosaedro					

Tabla 4: Características de poliedros semirregulares tipo I (elaboración propia)

Truncamiento tipo II.

Los planos de corte pasan por los puntos de las aristas que sean equidistantes del vértice. De esta manera se obtiene un nuevo polígono regular con el doble de lados que el inicial.

Por cada arista (A_0) vamos a obtener dos vértices (V_T). Como antes volvemos a tener dos tipos de caras (C_T), las caras que se generan al truncar cada vértice (V_0), cuyo número de lados (n_T) se corresponderá con el orden de los vértices (m_0) y las caras que se encuentran en los mismos planos que las iniciales (C_0) y que van a tener tantos lados (n_T) como lados tuvieron esas caras (n_0) multiplicadas por dos. Del primer tipo tendremos tantas caras como vértices (V_0), y del segundo tipo, tantas como caras (C_0).

Como ejemplo podemos observar cómo un tetraedro se convierte en un tetraedro truncado mediante la utilización de este tipo de truncamiento (véase [Figura 21](#)).

$$2 \cdot A_0 = 12 = V_T$$

$$C_0 = 4 = C_T \text{ con } n_T = 6 = 2 \cdot n_0$$

$$V_0 = 4 = C_T \text{ con } n_T = 3 = m_0$$

$$A_T = \frac{(4 \cdot 6) + (4 \cdot 3)}{2} = 18$$

$$m_T = \frac{2 \cdot A_T}{V_T} = \frac{2 \cdot 18}{12} = 3$$

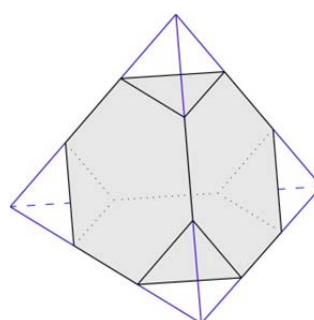


Figura 21: tetraedro truncado (elaboración propia).

En la [Tabla 5](#) se recogen los nombres de los poliedros semirregulares conseguidos mediante truncamiento tipo II y el poliedro del que se obtienen:

Nombre del poliedro inicial	Nombre del poliedro truncado	Caras	A	V	m
tetraedro	Tetraedro truncado	4 triángulos 4 hexágonos	18	12	3
cubo	cubo truncado	8 triángulos 6 octógonos	36	24	3
octaedro	octaedro truncado	6 cuadrados 8 hexágonos	36	24	3
dodecaedro	dodecaedro truncado	20 triángulos 12 decágono	90	60	3
icosaedro	icosaedro truncado	12 pentágonos 20 hexágonos	90	60	3

Tabla 5: Características de poliedros semirregulares tipo II (elaboración propia)

4.5.2. Sólidos platónicos expandidos.

El rombicuboctaedro y el rombicododecaedro, parecen provenir de truncar el cuboctaedro y el icosidodecaedro respectivamente. Sin embargo, no puedes truncar un sólido con caras de distinta forma y terminar con polígonos regulares como caras.

Estos sólidos se van a construir a partir de los sólidos platónicos originales mediante un proceso conocido como expansión, que consiste en separar las caras del poliedro original con simetría esférica, hasta que se puedan unir mediante polígonos regulares.

Como ejemplo podemos observar un cubo transformándose en un Rombicuboctaedro. Para ello se reducen las caras a un cuadrado de lado igual al octógono inscrito en la cara del cubo (véase Figura 22), lado que también se utilizará para construir el resto de polígonos, cuadrados y triángulos.

Ahora vamos a tener tres tipos de caras (C_T), las caras que se generan al truncar cada vértice (V_0), cuyo número de lados (n_T) se corresponderá con el orden de los vértices (m_0), las caras que hay por cada cara (C_0) y que van a tener tantos lados (n_T) como lados tuvieron esas caras (n_0) y las caras que aparecen por cada arista (A_0) y que van a ser cuadrados. Por cada vértice (V_0) vamos a obtener tantos vértices (V_T) como orden tuviera (m_0).

$$A_0 = 12 = C_T \text{ con } n_T = 4$$

$$C_0 = 6 = C_T \text{ con } n_T = 4 = n_0$$

$$V_0 = 8 = C_T \text{ con } n_T = 3 = m_0$$

$$m_0 \cdot V_0 = 24 = V_T$$

$$A_T = \frac{(12 \cdot 4) + (6 \cdot 4) + (8 \cdot 3)}{2} = 48$$

$$m_T = \frac{2 \cdot A_T}{V_T} = \frac{2 \cdot 48}{24} = 4$$

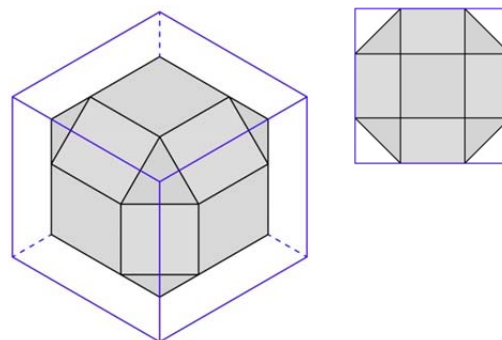


Figura 22: rombicuboctaedro (elaboración propia).

El cuboctaedro truncado y el icosidodecaedro truncado, se forman de manera parecida con el mismo proceso de expansión.

En otro ejemplo podemos observar un cubo transformándose en un cuboctaedro truncado (véase Figura 23). El objetivo es conseguir polígonos en las caras con el doble de lados que los originales, y los vértices se truncan con un polígono que tenga el doble de lados que el orden del vértice.

En este caso también tenemos tres tipos de caras (C_T), las caras que se generan al truncar cada vértice (V_0), cuyo número de lados (n_T) será el doble que el orden de los vértices (m_0), las caras que hay por cada cara (C_0) y que van a tener el doble de lados (n_T) que las caras iniciales (n_0) y las caras que aparecen por cada arista (A_0) y que van a ser cuadrados.

$$A_0 = 12 = C_T \text{ con } n_T = 4$$

$$C_0 = 6 = C_T \text{ con } n_T = 8 = 2 \cdot n_0$$

$$V_0 = 8 = C_T \text{ con } n_T = 6 = 2 \cdot m_0$$

$$2 \cdot m_0 \cdot V_0 = 48 = V_T$$

$$A_T = \frac{(12 \cdot 4) + (6 \cdot 8) + (8 \cdot 6)}{2} = 72$$

$$m_T = \frac{2 \cdot A_T}{V_T} = \frac{2 \cdot 72}{48} = 3$$

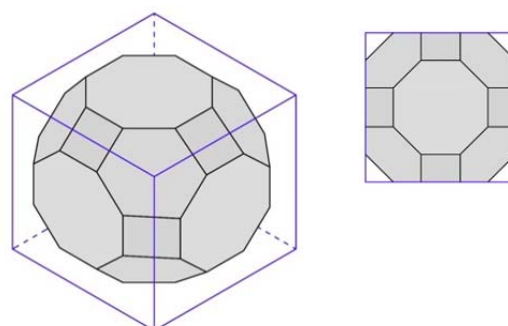


Figura 23: cuboctaedro truncado (elaboración propia).

En la Tabla 6 se recogen los nombres de los poliedros obtenidos por expansión y el poliedro del que han sido generados:

<i>poliedro inicial</i>	<i>Nombre del nuevo poliedro</i>	<i>Caras</i>	<i>A</i>	<i>V</i>	<i>m</i>
cubo u octaedro	rombicuboctaedro	8 triángulos 6 cuadrados 12 cuadrados	48	24	4
	cuboctaedro truncado	8 hexágonos 6 octógonos 12 cuadrados	72	48	3
dodecaedro o icosaedro	rombicosidodecaedro	20 triángulos 12 pentágonos 30 cuadrados	120	60	4
	icosidodecaedro truncado	20 hexágonos 12 decágonos 30 cuadrados	180	120	3

Tabla 6: Características de los poliedros semirregulares expandidos (elaboración propia)

4.5.3. Sólidos arquimedianos truncados.

Los últimos dos sólidos arquimedianos, el cubo romo y el dodecaedro romo tienen dos variaciones quirales, es decir poseen simetría especular o respecto de un plano. La palabra quiralidad deriva del griego $\chiείρ$ (kheir), que significa mano, un ejemplo muy familiar de objeto quiral.

Estos poliedros se construyen a partir de otros sólidos arquimedianos, mediante un proceso de alternancia que consiste en truncar vértices alternos.

Partiendo del cuboctaedro truncado, eliminando vértices alternos y creando triángulos equiláteros en los vértices eliminado, obtendremos el cubo romo (véase [Figura 24](#)). El dodecaedro romo se obtendría mediante este mismo proceso, partiendo del icosidodecaedro truncado.

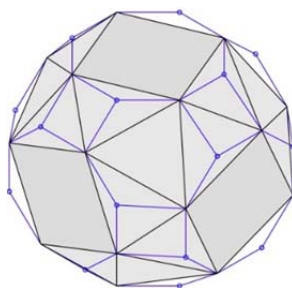


Figura 24: Cubo romo (elaboración propia).

Otra manera de obtener las dos variaciones del cubo romo es a partir del rombicuboctaedro, mediante una rotación coordinada de los cuadrados que eran paralelos a los originales del cubo, y convirtiendo cada uno de los cuadrados que los conectan en dos triángulos equiláteros. La orientación del sólido resultante dependerá del sentido de rotación de los cuadrados.

Siguiendo el mismo principio, las dos formas de obtener el icosidodecaedro romo es a partir del rombicoidodecaedro, mediante una rotación coordinada de los pentágonos que eran paralelos a los originales del dodecaedro, y convirtiendo cada uno de los cuadrados que los conectan en dos triángulos equiláteros. La orientación del sólido resultante dependerá del sentido de rotación de los pentágonos.

En la [Tabla 7](#) se recogen los nombres de los poliedros romos obtenidos y el poliedro del que han sido sacados:

<i>Nombre del poliedro inicial</i>	<i>Nombre del nuevo poliedro</i>	<i>Caras</i>	<i>A</i>	<i>V</i>	<i>m</i>
Cubo u octaedro	Cubo romo	32 triángulos 6 cuadrados	60	24	
Dodecaedro o icsaedro	Dodecaedro romo	80 triángulos 12 pentágonos	150	60	

Tabla 7: Características de los poliedros semirregulares romos (elaboración propia)

▪ 4.6. Cuerpos de revolución rectos.

▫ 4.6.1. Cilindro.

En el cilindro, la generatriz es paralela al eje. Podríamos decir que viene generado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados (véase Figura 25).

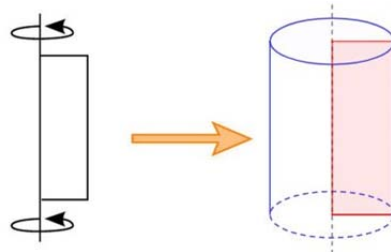


Figura 25: Generación del cilindro (elaboración propia).

Se llama cilindro recto a la porción de espacio que se encuentra delimitado por una superficie cilíndrica de revolución y dos planos perpendiculares al eje. Las secciones producidas por estos planos, son dos círculos a los que llamaremos BASES, y la distancia entre las bases será la ALTURA.

	Dado el rectángulo ABCD, al girarlo alrededor del lado AB generáramos un cilindro circular recto. Cuya ALTURA sería la línea AB, coincidente en magnitud con el segmento CD que es la GENERATRIZ. Y sus BASES serían los círculos descritos por los lados AD y BC.
--	---

Área y Volumen del cilindro.

Área de una base: es el área de uno de los círculos que tiene por bases.

$$A_B = \pi \cdot r^2$$

Área lateral: es el área de la superficie cilíndrica. Para calcularla utilizamos el primer teorema de Pappus-Guldin, por el cual el área de una superficie de revolución se halla multiplicando la línea generatriz (Lg) por la longitud de la circunferencia (Lc) que describe el centroide. En este caso Lg es la altura del cilindro (H), y Lc tiene como radio el de la base.

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H$$

Área total: es igual al área lateral más las áreas de ambas bases.

$$A = 2 \cdot A_B + A_L$$

Volumen: es el volumen de un prisma de base circular. Por lo tanto es igual al área de la base por altura.

$$V = A_B \cdot H$$

▣ 4.6.2. Cono.

En el cono, el extremo inicial de la generatriz pertenece al eje y su extremo final se va a encontrar en algún punto que no pertenezca al mismo. De manera que puede considerarse generado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos (véase Figura 26).

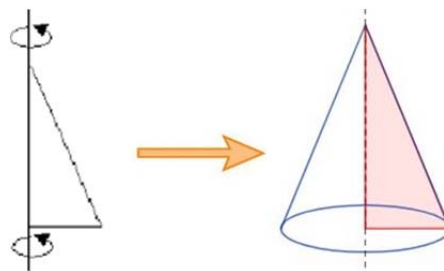


Figura 26: Generación del cono (elaboración propia).

Se llama cono recto a la porción de espacio que se encuentra delimitado por una superficie cónica de revolución y un plano perpendicular al eje. La sección producida por este plano es un círculo, al que llamaremos BASE, y la ALTURA será la distancia que hay de la base al vértice del cono.

	Dado el triángulo rectángulo ABC, al girarlo alrededor del lado AB se genera un cono circular recto. La hipotenusa BC es la GENERATRIZ encargada de generar la superficie cónica. El cateto AB es la ALTURA del cono y el otro cateto AC es el radio del cono que genera la BASE circular.
--	---

Área y Volumen del cono.

Área de la base: es el área del círculo que tiene por base.

$$A_B = \pi \cdot r^2$$

Área lateral: es el área de la superficie cónica. Volvemos a utilizar el teorema de Pappus-Guldung, por lo tanto multiplicamos la línea generatriz (Lg) por la longitud de la circunferencia (Lc) que describe el centroide, siendo ahora el radio de "Lc" la mitad que el radio de la base puesto que el centroide se encuentra en la mitad de la altura.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot Lg$$

Área total: es igual al área lateral más el área de la base.

$$A = A_B + A_L$$

Volumen: se calcula como si de una pirámide de base circular se tratase. Por lo tanto es igual a un tercio del área de la base por altura.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H$$

▣ 4.6.3. Esfera.

En la esfera, la generatriz es una semicircunferencia cuyo diámetro coincide con el eje. En este caso podríamos decir que la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro generaría una esfera (véase [Figura 27](#)).

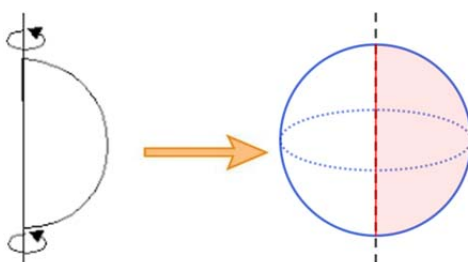
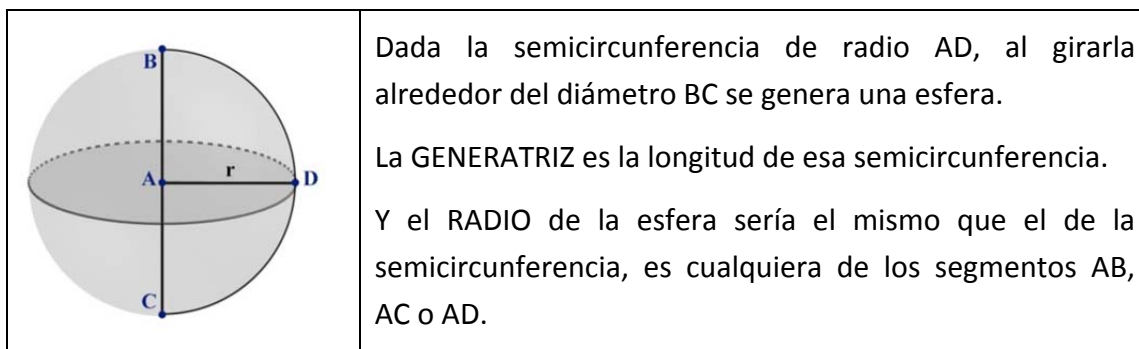


Figura 27: Generación de la esfera (elaboración propia).

La superficie esférica es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de uno al que llamamos centro. La distancia del centro a cualquier punto de esta superficie se llama RADIO.



Área y Volumen de la esfera.

Área: para la superficie esférica consideramos L_g como la semicircunferencia de radio igual al de la esfera y concretamos que L_c mide 4 veces el radio.

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Volumen: Arquímedes fue capaz de demostrar de un modo muy original que el volumen de una esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circular circunscrito a ella, y en tanta estima tenía este descubrimiento que mandó que en su tumba se grabase ese dibujo (véase [Figura 28](#)) en recuerdo de la mejor de sus ideas.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Como se puede observar, el cilindro circunscrito a una esfera tiene de radio de la base el mismo que el de la esfera y su altura es igual al diámetro de la misma

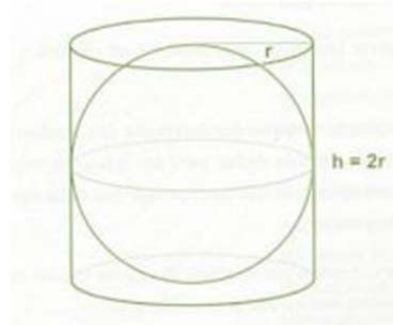


Figura 28: Grabado volumen de una esfera (<https://comosacar.com/wp-content/uploads/2018/11/cilindro-esfera-e1542457480766.jpg>).

5. Fundamentación curricular.

Para llevar a cabo la fundamentación curricular de la UD que se pretende desarrollar en la presente memoria, tendremos que realizar, por un lado, un análisis del currículo escolar, y por otro lado, un análisis de algunos libros de texto.

De manera que posteriormente, en la sección 6 del presente TFM, se puedan establecer los cuatro elementos necesarios para la enseñanza:

- Los *objetivos* con los que se define “**para qué enseñar**”.
- Los *contenidos y competencias*, con ellos precisamos “**qué enseñar**”.
- Con la *metodología, recursos y actividades* detallamos “**cómo enseñar**”.
- Con la *temporalización* especificamos “**cuándo enseñar**”.

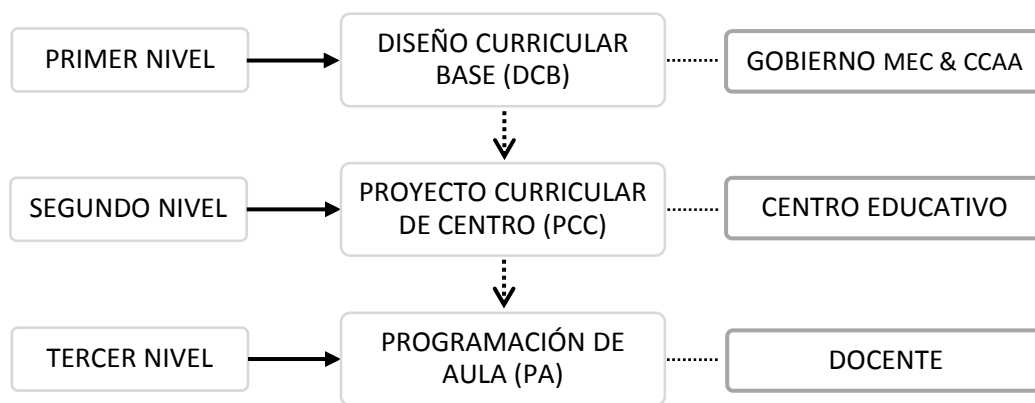
En concreto la unidad objeto de estudio trata sobre “Cuerpos geométricos” y se enfoca a los alumnos de matemáticas que cursan 2º ESO.

▪ 5.1. Análisis del currículo.

▫ 5.1.1. Legislación.

En este apartado revisamos la legislación vigente a nivel nacional y autonómico, para obtener los elementos del primer nivel de concreción curricular a partir del cual se desarrollan los dos niveles siguientes que veremos en la sección 6.

Niveles de concreción del proyecto curricular



Legislación nacional.

La ley que rige a nivel estatal y que define las bases del sistema educativo es la *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación* (en adelante: LOE), esta ley fue modificada por la *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa* (en adelante: LOMCE) y esta última por el *Real Decreto-ley 5/2016, de 9 de diciembre, de medidas urgentes para la ampliación del calendario de implantación de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa*.

Pero la ley donde se desarrolla con mayor concreción este primer nivel curricular y por tanto la ley en la que nos vamos a centrar es el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (en adelante: RD 1105/2014).

Legislación autonómica.

La ley que rige a nivel autonómico es la *Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía* (en adelante: LEA), pero esta ley es anterior a la LOE y la LOMCE, motivo por el cual una gran parte de ella no es aplicable.

La ordenación curricular en la CCAA de Andalucía viene establecida por el *Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía que se realiza de conformidad con el Real Decreto 1105/2014* (en adelante: DECRETO 111/2016), en el que se dictamina que la concreción de aquellos elementos que integran el currículo de la ESO en Andalucía se establecerá por medio de la Consejería de Educación y Deporte de la Junta de Andalucía.

Así que la ley en la que nos vamos a centrar es la *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado* (en adelante: ORDEN 14/07/2016).

▫ 5.1.2. Definiciones.

Consideramos importante rescatar las siguientes definiciones básicas:

- CURRÍCULO: manera en que se regulan los elementos que van a determinar los procesos de enseñanza-aprendizaje para cada enseñanza y etapa educativa.
- OBJETIVOS: aquellos logros que el estudiante ha tenido que alcanzar cuando finaliza cada etapa y son el resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje planificadas de manera intencionada para tal fin.
- COMPETENCIAS: capacidades que deben adquirir los estudiantes para poder aplicar los contenidos de cada enseñanza y etapa educativa de una forma integrada, cuya finalidad es conseguir realizar actividades de manera apropiada y resolver problemas complejos de una forma eficaz.
- CONTENIDOS: Son el conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que ayudan a lograr los objetivos y adquirir las competencias. Se van a ordenar en asignaturas que a su vez se clasifican en materias y ámbitos dependiendo de la etapa educativa o programa en que el alumno participe.

- CRITERIOS DE EVALUACIÓN: modelos que se toman para evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Detallan lo que se va a valorar y son lo que el alumno debe lograr en cada asignatura en cuanto a contenidos y competencias.

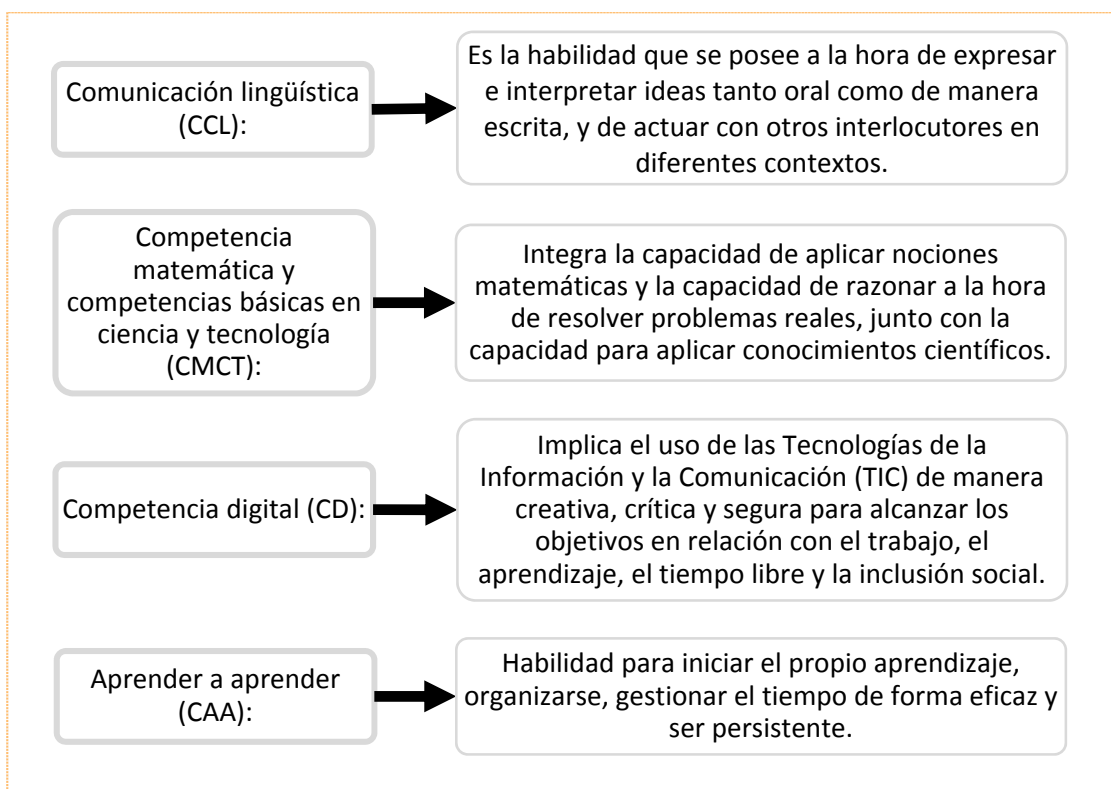
- ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES: Son descripciones de los criterios de evaluación con los que se definen los resultados de aprendizaje, sirven para concretar aquello que el estudiante debe saber, hacer y comprender en cada asignatura. Es necesario que se puedan observar, medir y evaluar para que permitan graduar el logro o rendimiento que el estudiante ha alcanzado. El diseño de estos estándares debe contribuir y facilitar en la creación de pruebas estandarizadas y comparables.

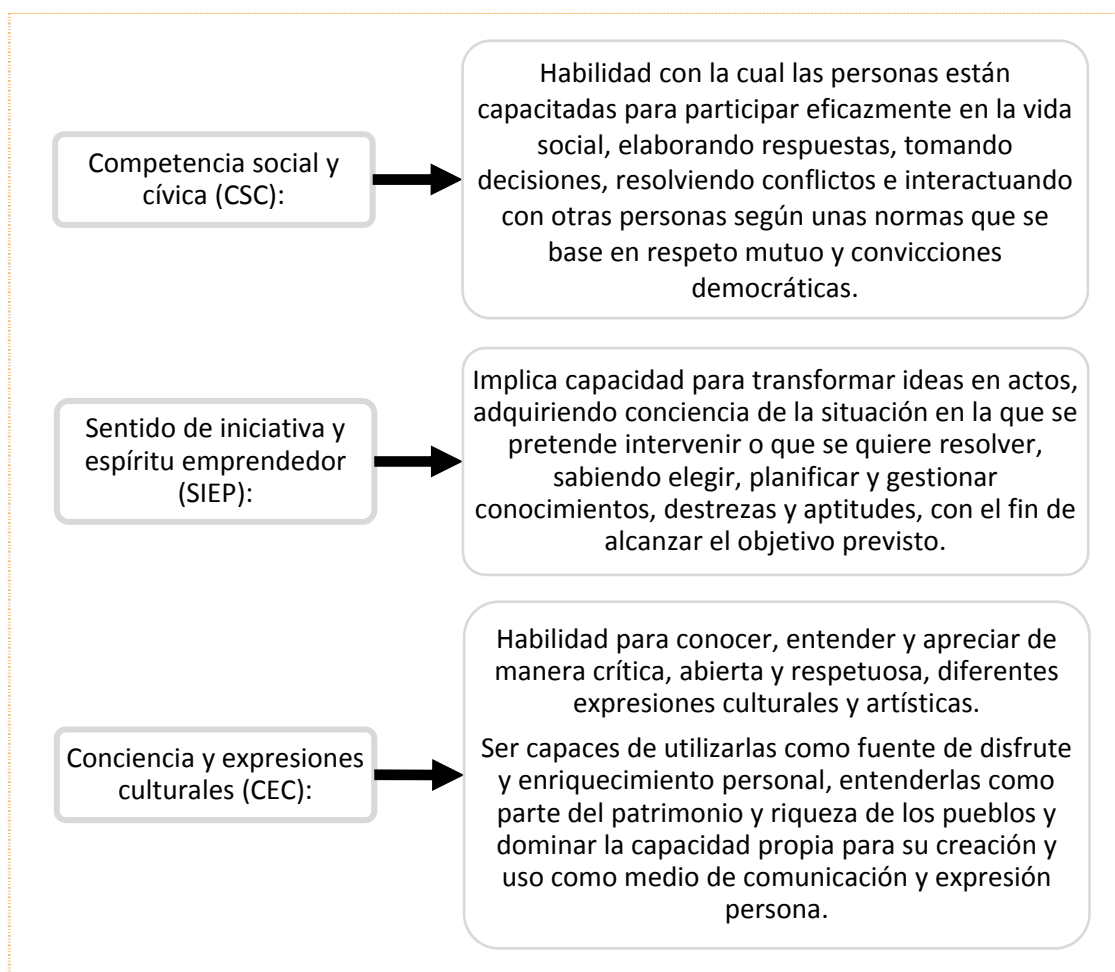
- METODOLOGÍA DIDÁCTICA: Son el conjunto de procedimientos, estrategias y acciones que el profesorado debe organizar y planificar reflexiva y conscientemente, con el fin de hacer posible el aprendizaje del alumnado y el logro de aquellos objetivos que se plantean.

▣ 5.1.3. Competencias.

Las actividades de aprendizaje se diseñarán de manera que las competencias se adquieran eficazmente y queden integradas de una forma efectiva en el currículo. Y además serán planteadas de forma que los alumnos puedan conseguir resultados de aprendizaje de varias competencias al mismo tiempo.

Las competencias del currículum se enumeran y designan como:





Por otra parte se dice que se debe potenciar el desarrollo de la competencia en comunicación lingüística y la competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología.

▫ 5.1.4. Organización de la materia de matemáticas.

Las Matemáticas se presentan como una materia general del bloque de las asignaturas troncales en todos los cursos de Bachillerato y ESO a excepción del tercer curso, en cuyo caso se oferta como materia de opción¹. Por lo tanto, las matemáticas son siempre obligatorias y la tipología es lo opcional.

Los alumnos y alumnas deben cursar **Matemáticas** en el primer y segundo curso de la ESO y deben elegir entre **Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas** y **Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas** en el tercer curso.

El cuarto curso presenta dos opciones¹ de enseñanzas, así que en caso de elegir la opción de enseñanzas académicas para la iniciación al Bachillerato deberán cursar **Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas**, y en caso de elegir la opción de enseñanzas aplicadas para la iniciación a la Formación Profesional deberán cursar **Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas**.

(1) Escoger una. A elección de los padres, madres o tutores legales o, en su caso, de los alumnos/as.

Durante la ESO, la materia se divide en 5 bloques que se estudian a lo largo de todo el curso: 1) Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2) Números y álgebra; 3) Geometría; 4) Funciones; 5) Estadística y probabilidad.

Según la modalidad de Bachillerato elegida, deberán cursar **Matemáticas I y II**, si es Bachillerato de Ciencias, o **Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II**, si es Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, Itinerario de Ciencias Sociales.

Para Bachillerato se producen solo dos cambios, el bloque de Funciones ahora es de Análisis, y el bloque de Geometría desaparece en la modalidad de C.C.S.S.

En nuestro caso nos centramos en el estudio de *Matemáticas* para 2º de la ESO.

Aunque nuestra unidad trata sobre el bloque de “Geometría”, también vamos a estudiar el bloque de “Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas” puesto que es un bloque transversal común a la etapa, que debe desarrollarse simultáneamente al resto de bloques y por tanto se considera el eje fundamental de la asignatura; este bloque versa de procesos primordiales e indispensables en la labor matemática como son la matematización y modelización, la resolución de problemas, los proyectos de investigación, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos.

▫ 5.1.5. Objetivos.

Los objetivos se estructuran en tres grados de concreción, en esta subsección analizamos los dos primeros para desarrollar el tercero en la sección 6.4.

Objetivos generales de la etapa de secundaria.

Al finalizar la secundaria los estudiantes deben haber desarrollado aquellas capacidades que les permitan alcanzar lo dispuesto en el artículo 11 del RD 1105/2014 que se amplían con el artículo 3.2 del Decreto 111/2016.

En el **Anexo II** de este TFM se detallan en un cuadro esos objetivos relacionándolos con las competencias clave.

Objetivos de la materia matemática.

Estos objetivos son específicos para cada asignatura, en este caso hablamos concretamente de la materia de Matemáticas que se imparte tanto en 1º como en 2º de ESO, y tienen como finalidad el alcance de los logros que se disponen en el Anexo I de la ORDEN 14/07/2016.

En el **Anexo III** de este TFM se redactan y enumeran mediante una tabla.

Relación entre los objetivos generales de etapa y los del área matemática.

En la **Tabla 8** se establece la relación entre los objetivos anteriores, para la nomenclatura véanse los **Anexo II y III** del TFM:

Objetivos generales de etapa (ESO)	Objetivos del área de matemáticas										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a											✓
b									✓		
c											✓
d											✓
e				✓		✓		✓			
f	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
g	✓	✓					✓	✓		✓	
h	✓										
i											
j											✓
k											
l					✓						✓
m											
n											

Tabla 8: Correspondencia entre los objetivos del área de matemáticas y los objetivos generales de la etapa de ESO (elaboración propia).

▪ 5.2. Análisis de libros de texto.

Como pertenecemos a la Comunidad Autónoma de Andalucía, lo lógico es extraer la muestra de libros de los utilizados en la materia de matemáticas en esta Comunidad en el segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria.

EDITORIAL	Almería	Cádiz	Córdoba	Granada	Huelva	Jaén	Málaga	Sevilla	
Anaya	7	6	12	23	18	8	23	28	125
SM	16	5	18	21	5	5	23	25	118
Santillana	4	2	2	1	1	1	21	12	44
Edelvives	1	3	8	2	3	3	7	15	42
Guadiel-Edebé		2	1	4	1		3	4	15
Bruño		1	1	1			3	6	12
Oxford			2	1	1	1	4	2	11
Vicens Vives			1	1			1	2	5
ECREATUS					1	1		1	3
Editex								1	1
Teide								1	1
No consignan		2	2				1	3	8
	28	21	47	54	30	19	86	100	385

Tabla 9. Número de centros andaluces que utilizan cada editorial en 2ºESO, excluyendo los centros privados (elaboración propia a partir de los datos de la web de la Junta de Andalucía).

Para obtener los resultados que se presentan en la **Tabla 9**, se analizan los datos de la página web de la Junta de Andalucía (Consulta selección de libros de texto por centro para el curso 2020/2021) donde la mayoría de los centros consignan los libros que emplean, en este análisis se utilizan los 385 centros no privados, ubicados en las capitales de provincia, que hayan consignado los libros que emplean.

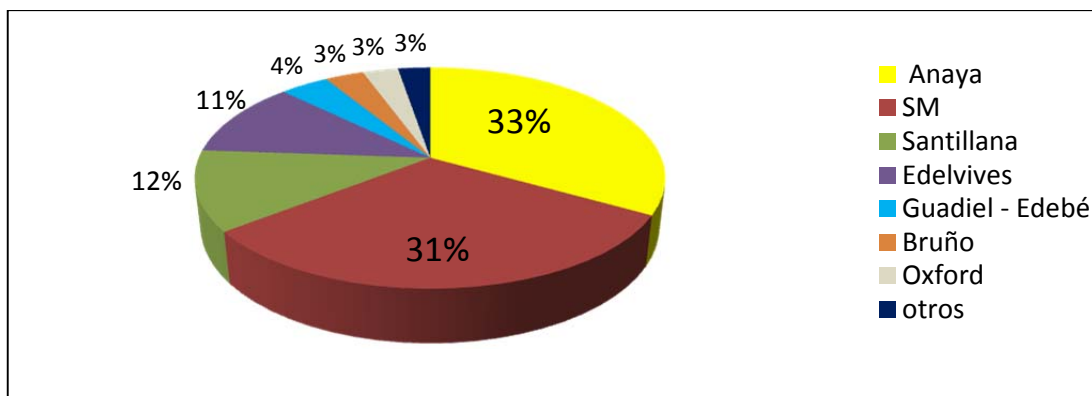


Figura 29. Diagrama circular de la **Tabla 9** (elaboración propia).

Con estos datos observamos que las editoriales más usadas son Anaya y SM, seguidos por Santillana y Edelvives (véase **Figura 29**). En consecuencia, los libros que utilizaremos en nuestro estudio corresponden a las dos editoriales que encabezan la clasificación y son “Matemáticas 2º ESO Proyecto Aprender es Crecer” para ANAYA y “Matemáticas 2º ESO Proyecto Savia Andalucía” para SM.

▣ 5.2.1. SM.

En el área de Matemáticas la editorial SM ofrece cuatro libros con diferentes niveles de profundización en los contenidos (Pitágoras, Ábaco, Múltiplo y Esfera). Aunque todos trabajan sobre el currículum oficial, encontramos diferentes grados de complejidad que permiten al profesor elegir el libro en función del tipo de alumnado que tenga. Deducimos la intencionalidad por parte de la editorial de atender a la diversidad con la que nos encontramos en las aulas.

Pero en la **Tabla 9** el libro consignado por todos los centros es el de “Matemáticas 2º ESO Proyecto Savia Andalucía”. Se trata de un proyecto global elaborado para el aula y desde la misma.

Cada libro se acerca a los contenidos de manera diferente, pero la metodología usada en cada unidad es similar en todos ellos:

- Introducción donde se presenta la unidad:
 - Un texto y algunas imágenes relacionadas con los contenidos de la unidad que pretenden motivar al alumnado mostrando curiosidades que les resultan cercanas.
 - Una serie de actividades relacionadas con el texto donde el alumno puede aplicar sus conocimientos, investigar sobre el tema o dar su opinión personal.
- Contenidos organizados en diferentes puntos, en cada uno de los cuales:
 - Los contenidos se exponen de forma estructurada, clara y sencilla.
 - Las ideas fundamentales aparecen destacadas mediante un encuadre.

- Se plantean actividades resueltas y de aplicación directa de contenidos aprendidos, con tres niveles de dificultad (básico, medio y alto). En ellas, se tratan temas transversales como la educación ambiental, la igualdad, la educación para la salud, o la creatividad.
- En el margen de las páginas se presentan apuntes encabezados con la frase:
 - “Ten en cuenta...” en los que se recuerdan contenidos de cursos o unidades anteriores.
 - “Sabías que...” los cuales presentan curiosidades relacionadas con el contenido que se está trabajando.
 - “En la red...” en los que se anima a enriquecer y ampliar los contenidos mediante vínculos a páginas web
- Resumen final con los principales conceptos de la unidad y las ideas más importantes de manera organizada.
- Una serie de actividades finales (ejercicios, problemas y ampliación), que recogen todo lo aprendido en la unidad y se clasifican en los tres niveles de dificultad.
- Un apartado de autoevaluación.
- Un par de páginas finales para trabajar las competencias básicas, mediante actividades que reflejan situaciones en sintonía con la vida cotidiana y que están relacionadas con los intereses de los alumnos.

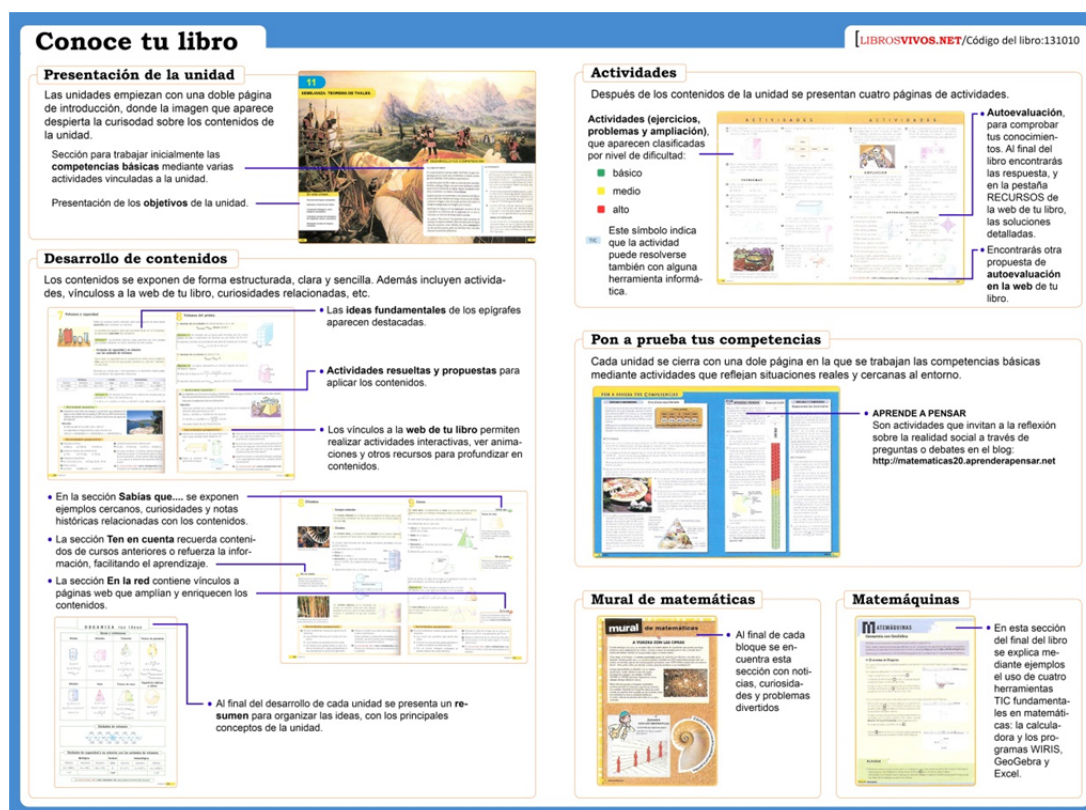


Ilustración 3. Esquema estructural del proyecto Pitágoras para 2º ESO. (Matemáticas, Ed. SM).

Ficha técnica del libro de texto utilizado.

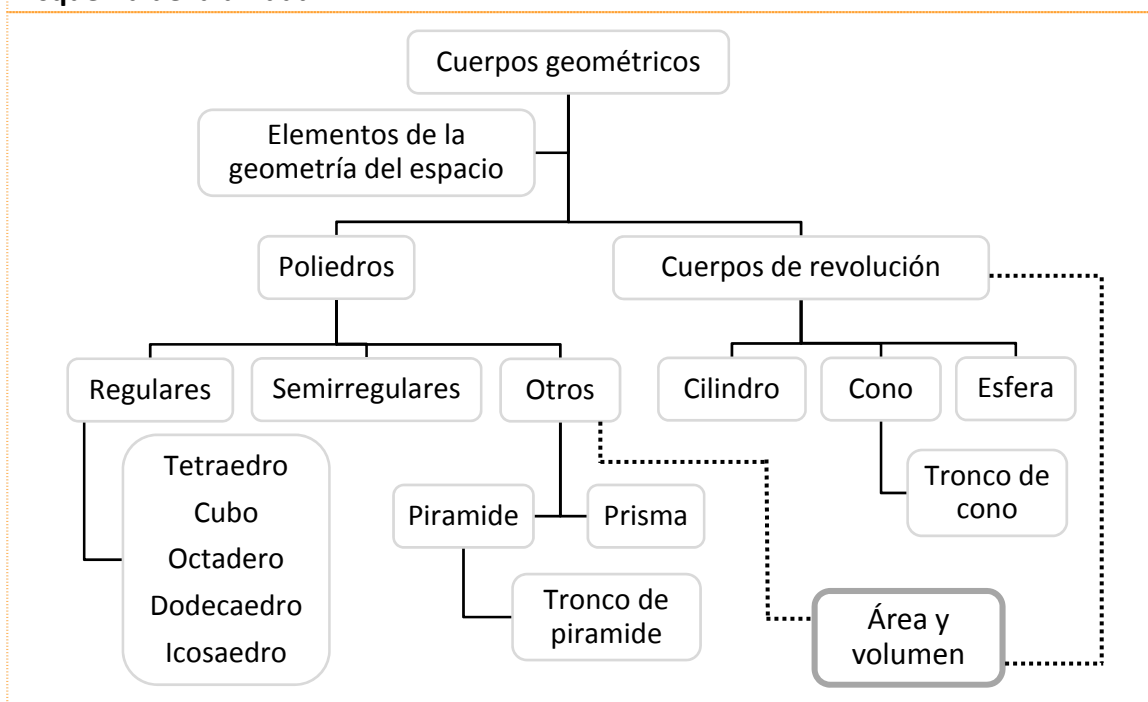


Título:	Matemáticas. 2 ESO. Savia.		
Curso:	2º Educación Secundaria Obligatoria.		
Autores:	Alcaide, Fernando / Nieto, Miguel / Pérez, Antonio / Divermates		
Editorial:	Ediciones SM.	Año:	2016.
ISBN:	978-84-675-8678-7	Nº páginas:	287.

Ilustración 4. Ficha técnica del libro de texto de la editorial SM (elaboración propia).

Unidad 11: Cuerpos geométricos.

Esquema de la unidad



▫ 5.2.2. Anaya.

En el área de Matemáticas la editorial ANAYA ofrece los libros en formato trimestral, dividiendo las 15 unidades en tres partes iguales.

En la realización de la **Tabla 9** había dos libros consignados por los centros, “Matemáticas 2º ESO Proyecto Aprender es Crecer” y la versión en inglés para centros bilingües “Mathematics 2º ESO Proyecto Learning is growing”.

El objetivo perseguido con el libro de texto Mathematics es que los alumnos adquieran el nivel de la asignatura a la vez que aprendan los contenidos y destrezas básicas en ambos idiomas.

A continuación se describe la metodología usada en todas las unidades:

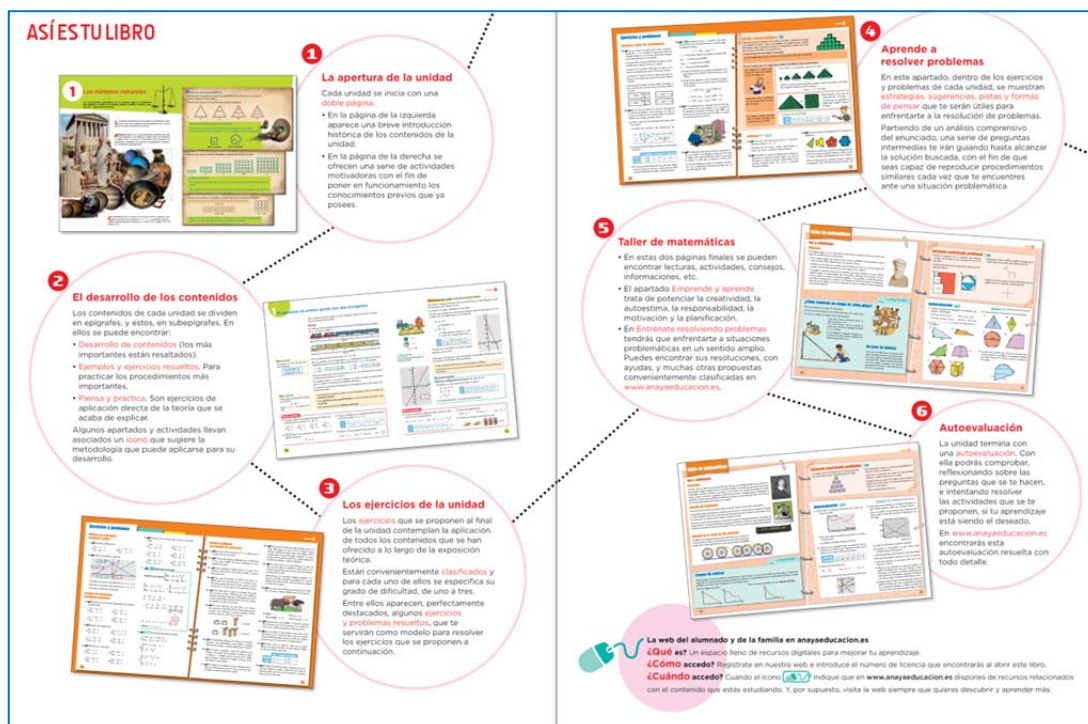


Ilustración 5. Esquema del proyecto Aprender es crecer para 2º ESO. (Matemáticas, Ed. ANAYA).

- Cada unidad se inicia con doble paginación, en la que aparece una breve introducción histórica de los contenidos de la unidad (pág. Izquierda) y se ofrece una serie de actividades motivadoras con el fin de poner en funcionamiento los conocimientos previos (pág. Derecha).

- Los contenidos de cada unidad se dividen en epígrafes y subepígrafes, son desarrollados de manera clara y estructurada y se destacan los más importantes.

- En cada epígrafe hay ejemplos y ejercicios resueltos de los procedimientos más significativos y ejercicios de aplicación directa de la teoría que se acaba de explicar.

- En algunos apartados y actividades se asocia un icono que sugiere la metodología a aplicar para su desarrollo.

- Los ejercicios y problemas que se proponen al final de la unidad:

Se encuentran convenientemente clasificados según los epígrafes.

Contemplan la aplicación de todos los contenidos que se han ofrecido a lo largo de la exposición teórica.

Vienen con el grado de dificultad especificado desde uno hasta tres (1=baja, 2=media, 3=alta).

Entre ellos se destacan algunos resueltos que sirven como modelo para resolver los planteados a continuación de los mismos.

- Se propone un apartado que muestra estrategias, sugerencias, pistas y formas de pensar útiles para enfrentarse a la resolución de problemas.

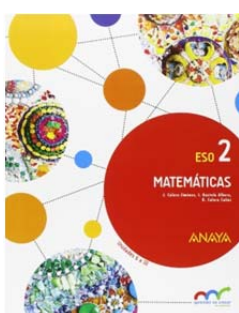
- En las dos páginas finales podemos encontrar un taller de matemáticas con tres apartados:

Lee y reflexiona: Con lecturas, actividades, consejos, información, etc.. Donde se trata de potenciar la creatividad, la autoestima, la responsabilidad, la motivación y la planificación.

Entrénate resolviendo problemas: En este apartado el alumno tendrá que enfrentarse a situaciones problemáticas en un sentido amplio.

Autoevaluación: Para que el alumnado pueda comprobar si su aprendizaje está siendo el deseado.

Ficha técnica del libro de texto utilizado.

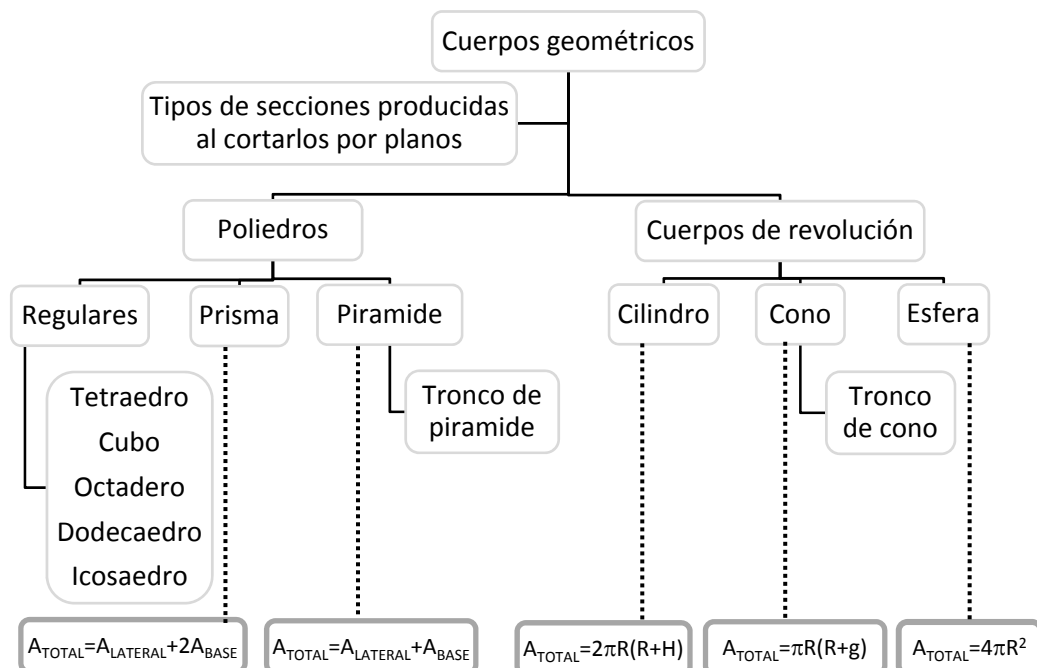


Título:	Matemáticas 2.		
Curso:	2º Educación Secundaria Obligatoria.		
Autores:	Cólera Cañas, Ramón / Cólera Jiménez, José / Gaztelu Alberio, Ignacio		
Editorial:	Anaya Educación.	Año:	2017.
ISBN:	978-84-698-1794-0	Nº páginas:	295.

Ilustración 6. Ficha técnica del libro de texto de la editorial Anaya (elaboración propia).

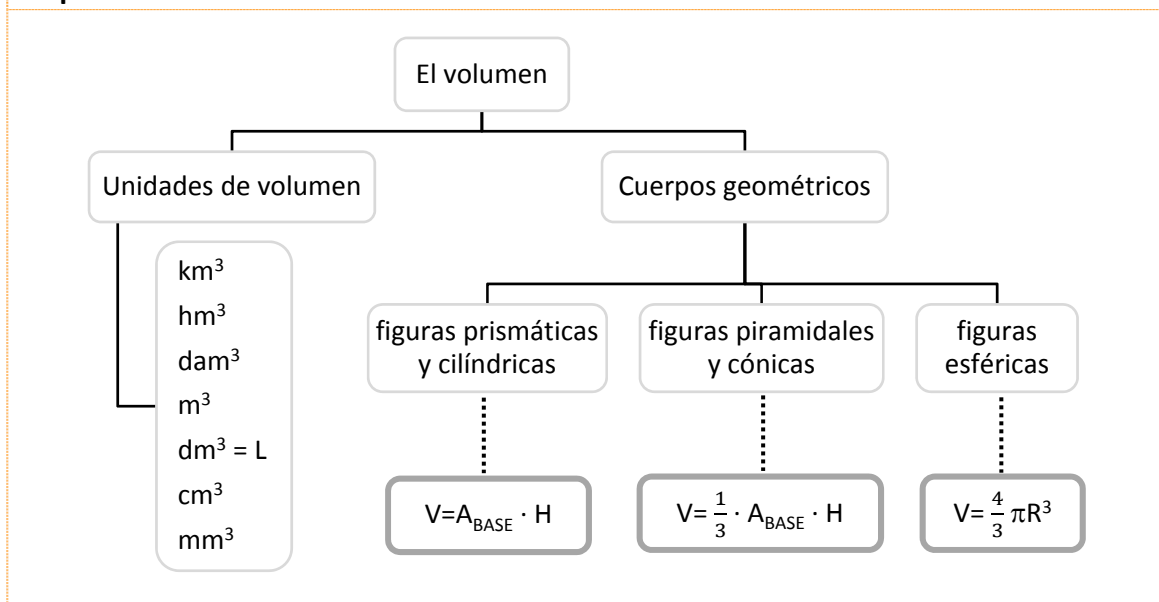
Unidad 11: Cuerpos geométricos.

Esquema de la unidad



Unidad 12: El volumen.

Esquema de la unidad



5.2.3. Conclusión.

En ambos libros la presentación de la unidad pretende captar el interés del alumno, las actividades sirven para promover la construcción del propio conocimiento y, al ser comentadas en clase, pueden abrir debate de manera que se fomenta su capacidad de comunicación, la expresión de sus propias ideas y la conexión con sus emociones.

Las actividades y los problemas son en su mayoría de reproducción, en algunas se tratan temas transversales sensibilizando a los alumnos con determinados problemas como los ambientales, la pobreza o el cuidado de la salud. En general son muy prácticas y utilizan cosas relacionadas con los intereses de los alumnos (deportes, películas, juegos...). En ocasiones plantean algún juego que puede ser atractivo.

No encontramos actividades para realizar en grupo, las cuales permitirían a los alumnos ver distintas maneras de resolver un problema, argumentar sus puntos de vista y ponerse de acuerdo en cuál van a utilizar, aquellos que razonan de manera más rápida podrían ayudar a los que les cuesta más entender el planteamiento del problema. Este tipo de actividades dota a los alumnos de distintas herramientas de trabajo en equipo y los convierte en el centro de su propio aprendizaje. Según reflejan las pruebas CDI o los informes PISA los alumnos españoles fallan en el razonamiento, los profesores enseñan una serie de procedimientos que los alumnos aprenden y mecanizan, pero el razonamiento tienen que construirlo de forma autónoma.

Los resúmenes dados al final del tema pretenden facilitar el trabajo a los alumnos pero eliminan su autonomía, que es uno de los objetivos a conseguir en secundaria: deberían ser ellos quienes aprendan a sacar las ideas importantes y plasmarlas.

6. Proyección didáctica (UD).

En este apartado del TFM nos centramos en proyectar una UD. Para su elaboración se realizará una justificación, se contextualizará en el centro donde se plantea su desarrollo, se elaborarán los objetivos, competencias clave, contenidos y metodologías, se va a estructurar con unas determinadas actividades, tareas, recursos y materiales a través de una temporalización incluyendo medidas generales de atención a la diversidad y concluirá con una evaluación.

▪ 6.1. Título.

UD. CUERPOS GEOMÉTRICOS.

Se desarrolla teniendo en cuenta el análisis realizado en la fundamentación epistemológica, curricular y didáctica.

▪ 6.2. Justificación.

La UD que vamos a desarrollar pertenece al bloque de “Geometría” de la materia de Matemáticas y se imparte en el curso de 2º de E.S.O.

El alumnado de los dos primeros cursos del primer ciclo de la ESO debe cursar la asignatura de matemáticas por ser una materia general del bloque de las troncales, según el artículo 13 del RD 1105/2014.

El estudio de los cuerpos geométricos, que forma parte del currículum del curso anterior y de los posteriores, se encuentra dentro de los contenidos que se deben estudiar en la materia de matemáticas para el segundo curso de la ESO, establecidos en el Anexo I tanto del RD 1105/2014 como de la ORDEN 14/07/2016, leyes vistas en la fundamentación curricular (sección 5.1 del TFM).

Esos contenidos se desarrollan a partir de las ideas germinales obtenidas de la fundamentación epistemológica vista en el título 4 del presente TFM. A la hora de explicar la teoría en la presente UD utilizaremos esas ideas mientras seguimos el libro de SM analizado en la sección 5.2 de la fundamentación curricular.

En el apartado de fundamentación didáctica (título 3 del TFM) se ha visto que la geometría es un pilar fundamental en la formación académica y cultural de las personas debido a su aplicabilidad en diversos contextos, los contenidos desarrollados en esta rama de las matemáticas se consideran útiles para comprender, describir e interactuar con el espacio en que vivimos, por esa razón decimos que es la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y unida a la realidad.

La geometría, y en particular la geometría del espacio, contribuye en el desarrollo de habilidades tan importantes como son la creatividad, la visualización espacial, la intuición, el pensamiento crítico, la conjeturización, el razonamiento deductivo y la argumentación lógica. Y todo esto influye en los procesos de creación, modelización y

resolución de problemas que surgen tanto en contextos académicos como en situaciones reales.

Basándonos en la fundamentación didáctica, las sesiones que se plantean en nuestra UD pretenden fomentar un aprendizaje significativo a través del diseño de tareas con las que mejorar las habilidades de visualización, reflexión, pensamiento crítico, razonamiento, y en las que el alumno debe describir, explicar y justificar las técnicas y procedimientos empleados para su resolución.

Pero sobre todo se pretende conseguir que el alumno adquiera los conocimientos de manera significativa y pueda transformarlos en propios a través de la manipulación del material proporcionado. Además, se han creado sesiones con carácter cooperativo, para que puedan experimentar, formular hipótesis a través del ensayo-error y discutir resultados, ampliando y enriqueciendo su proceso de aprendizaje.

Enfatizamos la necesidad de la visualización espacial para aquellos alumnos que quieran estudiar Ciencias y Tecnología, especialmente arquitectura, ingeniería o diseño. Asimilar los contenidos de esta UD facilitará la comprensión y posterior relación de los contenidos en las materias de tecnología, física y dibujo técnico. Saber tratar la información, desarrollar hipótesis, predicciones y comprobar los resultados les ayudará a enfrentarse a los problemas reales del entorno y resolverlos de manera satisfactoria.

▪ 6.3. Contextualización del centro y del aula.

La UD elaborada en el presente TFM se contextualiza en el Instituto de Educación Secundaria Cástulo, centro en el cual he llevado a cabo mi periodo de prácticas docentes del Máster.



Ilustración 7. Fachada IES Cástulo (<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/23005141/moodle2/>)

La información plasmada en este apartado ha sido extraída de la página web oficial del centro, de la página web de la consejería de educación de la junta de Andalucía, y de los datos recabados durante la realización del prácticum.

▫ 6.3.1. Situación geográfica del centro.

El I.E.S. Cástulo se ubica en la Avenida de San Cristóbal s/n, en la zona suroeste del municipio de Linares (Jaén), contiguo al hospital universitario de San Agustín y cerca del campus científico tecnológico.

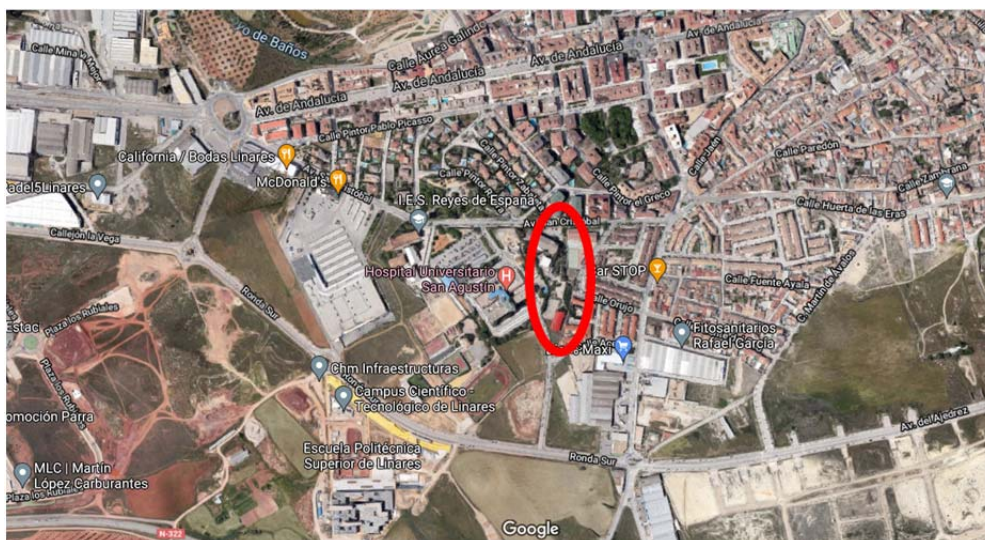


Ilustración 8. Ubicación IES Cástulo (elaboración propia a partir de Google Maps).

Linares es un municipio de la provincia de Jaén que cuenta con unos 60.000 habitantes, la mayor población después de la capital de la provincia. Famosa por acoger en su término a la factoría de vehículos “Santana Motor”. En la actualidad cuenta con el Campus Científico Tecnológico y el proyecto del Puerto Seco. Es una ciudad con bastante restauración, comercio y en donde la agricultura, en particular el cultivo de olivar, también es importante.

▫ 6.3.2. Descripción del centro.

El centro se encuentra en uno de los mejores barrios de la ciudad.

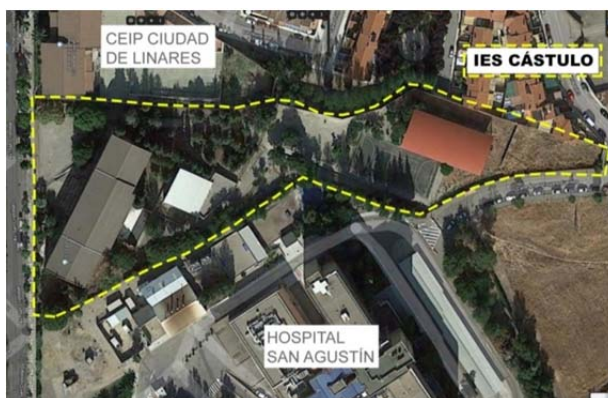


Ilustración 9. IES Cástulo (elaboración propia a partir de Google Maps).

En este instituto se imparte educación secundaria obligatoria, dos modalidades de bachillerato, la de ciencias y la de humanidades y ciencias sociales, un ciclo formativo de grado medio en comercio y un ciclo formativo de grado superior en gestión comercial y marketing. El centro cuenta con un total de 22 unidades, 535 alumnos, 44 profesores y 7 integrantes del personal de administración y servicios.

En cuanto a las características socioeconómicas de las familias de los alumnos del centro, predominan las familias obreras, con un alto porcentaje de profesiones cualificadas por medio de formación profesional reglada e incluso algunas familias con estudios superiores. Por lo tanto, podemos decir que los alumnos que estudian en este centro, en general provienen de familias con nivel socioeconómico medio y alto.

En casi todos los casos el ambiente familiar es estable, positivo y propicio para el estudio. Por otro lado, la relación de las familias con el centro también es buena.

▣ 6.3.3. Descripción del aula.

Generalmente este centro dispone de 3 líneas para el segundo curso de secundaria, pero este año han añadido una línea para satisfacer el protocolo COVID.

La presente UD va dirigida concretamente al curso de segundo de la ESO, grupo “B”.

Espacios y material.

Las dimensiones del aula son de 6.5x7 m². Consta de 24 pupitres que, aun estando puestos por parejas, este año presentan una forma nueva de colocación. 12 alumnos están ubicados de manera que ven la pizarra de frente, los otros 8 la ven de lado y los 4 pupitres cerca de las perchas están vacíos (véase [Figura 30](#)). Justo al entrar hay una mesa con un dispensador de gel hidroalcohólico para las manos y un pulverizador hidroalcohólico para superficies con un rollo de papel. Además tanto las ventanas como la puerta se encuentran abiertas de manera constante.

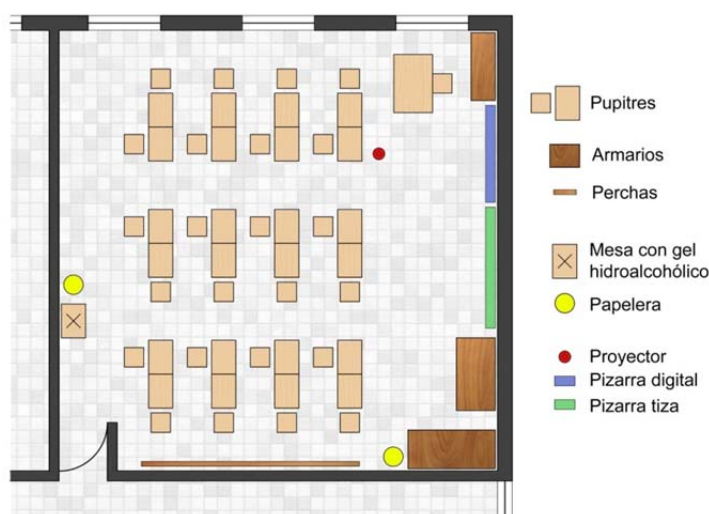


Figura 30. Planta del aula (elaboración propia).

Entre los recursos de los que dispone el aula contamos con una pizarra digital (ordenador y proyector), una pizarra de tiza e internet vía WIFI para todos los alumnos.

Por otro lado, además de esta aula que es la propia de este curso-grupo, también se puede hacer uso del aula de tecnología, de las instalaciones deportivas y del patio.

Características del alumnado.

En esta clase hay un total de 20 estudiantes (12 alumnas y 8 alumnos).

Aunque dentro de la clase existe cierta pluralidad, con carácter general, tanto física como psicológicamente, estos alumnos responden a un modelo estándar de su edad y ningún alumno ha sido diagnosticado con necesidades especiales. Así que todos deberían tener la capacidad de seguir el ritmo de la clase, aunque siempre habrá algunos con más ganas de aprender que otros.

▪ 6.4. Objetivos.

Los objetivos deben ser observables, evaluables y medibles, por lo que se formularán de manera que tengan un resultado alcanzable y deben definirse de forma clara e inconfundible, no pueden dar vía a interpretaciones y tenemos que poder comprobar el grado en que han sido alcanzados.

A continuación se indican los objetivos concretos previstos para la UD de Cuerpos Geométricos:

- Reconocer cuerpos geométricos en el mundo real.
- Identificar los componentes de un cuerpo geométrico.
- Diferenciar entre poliedro y cuerpo redondo.
- Definir Poliedro.
- Utilizar el teorema de Euler.
- Diferenciar entre poliedro cóncavo y convexo.
- Diferenciar entre poliedro recto y oblicuo.
- Diferenciar entre poliedro regular y semirregular.
- Ejecutar el desarrollo plano de poliedros.
- Identificar prismas.
- Identificar pirámides.
- Identificar cilindros.
- Identificar conos.
- Identificar esferas.

- Calcular el área de prismas.
- Calcular el área de pirámides.
- Calcular el área de cilindros.
- Calcular el área de conos.
- Calcular el área de esferas.
- Calcular el volumen de prismas.
- Calcular el volumen de pirámides.
- Calcular el volumen de cilindros.
- Calcular el volumen de conos.
- Calcular el volumen de esferas.

▪ 6.5. Competencias clave.

En la [tabla 10](#) podemos identificar las competencias clave (previamente definidas en la subsección 5.1.3. del TFM) que nuestra UD va a contribuir a desarrollar a través de unos indicadores que proponemos y relacionamos con los estándares establecidos en la ORDEN 14/07/2016 (véase [Anexo IV](#)).

DESCRIPTORES O INDICADORES	COMPETENCIAS CLAVE ASOCIADAS	ESTÁNDARES "ORDEN 14/07/2016"
Define poliedro utilizando un lenguaje geométrico adecuado.	CMCT, CCL	3.5.1
Analiza e identifica los elementos característicos de diferentes cuerpos geométricos.	CMCT, CAA	3.5.1
Explica la diferencia entre poliedro y no poliedro (cuerpo redondo) utilizando un lenguaje geométrico adecuado.	CMCT, CCL, CAA.	3.5.1
Diferencia entre los distintos tipos de poliedro y los clasifica según sean cóncavos o convexos, oblicuos o rectos y regulares o semirregulares.	CMCT, CAA	3.5.1
Utiliza el teorema de Euler en los sólidos platónicos.	CMCT, CAA	3.5.1
Reconoce y construye los cuerpos geométricos principales a partir de sus desarrollos planos y viceversa.	CMCT, CAA	3.5.3

Identifica los cuerpos geométricos principales.	<i>CMCT, CAA</i>	3.5.3
Calcula el área y volumen de prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.	<i>CMCT, CAA</i>	3.6.1
Resuelve problemas contextualizados en la realidad haciendo uso del cálculo de áreas y volúmenes.	<i>CCL, CMCT, CAA, SIEP, CEC</i>	3.6.1
Expresa razonadamente el proceso seguido para resolver un problema en formato verbal o escrito y con un rigor y precisión adecuados.	<i>CCL, CMCT</i>	1.1.1
Comprende el enunciado de los problemas y los analiza buscando datos, las relaciones entre ellos y su contexto.	<i>CCL, CMCT, CAA</i>	1.2.1
Utiliza diferentes estrategias y usa el razonamiento a la hora de resolver correctamente los problemas, reflexionando sobre los resultados obtenidos.	<i>CMCT, CAA</i>	1.2.4
Identifica situaciones en contextos de la realidad cotidiana que podrían contener problemas geométricos de interés.	<i>CMCT, CAA</i>	1.6.1
Conecta los problemas del mundo real con los del mundo matemático, identificando tanto los problemas matemáticos que subyacen en el mundo real como aquellos conocimientos matemáticos que va a necesitar.	<i>CMCT, SIEP</i>	1.6.2
Interpreta la solución matemática obtenida de un problema en el contexto de su realidad.	<i>CMCT, CAA, SIEP</i>	1.6.4
Desarrolla y cultiva las actitudes personales adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, flexibilidad, perseverancia y aceptación de la crítica razonada.	<i>CMCT, CAA,</i>	1.8.1
Resuelve retos y problemas planteándolos con un interés, esmero y precisión adecuados a la dificultad de la situación y a su nivel educativo.	<i>CMCT, CAA</i>	1.8.2
Emplea de manera autónoma los recursos tecnológicos para crear representaciones gráficas de	<i>CD, CMCT, SIEP</i>	1.11.4

objetos geométricos con el objetivo de observar, examinar y comprender sus propiedades.		
Utiliza habitualmente las TICs de un modo adecuado para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje buscando, analizando y seleccionando en internet u otras fuentes aquella información útil para el desarrollo de las actividades.	<i>CD, CAA, CMCT, SIEP</i>	1.12.3

Tabla 10: Relación entre estándares de aprendizaje y competencias clave (elaboración propia)

■ 6.6. Contenidos.

Redactamos los contenidos que se deben trabajar en la presente UD para la materia de matemáticas perteneciente a 2ºESO relativos al Bloque 3 “Geometría “ y al Bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” tomando como referente lo establecido en la ORDEN 14/07/2016:

- Poliedros y cuerpos de revolución.
- Elementos característicos de los poliedros.
- Clasificación de poliedros.
- Cálculo del área y del volumen en los poliedros.
- Propiedades, relaciones y regularidades de los poliedros.
- Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes del mundo real.
- Manejo de herramientas informáticas para el estudio de formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Planificación del proceso a la hora de resolver problemas.
- Práctica de los procesos de matematización y modelización para transformar un problema del mundo real a un contexto matemático.
- Estrategias y procedimientos puestos en práctica para la resolución de problemas:
 - uso de un lenguaje apropiado.
 - reformulación del problema.
 - resolución de subproblemas.
 - recuento exhaustivo.
 - comienzo con casos particulares sencillos.
 - búsqueda de regularidades y leyes.
- Reflexión sobre los resultados obtenidos tras resolver problemas:

- revisión de las operaciones utilizadas.
- asignación de unidades a los resultados.
- comprobación e interpretación de las soluciones en su contexto.
- búsqueda de otras formas de resolución.
- Confianza en las capacidades propias para el desarrollo de actitudes adecuadas y afrontar las dificultades inherentes al trabajo científico.
- Uso de medios tecnológicos durante el aprendizaje para facilitar la comprensión de propiedades geométricas y la realización de cálculos.

▪ 6.7. Metodología.

Si se quiere instruir en competencias clave, se necesitan distintas estrategias metodológicas, de manera que los alumnos además de conocer sean capaces de aplicar lo sabido en diferentes contextos.

Según Abril *et al.* (2014:24), la Unión Europea considera que la mejor metodología para enseñar en el área de las matemáticas es el aprendizaje por investigación (IBL) debido la exposición de los alumnos a situaciones de investigación abiertas y enriquecedoras en las que necesitaran hacer uso de conocimientos previos concediéndoles más autonomía que en otras metodologías. Por lo tanto ya que tienen un carácter beneficioso y pueden hacer el aprendizaje más divertido por la utilización de recursos manipulativos y lo entretenido de la experimentación, en esta UD se proponen varias actividades tipo IBL con las que también esperamos mejore la motivación del alumnado.

A continuación se describe la metodología empleada para el desarrollo de esta UD con el propósito de que el alumnado aprenda y logre los objetivos planteados:

- **Estrategia de exposición:** el profesor explica en la pizarra cada concepto, su utilización y relación con otros conceptos.
- **Estrategia de innovación:** el profesor utilizará otros medios y recursos aparte de la pizarra y el libro para conseguir que los alumnos construyan su propio aprendizaje. El examen se realizará por medio de una yincana.
- **Estrategia realista:** el profesor irá presentando los contenidos de manera ordenada y estructurada, y los alumnos los van aprendiendo de manera gradual.
- **Estrategia de metodología activa:** el profesor preguntará si hay dudas para conseguir la integración de los alumnos en la dinámica general del aula y en la adquisición de los aprendizajes. El alumno participa en su propio proceso de aprendizaje de manera que pueda llegar a ser autónomo.

- **Estrategia de asignación de actividades:** el profesor plantea una serie de actividades para que los alumnos resuelvan, aplicando lo aprendido.
- **Estrategia de interacción:** el profesor asigna actividades en parejas de manera que los alumnos se sientan parte de un equipo y desarrollen su capacidad para tener en cuenta los puntos de vista de sus compañeros.
- **Estrategia de experimentación:** el profesor reparte una prueba a cada alumno de manera que deban desarrollarla individualmente.
- **Estrategia de motivación:** el profesor informará de que la entrega de actividades resueltas de forma correcta puntúa para el examen, de manera que los esfuerzos realizados diariamente por los alumnos serán valorados.

En todas estas metodológicas las actividades que se van a realizar son el componente clave a la hora desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje desde un punto de vista innovador y atractivo para el alumno. Son en las actividades IBL en donde verdaderamente podemos comprobar lo que se persigue con este TFM: que los alumnos aprendan de manera significativa para que este aprendizaje no carezca de sentido.

▪ 6.8. Actividades y recursos.

▫ 6.8.1. Recursos.

Los recursos utilizados son variados:

1. Recursos humanos/personales:

- Profesor/a de matemáticas: coordina el trabajo en clase y desarrolla las sesiones.
- Alumnos: los protagonistas de la sesión.

2. Recursos ambientales:

- Aula.

3. Recursos tecnológicos e informáticos:

- Teléfonos móviles tipo Smartphone.
- Calculadora.
- APP “Geometría RA”.
- Ordenador con conexión a internet.

4. Recursos impresos:

- Cuaderno del alumno/a.
- Libros de texto.
- Fichas recortables.
- Ficha con imágenes QR para la APP.

5. Recursos específicos:

- Pizarra de rotulador.
- Proyector con ordenador.
- Caja de sólidos especiales para llenar de agua.
- Caja de piezas para construir poliedros.
- Caja de figuras 3D con plantillas desplegadas de silicona.

6. Recursos utilizados para la yincana:

Localizaciones:

- Pista de baloncesto.
- Salón de actos.
- Pista de fútbol.
- Aula de tecnología.
- Patio y jardín.

Otros:

- Guantes.
- Gel Hidro-alcohólico
- Flexómetros
- Cintas métricas.
- Pelotas.
- Caja de cuerpos geométricos.

▣ **6.8.2. Ejemplos, actividades y tareas.**

Los ejercicios que se plantean a lo largo de las sesiones que conforman esta UD vienen ordenados y estructurados en el apartado de temporalización (subsección 6.10 del TFM) y serán desarrollados en los Anexos.

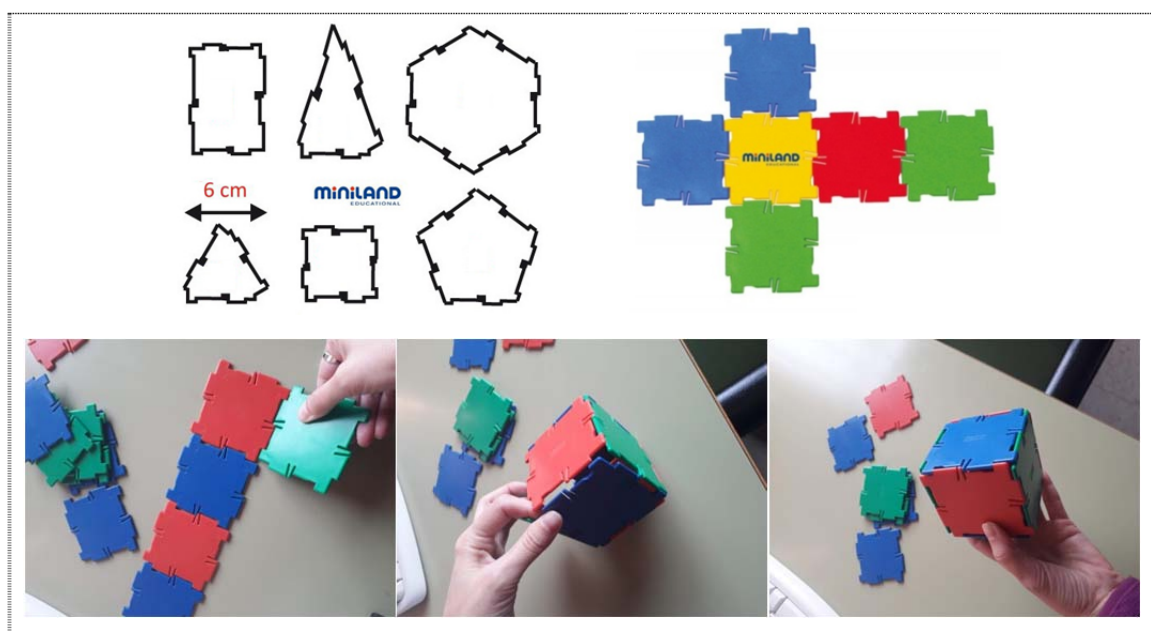
Considerando algunas de las conclusiones de la fundamentación didáctica, se realiza una prueba inicial para tener en cuenta el nivel real de los alumnos y poder así desarrollar la UD partiendo de la base existente, de manera que no se va a dar por sentado ningún conocimiento previo.

A lo largo de las sesiones los alumnos tendrán que contestar dos pruebas individuales que formarán parte de la evaluación continua y estarán elaboradas con ejercicios parecidos a los propuestos para clase-casa de sesiones anteriores. El fin de estas pruebas es por un lado conseguir que vayan estudiando y asimilando los conceptos poco a poco cada día y por otro tener varias notas con las que lograr una evaluación que no esté supeditada a la mera calificación de un examen.

En las IBL descritas a continuación se crearán grupos con los que se busca la colaboración y cooperación entre sus miembros que tendrán que participar con una actitud abierta, respetuosa y de forma activa en la yincana para llegar a una solución válida entre todos. Se harán grupos pequeños en los que cada alumno tenga un rol de manera que se sientan valorados y el profesor irá pasando por cada grupo para controlar el orden y resolver posibles dudas.

Para las actividades que sea necesario el uso del teléfono móvil, el profesor enviará con antelación una nota a los padres pidiendo que aquellos niños que puedan se traigan un Smartphone con el que poder conectares al WIFI del instituto y realizar esta innovadora actividad, como estas actividades se llevan a cabo en grupo tan solo será necesario que un miembro de cada grupo lo traiga a clase.

Las propuestas de construcción con piezas Miniland son actividades IBL en las que usaremos el material de esta firma que posee el departamento de matemáticas y que son unas piezas con diferentes formas (rectángulo, triángulo equilátero e isósceles, hexágono, cuadrado y pentágono) que encajan como si de un puzle se tratase pudiendo formar distintos cuerpos geométricos, pensadas especialmente para construir prismas, pirámides y poliedros regulares (véase [Figura 31](#)). Con esta IBL se pretende una primera aproximación a los cuerpos geométricos que vamos a estudiar, con posterioridad los alumnos construirán prismas, pirámides y sólidos platónicos a partir de su desarrollo plano mediante recortables, así que podrán interrelacionar lo trabajado.



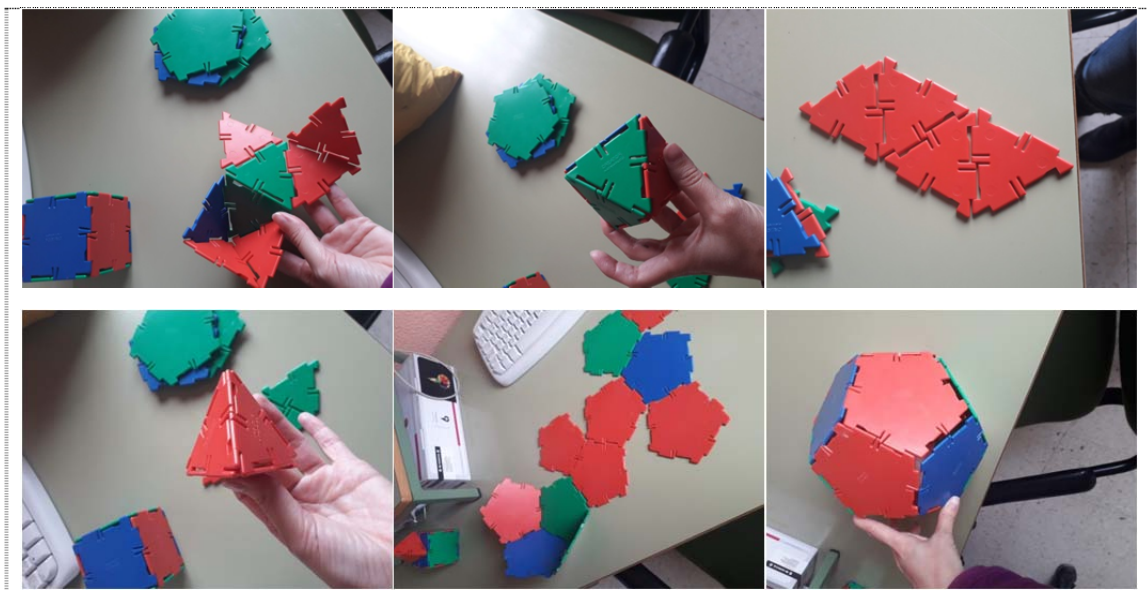


Figura 31. Piezas Miniland del departamento (elaboración propia).

La propuesta de desarrollo plano mediante figuras 3D con plantillas desplegables de silicona es una actividad IBL para la que vamos a necesitar una caja de este material que posee el departamento de matemáticas y que contiene distintos cuerpos geométricos (prismas con diferentes bases, pirámides con diferentes bases, un cilindro y un cono) que vienen forrados interiormente por una plantilla de silicona, la cual se puede extraer del sólido y se puede desplegar para poder ver su desarrollo plano y viceversa (véase [Figura 32](#)). Con anterioridad los alumnos habrán construido prismas y pirámides a partir de su desarrollo plano mediante recortables, así que podrán conectar conceptos.



Figura 32. Cuerpos geométricos con plantillas desplegables de silicona (elaboración propia).

La actividad propuesta para relacionar volúmenes es una actividad IBL para la que vamos necesitar una caja que posee el departamento de matemáticas con unos cuerpos geométricos (prismas, pirámides, cilindro, cono y esfera) que son contenedores de plástico diseñados para abrirse y llenarse de agua (véase [Figura 33](#)), la explicación detallada de esta actividad viene en el [Anexo XVII](#).

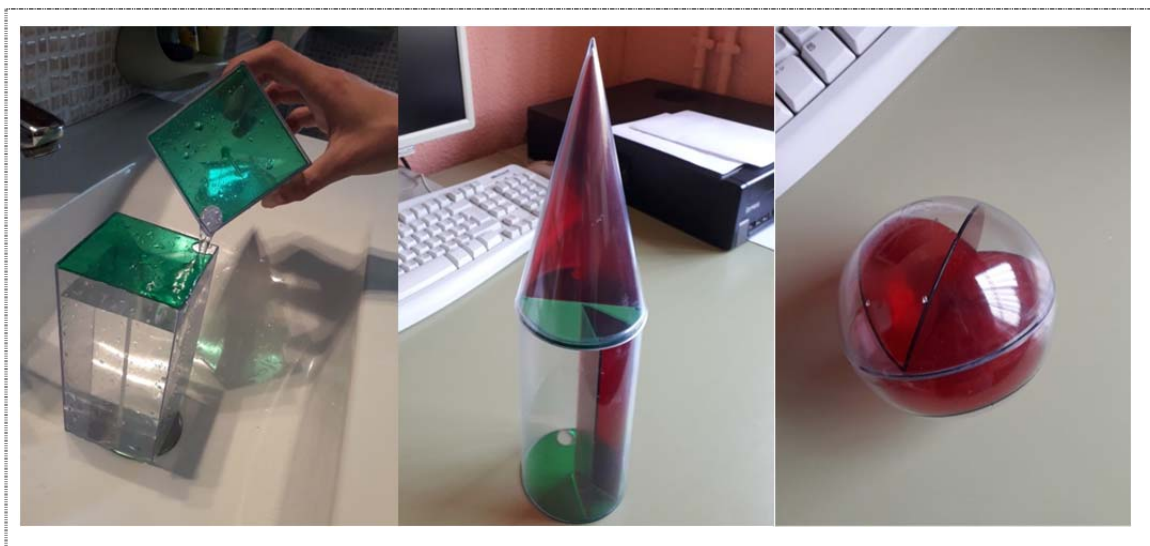
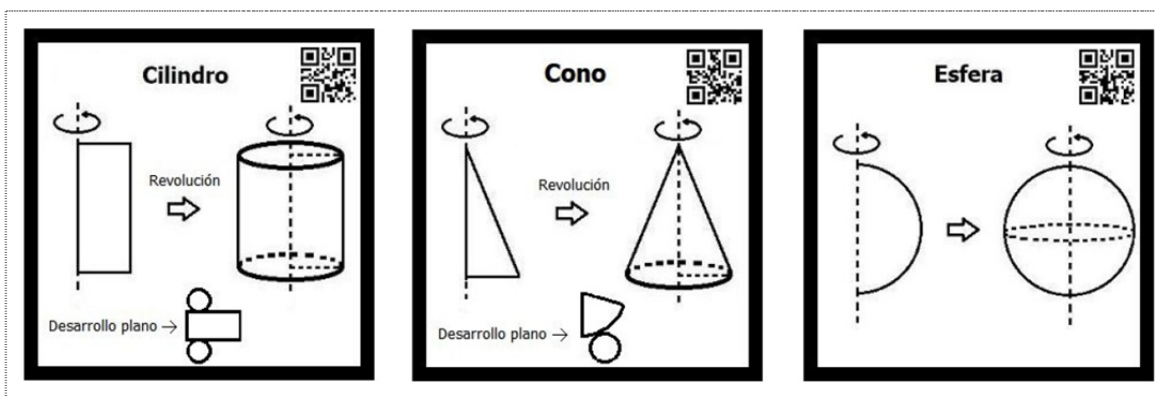


Figura 33. Cuerpos geométricos para llenar de agua (elaboración propia).

La actividad en la que se propone el uso de la app “Geometría RA” es una actividad IBL para la cual vamos a necesitar que los alumnos se descarguen esa aplicación en un teléfono móvil y el profesor les proporcionará unos códigos QR con los que serán capaces de visualizar en la pantalla de su teléfono un cilindro, un cono y una esfera, y podrán descubrir cómo se forman los cuerpos de revolución pulsando el botón del “play” que para tal fin aparece en la pantalla (véase [Figura 34](#)).



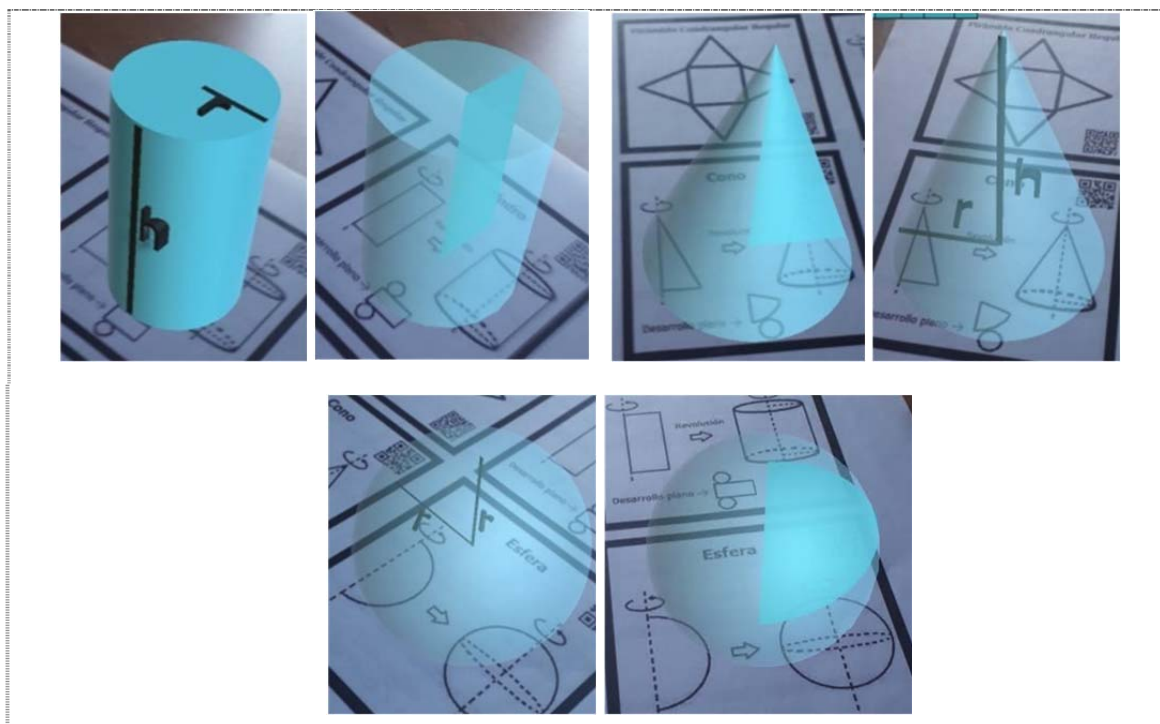


Figura 34. Codigos QR y screenshot del móvil (elaboración propia).

En la sesión final se proporciona un resumen que sintetiza la unidad para facilitar el trabajo de los alumnos a la hora de repasar lo que han tenido que aprender. Sabemos que lo ideal sería que ellos solos realizaran su propio resumen, pero de esta manera nos cercioramos de que todos los contenidos se encuentran de manera clara, ordenada y correcta evitando que estudien resúmenes con errores o incompletos.

Se entiende por Actividades de ampliación las propuestas al alumnado que supere con facilidad los objetivos propuestos y que realicen satisfactoriamente las actividades programadas, ya sean alumnado de altas capacidades o no. En este caso se les proporciona una página web donde pueden encontrar una [“Colección de Problemas”](#) para resolver, y otra página web con [“Actividades interesantes resueltas”](#) años anteriores en las Olimpiadas Matemáticas Thales.

Las Actividades de refuerzo para aquellos alumnos que no superen la materia consistirán en realizar una [“WebQuest”](#) que deberán entregar para poder examinarse de este tema en la recuperación.

Por último el examen se va a realizar con una yincana geométrica, para la que vamos a necesitar una serie de recursos que vienen reflejados en la subsección 6.8.1 de este TFM. En el [Anexo XXII](#) se proporciona el material fotocopiable que se entregará a los alumnos. Unos días antes de la realización de la yincana el profesor entregará la primera página del mencionado Anexo junto con la nota para los padres pidiendo que traigan el teléfono móvil para ese día y el material pedido en esa primera página. Para esta yincana el profesor debe elegir a 5 alumnos que sean más sobresalientes y tenga dotes de líder para desempeñar el rol de coordinadores (los roles que cada alumno

debe desempeñar dentro del grupo vienen explicados en esta primera página) y cada uno de estos a su vez elegirán a un compañero que será su secretario (alguien en quien confiar), a partir de ahí el profesor creará grupos con el resto de alumnos buscando el equilibrio y la integración de sus componentes y pedirá a los alumnos que elijan el rol de los componentes del grupo.

El día de la yincana se comienza en la pista de baloncesto, el profesor entrega a cada grupo la segunda página del **Anexo XXII** en la que se propone la primera prueba, enseña una pelota de baloncesto y una canasta (cuyo pilar es cilíndrico) para que los alumnos calculen el volumen y el área de ambos cuerpos, de manera que deberán medir con el flexómetro la altura del pilar y con las cintas métricas el perímetro de ambos cuerpos y averiguar el radio una vez resuelto el profesor evalúa la prueba y siguiendo la pista deben ir al salón de actos.

Una vez lleguen al salón de actos el profesor entrega la prueba 2 y en las mesas encontrarán unos platos y unos vasos; Ahora deben calcular el área total de uno vasos cilíndricos. Resuelto y evaluado, siguen la pista que les conduce a la pista de futbol.

Se les entrega la prueba 3 y en esta ocasión deben medir la diagonal de una portería sin poder hacerlo de forma directa, por lo tanto deben ayudarse de Pitágoras. Resuelto y evaluado, siguen la pista que les conduce al aula de tecnología.

Aquí se les proporciona prueba 4, un recortable de un prisma con base cuadrada que deben construir y un mapa del instituto a escala 1/500 en el que deben dibujar la ubicación de cada prueba de manera que la solución al unir los puntos sea un rectángulo (véase **Figura 34**) tras medir sus lados deben calcular el perímetro real usando la escala y finalmente relacionar el prisma de base cuadrada con las dimensiones reales del rectángulo (que por supuesto serían sus caras laterales). Una vez calculado el área y volumen de este prisma pasan a la última prueba sacando el centro del rectángulo, posición que coincide con el jardín.

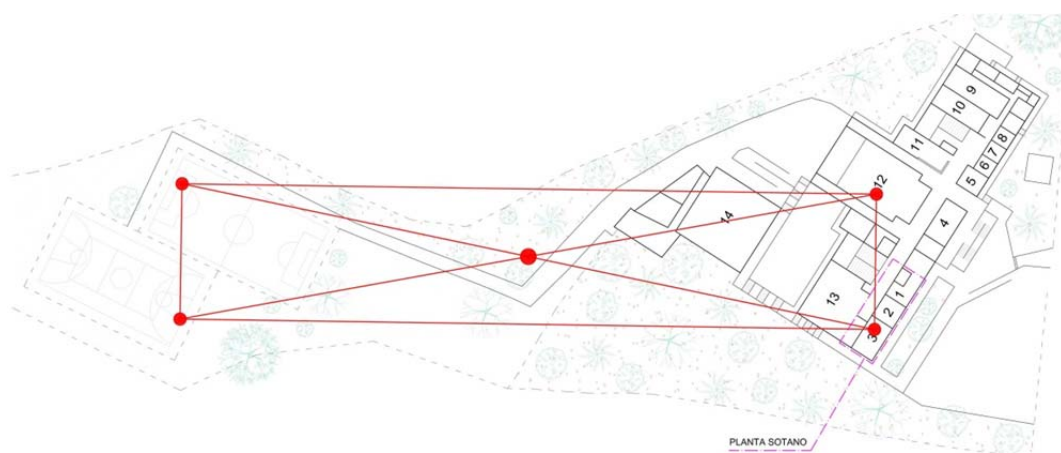


Figura 34. Solución de la prueba con mapa (elaboración propia).

Los alumnos encontrarán un cofre cerrado en la ubicación obtenida en la prueba anterior, el profesor les indicará que el grupo que finalice el primero podrá abrirlo, les entregará la última prueba y les mostrará un dodecaedro, en esta prueba tienen que ser capaces de identificar varios cuerpos geométricos y una vez resulta esta prueba el grupo abrirá el cofre que tendrá algún premio tipo diploma en su interior.

El profesor calificará estas pruebas teniendo en cuenta el interés de los componentes del grupo, el trabajo, el esfuerzo, la cantidad de ayuda que hayan necesitado y la rapidez en la resolución de los problemas, así como la correcta resolución de los mismos.

▪ 6.9. Atención a la diversidad.

Las medidas y programas establecidos para la atención a la diversidad cuya finalidad es que todos los alumnos consigan las competencias claves y objetivos generales de etapa vienen recogidas en el capítulo VI del DECRETO 111/2016 y pretende dar respuesta a las múltiples situaciones en que un alumno se pueda encontrar como pudieran ser distintas capacidades y ritmos de aprendizaje, diferentes situaciones socioeconómicas, lingüísticas, culturales o de salud.

Estos programas son de recuperación, mejora y refuerzo de los aprendizajes, con planes personalizados específicos para superar dificultades y medidas de atención del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo (ANEAE) a través de programas de adaptación, flexibilización y enriquecimiento curricular.

El artículo 9 del RD 1105/2014 hace referencia al ANEAE siendo de aplicación lo indicado en el Capítulo I del Título II de la Ley 2/2006 de 3 mayo en la cual se establecen las medidas curriculares y organizativas para asegurar el máximo desarrollo de las capacidades personales y el logro de los objetivos generales y competencias establecidos en cada etapa del alumnado que requiera una atención educativa diferente a la ordinaria, por presentar:

- Dificultades específicas de aprendizaje (DEA).
- Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH).
- Altas capacidades intelectuales (ALCAIN).
- Incorporación tardía al sistema educativo (INTARSE).
- Especiales condiciones personales o de historia escolar (ECOPHE).
- Necesidades educativas especiales (NEE):
 - Trastornos del desarrollo.
 - Discapacidad.
 - Trastornos graves de conducta.

A continuación, por dar una solución a las diferentes necesidades educativas del alumnado que se pueden producir debidas a la diversidad se van a desarrollar unas medidas de apoyo ordinario y otras de apoyo específico.

A través de las siguientes medidas de apoyo ordinario se pretende atender a los alumnos de forma individualizada sin cambiar los objetivos:

- Para los alumnos que llevan un ritmo de aprendizaje diferente a la media de la clase, se proponen actividades de refuerzo si es más lento y actividades de ampliación si es más rápido.
- Elaboración de actividades parecidas pero con diferentes niveles de dificultad, para poder elegir según el ritmo de aprendizaje.
- Realización de actividades colaborativas y cooperativas con grupos reducidos y heterogéneos que favorezcan la integración de todos sus miembros.
- Aplicación de metodologías motivadoras de carácter manipulativo y TICs con las que atraer la atención de los alumnos con falta de motivación.

A través de las siguientes medidas de apoyo específico se pretende atender a los ANEAE de una forma personalizada:

- DEA: es necesaria una adaptación curricular y tiene que haber coordinación entre los profesores y colaboración con la familia. Las metodologías que usamos son lúdicas manipulativas y TICs de manera que estos alumnos se sientan motivados.
- TDA y TDAH: es necesaria una adecuación y flexibilización curricular, para estos alumnos es más fácil aprender si las clases están perfectamente estructuradas y son capaces de predecir aquello que vamos a realizar a continuación. Se procurará el uso de material audiovisual, sentarlos en las filas cerca del profesor y la pizarra, ser flexibles si necesitan corregir errores y en el tiempo del examen.
- ALCAIN: para estos alumnos adaptamos el currículo conforme a su situación proporcionando contenidos con un nivel superior al curso en el que se encuentra.
- INTARSE: con estos alumnos se realizarán actividades grupales con las que favorecer la socialización y se pondrá en práctica una medida de apoyo idiomático en caso de tener una lengua distinta al español.
- ECOPHE: será necesaria una adecuación y flexibilización curricular conforme a su situación que puede venir motivada por limitación sociocultural, desajustes en su escolarización o condiciones personales de salud.
- NEE: estos alumnos necesitan una adaptación curricular individualizada y significativa (ACIS) y en la mayoría de los casos serán tratados por un profesor de apoyo.

▪ 6.10. Temporalización.

Las sesiones para el curso 2020/2021 han sido planificadas con el fin de organizar y distribuir el tiempo del alumnado de la manera más eficaz posible. Esta organización temporal posee un carácter flexible dentro de las sesiones que conforman las distintas unidades didácticas y además de responder a la realidad del centro educativo estará sujeta a revisión porque la realidad del aula no es inmutable.

La temporalización del curso se ha realizado para 13 unidades didácticas, repartidas en un total de 105 sesiones, a las cuales se les añade una semana más al principio de curso académico para evaluaciones iniciales y otra al final para recuperación y evaluación global.

Teniendo en cuenta que se dan 4 horas semanales de matemáticas, el horario del curso-grupo y el calendario escolar estimamos que disponemos de 144 horas para la asignatura, de esta manera en la **Tabla 11** se sugiere una propuesta de reparto del tiempo (sin contar las sesiones de introducción y evaluación):

Matemáticas de 2º de ESO			
UNIDAD DIDÁCTICA: Título		Temporalización	
UNIDAD 1:	Divisibilidad. Números enteros	8 sesiones	Primer trimestre
UNIDAD 2:	Fracciones y decimales	9 sesiones	
UNIDAD 3:	Potencias y raíces	8 sesiones	
UNIDAD 4:	Proporcionalidad	10 sesiones	
UNIDAD 5:	Expresiones algebraicas	8 sesiones	Segundo trimestre
UNIDAD 6:	Ecuaciones	7 sesiones	
UNIDAD 7:	Sistemas de ecuaciones	8 sesiones	
UNIDAD 8:	Funciones	7 sesiones	
UNIDAD 9:	Medida. Teorema de Pitágoras	6 sesiones	
UNIDAD 10:	Semejanza	8 sesiones	Tercer trimestre
UNIDAD 11:	Cuerpos geométricos	9 sesiones	
UNIDAD 12:	Estadística	9 sesiones	
UNIDAD 13:	Probabilidad	8 sesiones	

Tabla 11. Temporalización para la asignatura de Matemáticas de 2ºESO (elaboración propia).

En el presente documento se desarrolla concretamente la UD 11: Cuerpos geométricos. La fecha prevista para su inicio será el 27 de Abril y se estructurará en un total de 11 sesiones descritas en la **Tabla 12**.

Sesión		UD 11: "Cuerpos geométricos"	
1ª	Evaluación inicial de conocimientos mediante prueba escrita (Anexo V).		30'
	Explicación de los criterios que se van a seguir en esta UD.		10'
	Introducción con una pequeña actividad motivadora (Anexo VI).		20'
2ª	Iniciar el desarrollo de los contenidos de la unidad en concreto comenzamos con: 1. CUERPO GEOMÉTRICO: DEFINICIÓN Y COMPONENTES. 2. TIPOS DE CUERPOS GEOMÉTRICOS: POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS. 3. CLASIFICACIÓN DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS DEPENDIENDO DE DIFERENTES CARACTERÍSTICAS. Planteamos actividades (Anexo VII) para realizar en clase con los siguientes indicadores: - Diferencia entre figuras planas y cuerpos geométricos. - Reconoce poliedros y cuerpos redondos en objetos de la vida real. - Distingue los elementos (caras, vértices, aristas, base, cara lateral y altura) de un cuerpo. - Clasifica cuerpos mediante diferentes criterios (poliedro y cuerpo redondo, cóncavo y convexo, recto y oblicuo).		20'
			40'
3ª	Desarrollo de los contenidos: 4. POLIEDROS REGULARES (SÓLIDOS PLATÓNICOS) Y SEMIRREGULARES (SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS). 5. TEOREMA DE EULER. Se proponen actividades (Anexo VIII) para realizar en clase con los siguientes indicadores: - Identifica los 5 sólidos platónicos entre figuras 3D reales. - Asocia cada sólido platónico al polígono regular de sus caras. - Comprueba el Teorema de Euler en los sólidos platónicos. Proposición de actividades para realizar en clase (en pareja) con los siguientes indicadores: - Construye sólidos platónicos con piezas Miniland. Se proponen actividades (Anexo IX) para realizar en casa con los siguientes indicadores: - Construye los 5 sólidos platónicos a partir de su desarrollo plano mediante recortables.		20'
			15'
			25'

4ª	Desarrollo de los contenidos: 6. PRISMAS. 7. PIRÁMIDES. Se proponen actividades (Anexo X) para realizar en clase con los siguientes indicadores: - Identifica prismas y pirámides entre figuras 3D reales. - Utiliza el Teorema de Euler. - Distingue los elementos (caras, vértices, aristas, base, cara lateral y altura) de prismas y pirámides. - Clasifica prismas y pirámides según su base. Proposición de actividades para realizar en clase (en pareja) con los siguientes indicadores: - Construye prismas y pirámides con piezas Miniland. Se proponen actividades (Anexo XI) para realizar en casa con los siguientes indicadores: - Construye prismas y pirámides a partir de su desarrollo plano mediante recortables.	15' 20' 25'
5ª	Resolución de las actividades recortables de las sesiones 3ª y 4ª. Continuar con el desarrollo de los contenidos: 8. CILINDRO. 9. CONO. 10. ESFERA. Se proponen actividades (Anexo XII) para realizar en clase con los siguientes indicadores: - Reconoce cuerpos de revolución en la vida real. - Distingue sus elementos (base circular, vértice, aristas, superficie lateral curva, generatriz y altura). Proposición de actividades para realizar en clase (en pareja) con los siguientes indicadores: - Construye un cilindro y un cono a partir de su desarrollo plano mediante recortables (Anexo XIII). - Usa la app “Geometría RA” para visualizar el cilindro, el cono y la esfera mediante un código QR.	15' 10' 10' 25'
6ª	Prueba individual que formará parte de la evaluación (Anexo XIV). Se proponen actividades de ampliación para el alumnado aventajado. Repasar el cálculo de áreas de polígonos regulares.	40' 20'

7ª	Desarrollo de los contenidos: 11. ÁREA TOTAL DE UN PRISMA (CILINDRO). 12. ÁREA TOTAL DE UNA PIRÁMIDE (CONO). 13. ÁREA TOTAL DE UNA ESFERA. Realización de un ejercicio-ejemplo (Anexo XV) dibujado tanto de manera manual en la pizarra como proyectando unos videos de la página web matemáticasvisuales .com. Proposición de actividades para realizar en clase (en pareja) con los siguientes indicadores: - Descubre el desarrollo plano de prismas, pirámides, cilindros y conos mediante figuras 3D con plantillas desplegables de silicona. Planteamos actividades (Anexo XVI) para realizar en clase¹ con los siguientes indicadores: - Halla el área de un prisma. - Halla el área de una pirámide. - Halla el área de un cilindro. - Halla el área de un cono. - Halla el área de una esfera.	20' 20' 20'
8ª	Resolución de las actividades planteadas en clase pero finalizadas en casa. Desarrollo de los contenidos: 14. VOLUMEN DE UN PRISMA (CILINDRO). 15. VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE (CONO). 16. VOLUMEN DE UNA ESFERA. Proposición de actividades (Anexo XVII) para realizar en clase (en pareja) con los siguientes indicadores: - Descubre la relación entre volúmenes mediante figuras 3D rellenables de agua. - volumen de un prisma y una pirámide con la misma base y altura. - volumen de un cilindro y una esfera con el mismo radio y altura igual al diámetro. Planteamos actividades (Anexo XVIII) para realizar en clase¹ con los siguientes indicadores: - Halla el volumen de un prisma. - Halla el volumen de una pirámide. - Halla el volumen de un cilindro. - Halla el volumen de un cono.	10' 15' 25' 10'

En el **Anexo IV** del TFM se establece la relación entre los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables descritos en la normativa vigente y que por tanto debemos utilizar. Estos estándares se relacionan en la sección 6.5 del TFM con las competencias claves a través de nuestros indicadores o descriptores.

A continuación se enumeran los indicadores utilizados, obtenidos de los descritos en la sección 6.5, para posteriormente elaborar una tabla donde se relacionen con las actividades de los controles (véase **Tabla 13**):

- 1.** Define poliedro utilizando un lenguaje geométrico adecuado.
- 2.** Analiza e identifica los elementos característicos de diferentes cuerpos geométricos.
- 3.** Explica la diferencia entre poliedro y no poliedro (cuerpo redondo) utilizando un lenguaje geométrico adecuado.
- 4.** Diferencia entre los distintos tipos de poliedro y los clasifica según sean cóncavos o convexos, oblicuos o rectos y regulares o semirregulares.
- 5.** Utiliza el teorema de Euler en los sólidos platónicos.
- 6.** Reconoce y construye los cuerpos geométricos principales a partir de sus desarrollos planos y viceversa.
- 7.** Identifica tetraedros.
- 8.** Identifica cubos.
- 9.** Identifica octaedros.
- 10.** Identifica dodecaedros.
- 11.** Identifica icosaedros.
- 12.** Identifica prismas.
- 13.** Identifica pirámides.
- 14.** Identifica cilindros.
- 15.** Identifica conos.
- 16.** Identifica esferas.
- 17.** Calcula el área de prismas.
- 18.** Calcula el área de pirámides.
- 19.** Calcula el área de cilindros.
- 20.** Calcula el área de conos.
- 21.** Calcula el área de esferas.

- 22.** Calcula el volumen de prismas.
- 23.** Calcula el volumen de pirámides.
- 24.** Calcula el volumen de cilindros.
- 25.** Calcula el volumen de conos.
- 26.** Calcula el volumen de esferas.
- 27.** Resuelve problemas contextualizados en la realidad haciendo uso del cálculo de áreas.
- 28.** Resuelve problemas contextualizados en la realidad haciendo uso del cálculo de volúmenes.
- 29.** Expresa razonadamente el proceso seguido para resolver un problema en formato verbal o escrito y con un rigor y precisión adecuados.
- 30.** Comprende el enunciado de los problemas y los analiza buscando datos, las relaciones entre ellos y su contexto.
- 31.** Utiliza diferentes estrategias y usa el razonamiento a la hora de resolver correctamente los problemas, reflexionando sobre los resultados obtenidos.
- 32.** Identifica situaciones en contextos de la realidad cotidiana que podrían contener problemas geométricos de interés.
- 33.** Conecta los problemas del mundo real con los del mundo matemático, identificando tanto los problemas matemáticos que subyacen en el mundo real como aquellos conocimientos matemáticos que va a necesitar.
- 34.** Interpreta la solución matemática obtenida de un problema en el contexto de su realidad.
- 35.** Desarrolla y cultiva las actitudes personales adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, flexibilidad, perseverancia y aceptación de la crítica razonada.
- 36.** Resuelve retos y problemas planteándolos con un interés, esmero y precisión adecuados a la dificultad de la situación y a su nivel educativo.
- 37.** Emplea de manera autónoma los recursos tecnológicos para crear representaciones gráficas de objetos geométricos con el objetivo de observar, examinar y comprender sus propiedades.
- 38.** Utiliza habitualmente las TICs de un modo adecuado para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje buscando, analizando y seleccionando en internet u otras fuentes aquella información útil para el desarrollo de las actividades.

Para calificar el nivel de desempeño de los estándares usaremos la rúbrica del **Anexo XXIII**.

Como se puede comprobar en la **Tabla 13** los descriptores 35 y 37 no se relacionan con ninguna actividad de los controles, esto es debido a que la evaluación de estos descriptores se realiza a través de las actividades de clase.

		CONTROL 1 (Anexo XIV)						CONTROL 2 (Anexo XX)						EXAMEN (Anexo XXII)				
		Actividad						Actividad						Actividad				
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
Descriptores / indicadores	1	✓																
	2			✓	✓	✓												
	3	✓																
	4		✓															
	5				✓	✓												
	6						✓	✓	✓								✓	✓
	7				✓													
	8				✓													✓
	9				✓													✓
	10				✓													✓
	11				✓													✓
	12					✓				✓	✓						✓	✓
	13					✓				✓	✓							✓
	14					✓				✓	✓			✓	✓			✓
	15					✓				✓	✓							✓
	16					✓				✓	✓			✓				
	17									✓							✓	
	18									✓								
	19									✓					✓			
	20									✓								
	21									✓				✓				
	22										✓						✓	
	23										✓							
	24										✓			✓				
	25										✓							
	26										✓			✓				
	27											✓			✓			
	28												✓	✓			✓	
	29											✓	✓					
	30											✓	✓	✓		✓		
	31											✓	✓		✓		✓	
	32													✓		✓		
	33											✓	✓	✓	✓	✓		
	34											✓	✓	✓		✓	✓	
	35																	
	36											✓	✓	✓		✓	✓	
	37																	
	38															✓	✓	✓

Tabla 13. Relación entre las actividades de los controles y los descriptores (elaboración propia).

7. Conclusiones.

En este TFM se ha elaborado una UD sobre cuerpos geométricos para un curso de 2ºESO poniendo en práctica aquellos conocimientos y destrezas adquiridos por una lado a través de las asignaturas que se han cursado en el Master y por otro gracias a las prácticas realizadas en el IES Cástulo.

El diseño de esta UD se ha sustentado en tres fundamentaciones: una curricular, una didáctica y otra epistemológica.

Con la fundamentación curricular se ha investigado la normativa vigente para poder tener en cuenta aquello que según la ley se debe enseñar-aprender en secundaria y como se debe evaluar según los criterios establecidos a tal fin. Además se han analizado los libros de texto más usados en los institutos de Andalucía, con el objetivo de elegir uno para tomarlo como guion a la hora de desarrollar la UD.

A través de la fundamentación epistemológica se ha profundizado en el tema que debíamos enseñar, obteniendo un conocimiento más formal y riguroso sobre los cuerpos geométricos, para conectarlo a su vez con los conocimientos plasmados en el libro de texto.

En el estudio didáctico se ha realizado un análisis de tres artículos con los que se fundamenta la razón por la cual la enseñanza-aprendizaje de la geometría en general y de los cuerpos geométricos en particular en los cursos de secundaria presenta tanta dificultad, siendo la metodología usada una de las principales causas.

Finalmente culminamos planificando, desarrollando y evaluando la susodicha UD utilizando todo lo analizado anteriormente. Teniendo como objetivo que los alumnos adquieran las competencias exigidas por la normativa, mediante el empleo de metodología que si bien en algunas ocasiones será tradicional se ha procurado que en la mayoría de las sesiones sea algo más innovadora buscando un aprendizaje significativo a través del uso de herramientas TICs y manipulativas.

Cabe mencionar que debido al COVID-19 nos encontramos en una situación bastante inusual y la cual hemos tenido que tener en cuenta a lo largo del desarrollo de la UD.

8. Referencias bibliográficas.

- ✓ Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E. (2019a), *Matemáticas 2º ESO*. Madrid. Grupo SM.
- ✓ Báez, R. & Iglesias, M. (2007). *Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro"*. Enseñanza de la Matemática, Vols. 12 al 16, Número extraordinario, 67-87.
- ✓ Baldor, J.A. (2004a). *Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría*. México. Publicaciones CULTURAL, S.A.
- ✓ Ballesterio Alfaro, Esteban y Gamboa Araya, Ronny (2010). *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes*. Revista Electrónica Educare, EDUCARE, 14 (2), p. 125-142.
- ✓ Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2004). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro sobre la geometría Escolar*. Enseñanza de las Ciencias, 22(2), 241-250.
- ✓ Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2005). *Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría*. Números, 62, 33-44.
- ✓ Blanco, Lorenzo J. y Barrantes, Manuel (2003). *Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6 (2), p. 107-132.
- ✓ Camargo, L., Acosta, M. (2012a). *La geometría, su enseñanza y su aprendizaje*. Bogotá. Rev. Fac. Cienc. Tecnol. no.32.
- ✓ Colera, J., Gaztelu I. (2008a). *Matemáticas 2*. Andalucía. Grupo Anaya, S.A.
- ✓ Colera, J., Colera R., Gaztelu I. (2016a). *Matemáticas 2º ESO*. Grupo Anaya, S.A.
- ✓ Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (2001) *¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo*. En Perales, Ej.; García, A.L. y otros (eds.). Congreso Nacional de Didácticas específicas. Vol II. G. Ed. Universidad de Granada.
- ✓ Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996) *Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio*. En Giménez, J. Llinares, S. y Sánchez, M.V. (eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Ed. Comares. p.145-169.

- ✓ Jaime, A. Chapa, A y Gutiérrez, A. (1992) *Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de EGB*. Npsilon, n 23, 49-62.
- ✓ Jones, K. (2002). *Issues in the Teaching and Learning of Geometry*. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics*. Perspectives on practice (pp. 121-139). London: RoutledgeFalmer.
- ✓ López, S. (2007). *Sólidos Platónicos*. Unión: revista iberoamericana de educación matemática, Nº. 12. (pp. 171-174).
- ✓ Martínez, A. y otros (1989). *La enseñanza de la Geometría*. Síntesis. Madrid
- ✓ Medici, D. y otros (1986). *Sobre la formación de los conceptos geométricos y sobre el léxico geométrico*. Enseñanza de las ciencias, 4(1), 16-22.
- ✓ Vinner, S. (1991) *The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics*. En Tall, D. (ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. p. 65-81.
- ✓ Zapata Esteves, Marcos Augusto y Barrantes López, Manuel (2008). *Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas*. Revista de educación Campo Abierto, 27 (1), p. 55-71.
- ✓ BOE nº 3 de 03/01/2015. *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*.
 - o <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2015-37>
- ✓ BOE nº 106 de 04/05/2006. *Ley Organica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*.
 - o <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2006-7899>
- ✓ BOJA nº 144 de 28/07/2016. *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado*.
 - o <https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/144/18>
- ✓ BOJA nº 122 de 28/06/2016. *Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía*.
 - o <https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/122/2>

- ✓ Página web Universo Fórmulas:
 - o <https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria>
- ✓ Página web Geometría Sagrada:
 - o <http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/s%C3%B3lidos-arquimedianos>
- ✓ Página web Matemáticas Visuales:
 - o <http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/geometria.html>

Anexo I.

Concepciones de los estudiantes para maestro.

Cuadro resumen sobre concepciones de estudiantes para maestro (RELIME, 2003).

CUADRO DE RESUMEN DE CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO.**Sobre geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje.**

- La geometría escolar es una materia difícil.
- La geometría escolar es más difícil que otra parte de las matemáticas escolares.
- La geometría escolar es una materia difícil de enseñar en la escuela.
- Los temas numéricos son más fáciles que los temas geométricos.
- Los temas numéricos son más importantes que los temas geométricos.
- La geometría escolar no es una materia motivante.

Sobre los contenidos de la geometría escolar.

- La geometría plana es más fácil que la espacial.
- Los alumnos deben aprender más geometría plana que espacial.
- De todos los contenidos, los temas de medida son los más importantes, y dentro de éstos, el tema de las áreas de las figuras es el más importante.

Sobre la metodología de enseñanza-aprendizaje de la geometría escolar.

- La metodología para enseñar la geometría consiste en explicar los contenidos, realizar actividades, ejercicios y problemas y aclarar las dudas de los alumnos.
- Las actividades manipulativas o de construcción de figuras no son actividades matemáticas sino propias de otras materias.

Sobre los materiales de enseñanza-aprendizaje de la geometría escolar.

- Los estudiantes estiman conveniente la utilización de los materiales en la enseñanza-aprendizaje de la geometría como una primera declaración general.
- Los materiales ayudan a concretizar.
- La utilización de materiales es motivante para los alumnos basados en que los materiales son motivantes por sí mismos y no por las actividades que se puedan realizar con ellos.

Sobre los recursos en la enseñanza-aprendizaje de la geometría escolar.

- El libro de texto es básico para la enseñanza-aprendizaje de la geometría.
- La historia es algo anecdótico en la enseñanza, que está desligado de cualquier estrategia de enseñanza-aprendizaje, más que un recurso a utilizar.
- La relación Aritmética-geométrica, no llega más allá de que los números son necesarios para realizar las operaciones de cálculos como los de medida.
- En la relación de la geometría con otras materias, los estudiantes apenas tienen información, como mucho conciben que se puede relacionar el Medio con la Geometría aunque de una forma superficial.
- La relación de la geometría con la vida consiste en relacionar objetos geométricos y cotidianos y en resolver problemas del libro que tratan de aspectos que pueden ser cotidianos, sobre todo de medida. Parte de la geometría para llegar a la realidad.

Sobre las actividades de enseñanza-aprendizaje de la geometría escolar.

- Los ejercicios y problemas son importantes en el aprendizaje de la Geometría, sobre todo los de medida.
- Los estudiantes conciben las actividades geométricas dentro de unas limitaciones algebraicas, formales y simbólicas.
- Prácticamente identifican problema con ejercicio.

Sobre el aprendizaje de la geometría escolar.

- Expresan que los alumnos deben primero comprender y luego memorizar.
- La comprensión está basada en el aprendizaje a través de las explicaciones y práctica, y mediante una organización interna según la estructura de la materia.
- La comprensión de los conceptos se concibe como una asimilación del contenido.
- El trabajo individual es más adecuado para aprender que el trabajo en grupo.
- Los ejercicios y problemas son más importantes que las tareas prácticas.
- Los problemas se deben hacer individualmente, y las actividades con figuras se deben hacer en grupo.

Sobre el papel del maestro y del alumno en la enseñanza-aprendizaje de la geometría.

- En general, conciben su papel de maestros como transmisores de conocimientos y medidores del conocimiento transmitido observable.
- El papel del alumno, respecto a las relaciones, es un elemento a considerar en la enseñanza-aprendizaje y no un elemento ajeno a ésta.
- El alumno debe participar en el diseño de las actividades, de esta forma conoceremos intereses y habrá una mayor motivación y un mejor aprendizaje.

Sobre la evaluación de la geometría escolar.

- El examen es un elemento importante de la evaluación.
- Desestiman las actividades de aula como elemento evaluador.
- Se conciben los exámenes como el elemento sancionador.
- Los problemas del examen son de aplicación mecánica de los conceptos impartidos, que en la mayoría de los casos es aplicación de las fórmulas.
- El examen sería básicamente de ejercicios y problemas, similares a los realizados en clase pero cambiando los datos.
- Conciben que al hacer este cambio, los alumnos deben comprender el problema para hacerlo y así evitan que se los aprendan de memoria.
- Si se sabe resolver los problemas es porque se sabe la teoría.

Anexo II.

Objetivos generales en secundaria.

Relación entre objetivos generales de la secundaria y competencias clave (elaboración propia a partir de la normativa).

	OBJETIVOS	competencia clave
a	Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.	CSC
b	Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.	CAA, SIEP
c	Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.	CSC
d	Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.	CSC
e	Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.	CCL, CMCT, CD
f	Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.	CMCT
g	Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.	CAA, SIEP
h	Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.	CCL
i	Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.	CCL
j	Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.	CEC
k	Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.	CMCT, CSC
l	Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.	CEC
m	Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.	CCL, CEC
n	Conocer y apreciar los elementos específicos de la historia y la cultura andaluza, así como su medio físico y natural y otros hechos diferenciadores de nuestra Comunidad, para que sea valorada y respetada como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.	CEC

Anexo III.

Objetivos de la materia de Matemáticas.

Objetivos generales de la secundaria (elaboración propia a partir del DECRETO).

	OBJETIVOS
1	Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2	Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3	Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4	Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5	Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6	Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7	Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8	Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9	Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
10	Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11	Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

Anexo IV.

Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje.

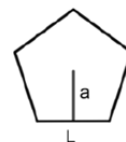
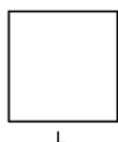
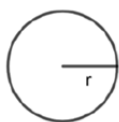
Relación entre criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables descritos en la ORDEN 14/07/2016 (elaboración propia a partir de la normativa).

	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
	1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.
	1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	1.6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
	1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.
	1.11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	1.11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.
	1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
Bloque 3: Geometría	3.5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.).	3.5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. 3.5.3. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente.
	3.6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.	3.6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.

Anexo V.

Prueba inicial.

1) Asocia cada figura plana con su nombre correspondiente.



cuadrado

pentágono

círculo

hexágono

triángulo

2) Asocia cada nombre con la fórmula para calcular su perímetro, apotema y área.

cuadrado

$$P = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$a_p = h/3$$

$$A = P \cdot a_p / 2$$

triángulo

$$P = 6 \cdot L$$

$$a_p = r$$

$$A = L^2$$

hexágono

$$P = 4 \cdot L$$

$$a_p = L/2$$

$$A = \pi \cdot r^2$$

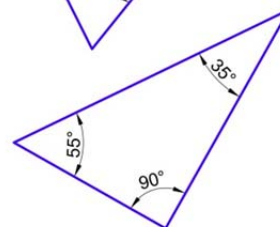
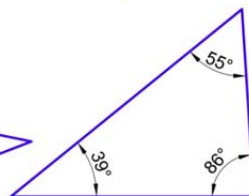
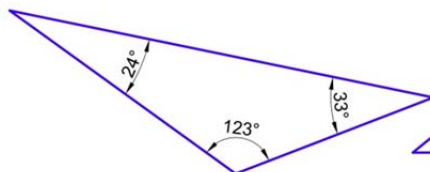
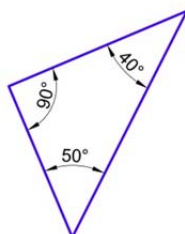
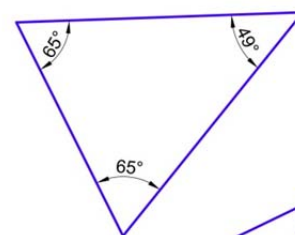
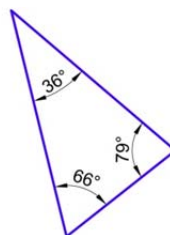
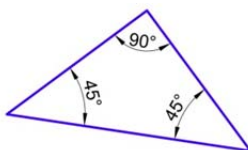
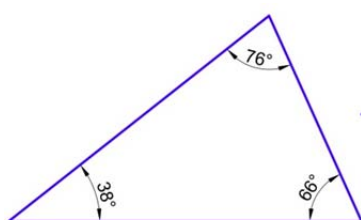
círculo

$$P = 3 \cdot L$$

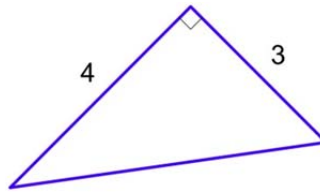
$$a_p = L \cdot \sqrt{3} / 2$$

$$A = L \cdot h / 2$$

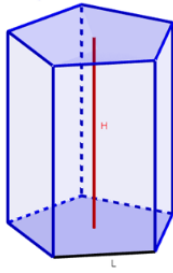
3) Indica en cada caso si el triángulo es rectángulo, y de ser así cuál de los tres lados es la hipotenusa.



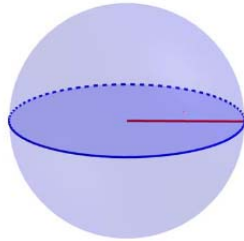
4) Calcula la medida del lado que falta en el siguiente triángulo rectángulo.



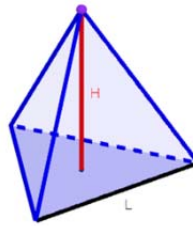
5) Asocia cada cuerpo con su nombre correspondiente.



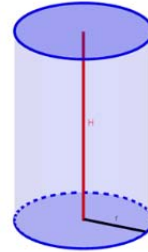
cilindro



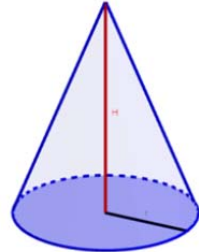
prisma



cono



pirámide



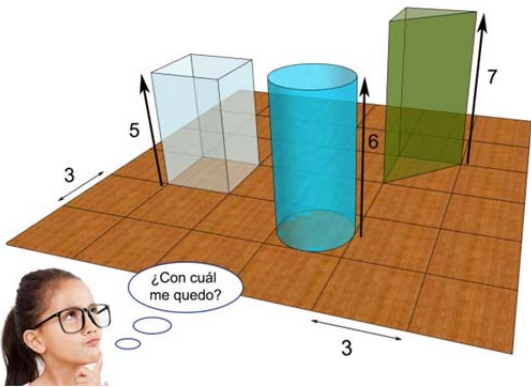
esfera

6) Escribe “si la recuerdas” la fórmula para calcular el volumen de un prisma, de una pirámide y de una esfera.

Anexo VI.

Actividad motivadora.

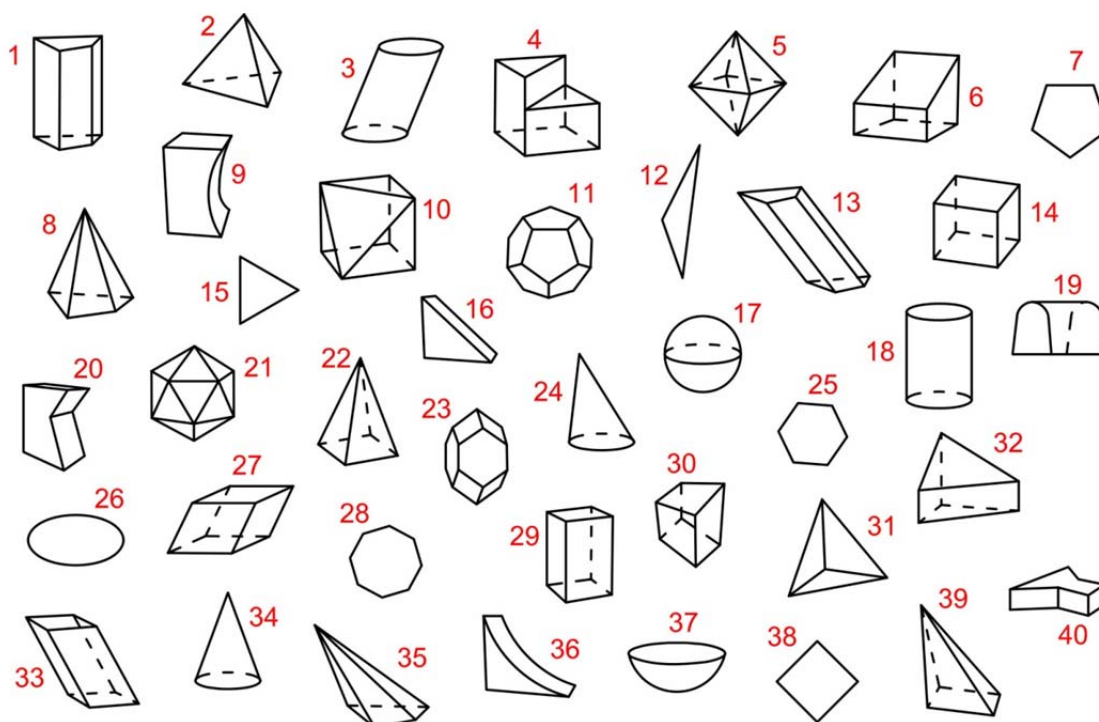
EL DILEMA

	¿ME AYUDAS A ELEGIR? Me encanta la Coca-Cola, mi madre ha traído una botella pero solo deja que me sirva un vaso, ¿Cuál de estos debería escoger?
Si quieres ayudarme, primero necesitarás conocer conceptos que se relacionan con las tres dimensiones del espacio. Vamos a conocer los cuerpos geométricos. Comienza a investigar y pronto sabrás la respuesta. Realiza las actividades indicadas para lograr el objetivo. ¡Mucho ánimo! Al finalizar la investigación, no solo podrás contestar esta pregunta, sino que te darás cuenta de la importancia que tienen los volúmenes en nuestra vida cotidiana.	

Anexo VII.

Actividades de clase.

1) Dadas las siguientes figuras señala únicamente las que no sean cuerpos geométricos y clasifica las que los sean en la tabla dada.



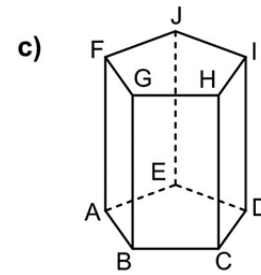
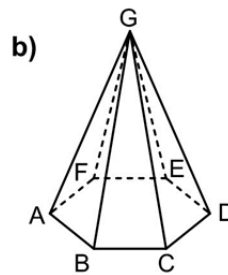
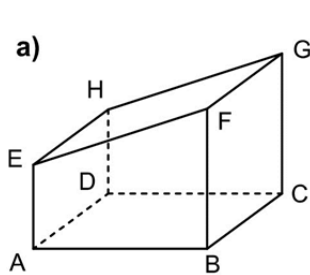
Poliedro	
No poliedro	
Cóncavo	
Convexo	
Recto	
Oblicuo	
Regular	
Irregular	

2) Fíjate en los objetos que muestra el profesor y nombra qué tipo de cuerpo geométrico piensas que son.

“Cartón de leche”, “gorrito de fiesta”, “joyero”, “vela aromática”, “reloj” y “canica”.



3) Nombra dos caras, dos vértices y dos aristas de las siguientes figuras. ¿Sabrías decir cuál es la base y altura de la figura a? ¿Y de las figuras b y c?

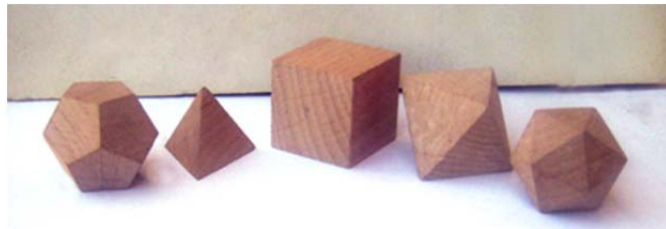


Anexo VIII.

Actividad de clase.

1.a) Fíjate en los objetos que muestra el profesor y nombra que tipo de sólido platónico es.

“dodecaedro”, “tetraedro”, “cubo”, “octaedro”, “icosaedro”.



1.b) Nombra en cada caso el polígono regular que forma todas sus caras.

1.c) Cuenta en cada caso sus caras, aristas y vértices y comprueba en todos los casos que el Teorema de Euler se cumple.

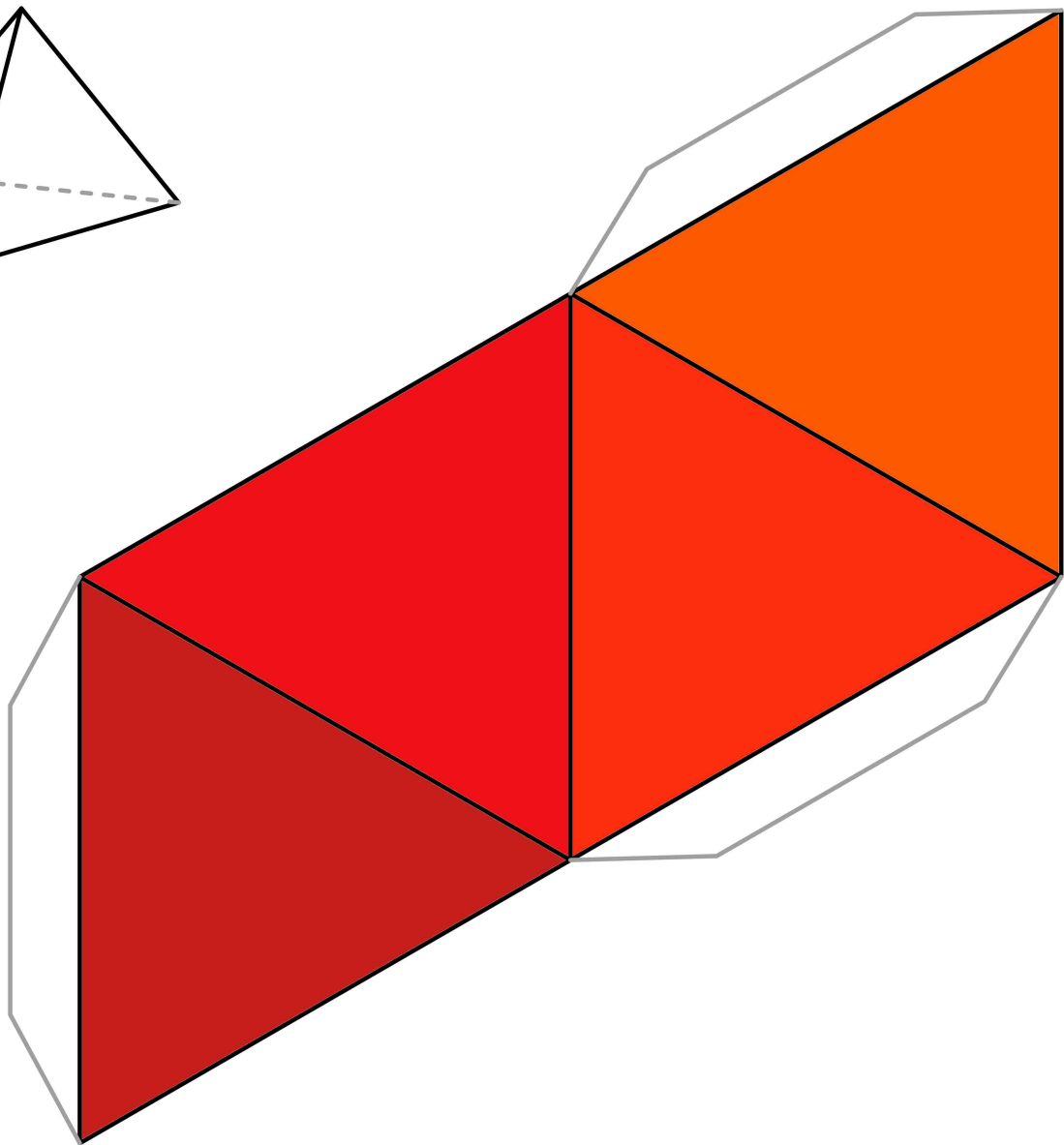
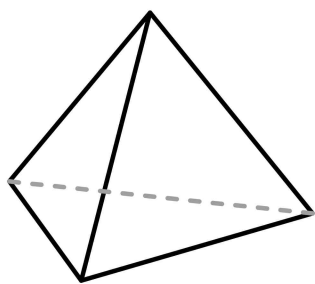
Anexo IX.

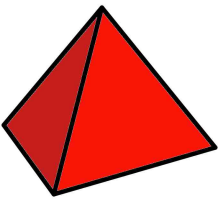
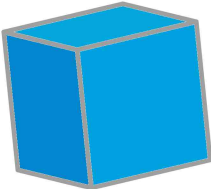
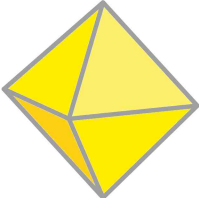
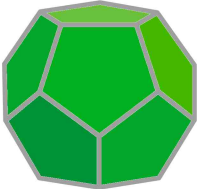
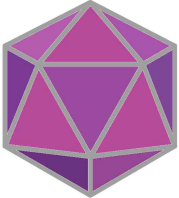
Actividad para casa: Recortables.

Construye cada uno de los 5 sólidos platónicos a partir de las 5 fotocopias **recortables**² que te proporciona el profesor, necesitarás tijeras y pegamento.

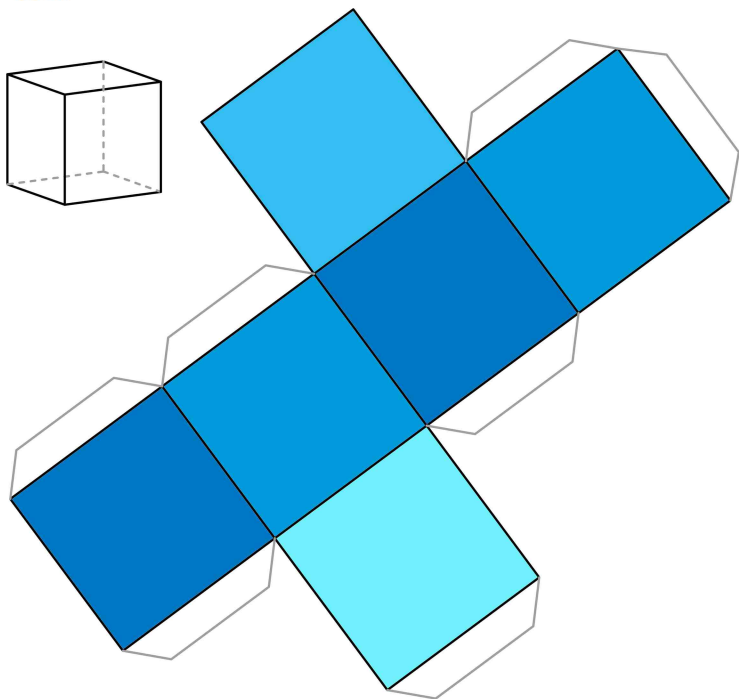
(2) Para la realización de este TFM en los Anexos de actividades recortables que vienen en 3 tomos de 5 fichas cada uno, se mostrará una ficha a tamaño natural y las demás en miniatura.

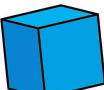
TETRAEDRO



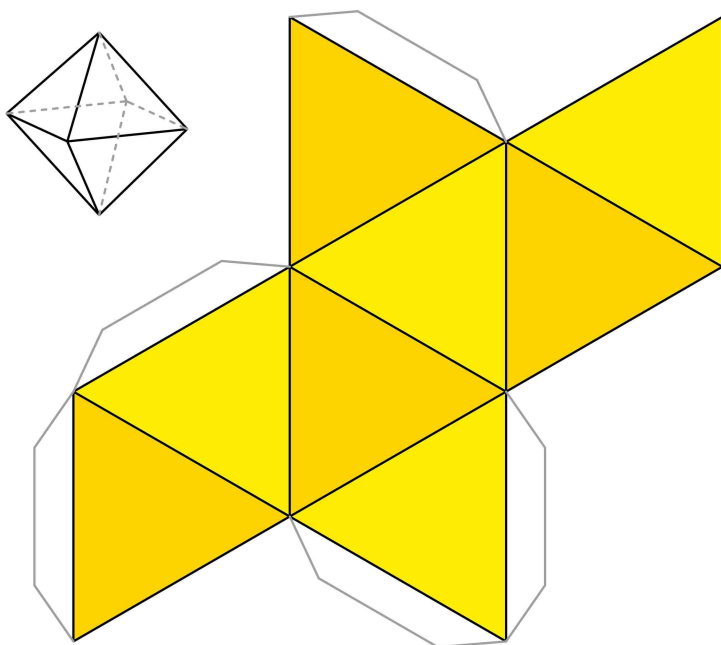
				
4 •	8 •	6 •	20 •	12 •
6 —	12 —	12 —	30 —	30 —
4 ▲	6 □	8 △	12 ⬡	20 △

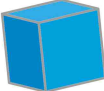
CUBO



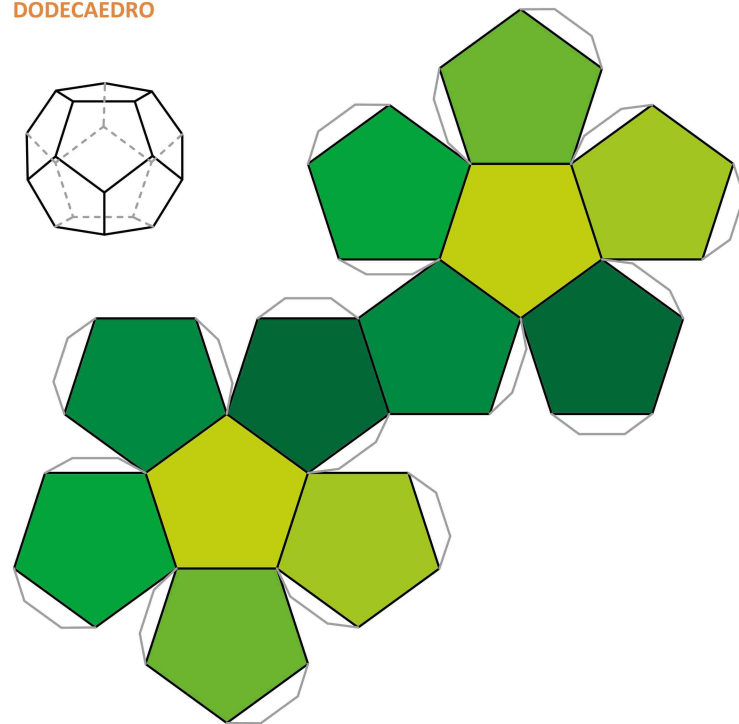
				
4 •	8 •	6 •	20 •	12 •
6 —	12 —	12 —	30 —	30 —
4 △	6 ■	8 △	12 ▱	20 △

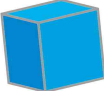
OCTAEDRO



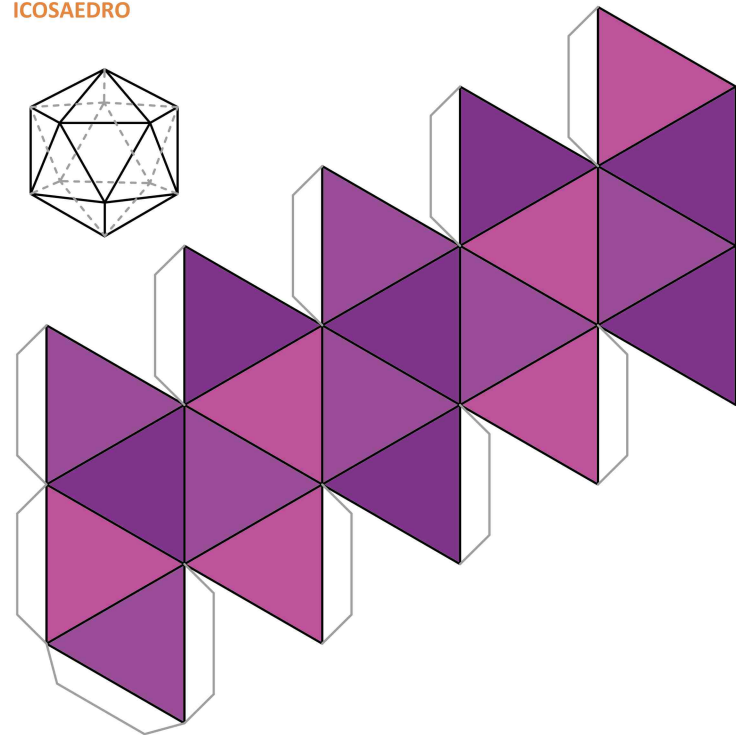
				
4 •	8 •	6 •	20 •	12 •
6 —	12 —	12 —	30 —	30 —
4 △	6 □	8 ▴	12 ▱	20 △

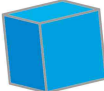
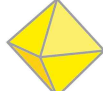
DODECAEDRO



				
4 •	8 •	6 •	20 •	12 •
6 —	12 —	12 —	30 —	30 —
4 △	6 □	8 △	12 ▱	20 △

ICOSAEDRO



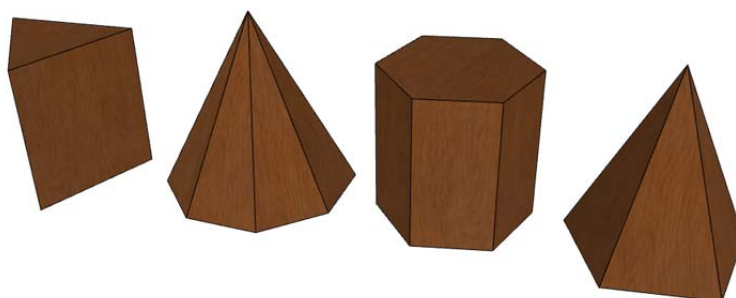
				
4 •	8 •	6 •	20 •	12 •
6 —	12 —	12 —	30 —	30 —
4 △	6 □	8 △	12 ▱	20 ▴

Anexo X.

Actividades de clase.

1.a) Fíjate en los objetos que muestra el profesor y nombra qué tipo de poliedro es.

“prisma triangular”, “pirámide octogonal”, “prisma hexagonal”, “pirámide pentagonal”.

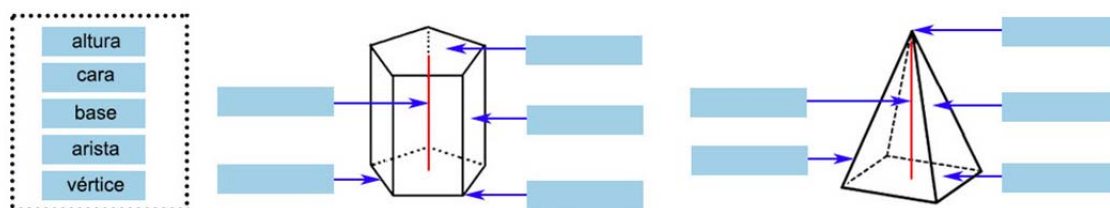


1.b) Nombra en cada caso el polígono regular de su base y el de sus caras laterales.

1.c) Cuenta en cada caso sus caras, aristas y vértices y comprueba en todos los casos que el Teorema de Euler se cumple.

2) Nombra ejemplos que se te ocurran sobre objetos de la vida real que posean las características de prismas y pirámides (al menos dos de cada y con base distinta).

3) Escribe los elementos en el lugar correspondiente.

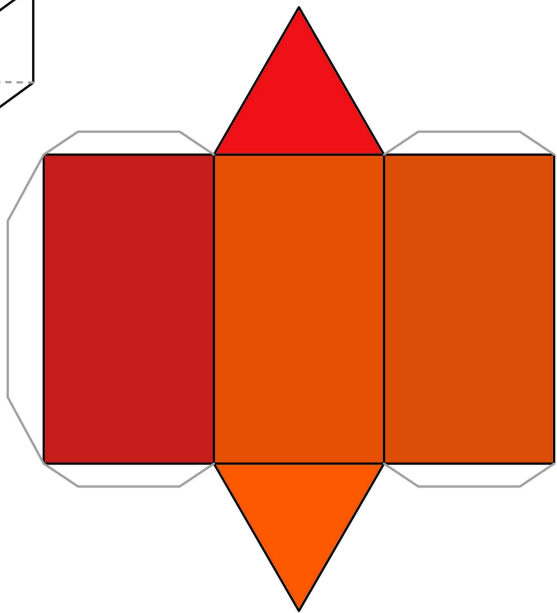
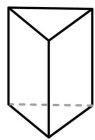


Anexo XI.

Actividad para casa: Recortables.

Construye prismas y pirámides a partir de las fotocopias **recortables**² que te proporciona el profesor, necesitarás tijeras y pegamento.

PRISMA TRIANGULAR





6 •
9 /
3 □
2 △



8 •
12 /
4 □
2 □



10 •
15 /
5 □
2 ▱

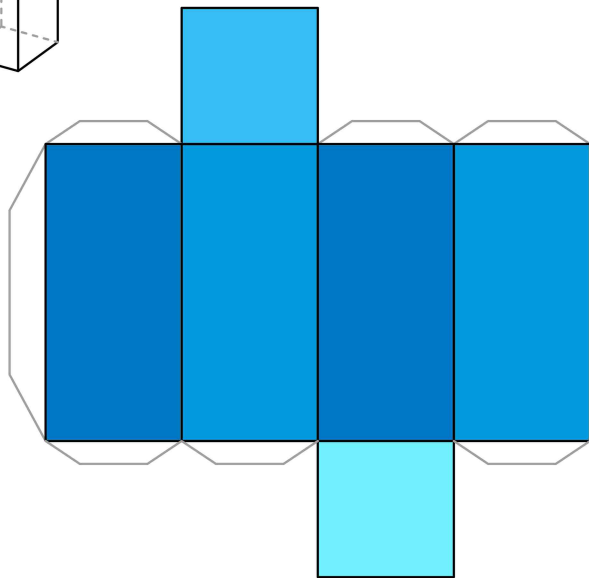
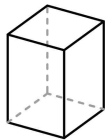


12 •
18 /
6 □
2 ▱



0 •
0 /
1 □
2 ○

PRISMA CUADRANGULAR





6 •
9 /
3 □
2 △



8 •
12 /
4 □
2 □



10 •
15 /
5 □
2 ▱

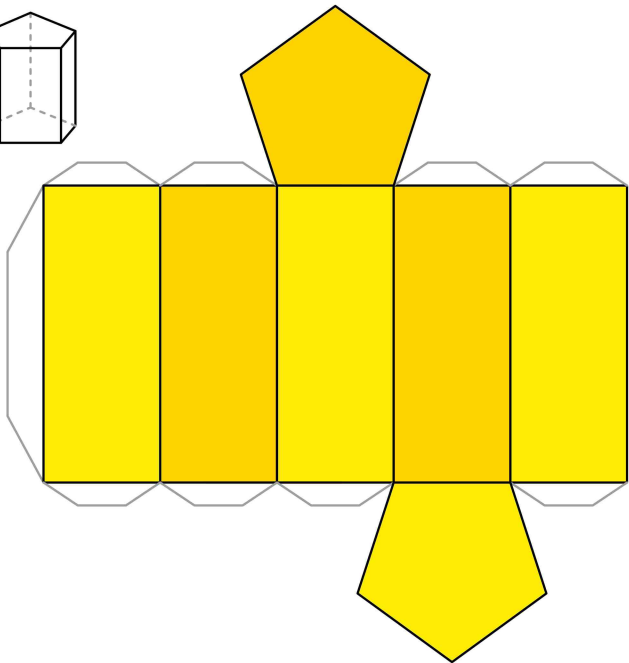
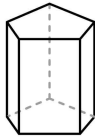


12 •
18 /
6 □
2 ▱



0 •
0 /
1 □
2 ○

PRISMA PENTAGONAL

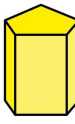




6 •
9 /
3 □
2 △



8 •
12 /
4 □
2 □



10 •
15 /
5 □
2 ▱

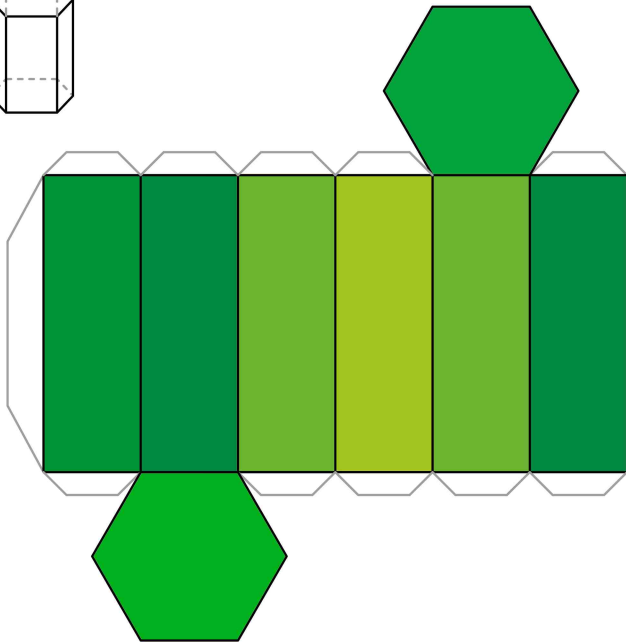
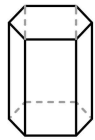


12 •
18 /
6 □
2 ▱



0 •
0 /
1 □
2 ○

PRISMA HEXAGONAL





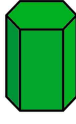
6 •
9 /
3 □
2 △



8 •
12 /
4 □
2 □



10 •
15 /
5 □
2 ▱

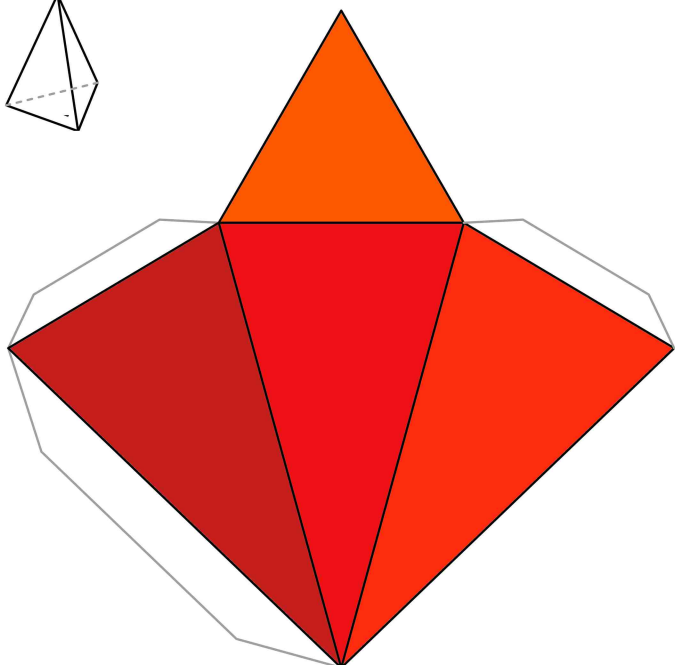
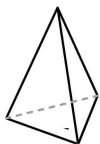


12 •
18 /
6 □
2 ▱



0 •
0 /
1 □
2 ○

PIRÁMIDE TRIANGULAR



4 •
6 —
3 ▲
1 ▲



5 •
8 —
4 △
1 □



6 •
10 —
5 △
1 ◡

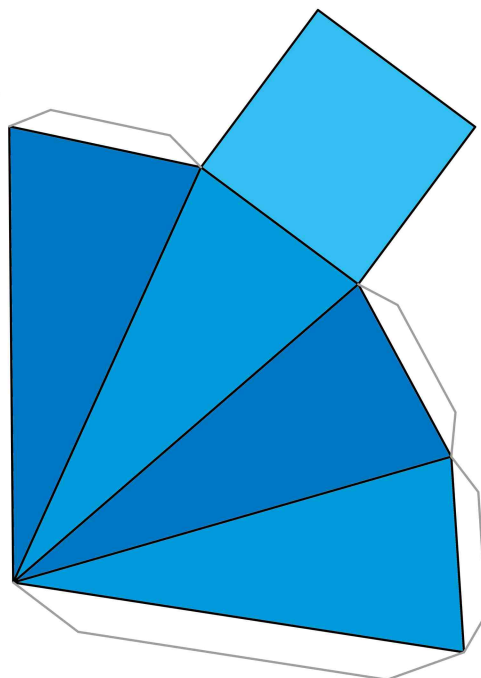
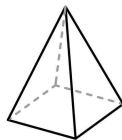


7 •
12 —
6 △
1 ◡



1 •
0 —
1 ▽
1 ○

PIRÁMIDE CUADRANGULAR



4 •
6 —
3 △
1 △



5 •
8 —
4 ▲
1 ■



6 •
10 —
5 △
1 ◡

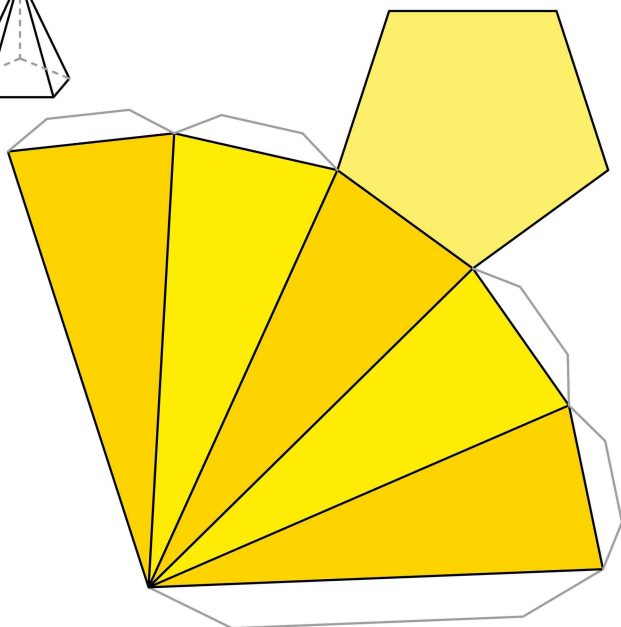


7 •
12 —
6 △
1 ◡



1 •
0 —
1 ▽
1 ○

PIRÁMIDE PENTAGONAL



4 •
6 —
3 △
1 △



5 •
8 —
4 △
1 □



6 •
10 —
5 ▲
1 ◡

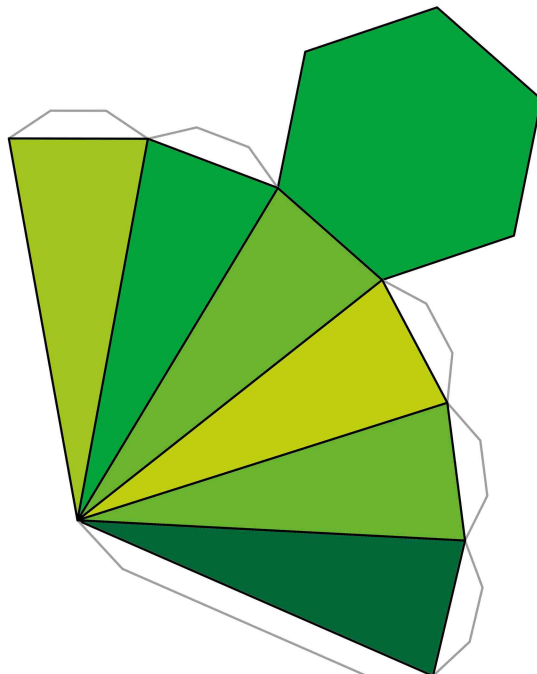
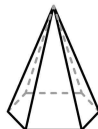


7 •
12 —
6 △
1 ◡



1 •
0 —
1 ▽
1 ○

PIRÁMIDE HEXAGONAL



4 •
6 —
3 △
1 △



5 •
8 —
4 △
1 □



6 •
10 —
5 △
1 ◡



7 •
12 —
6 ▲
1 ◡



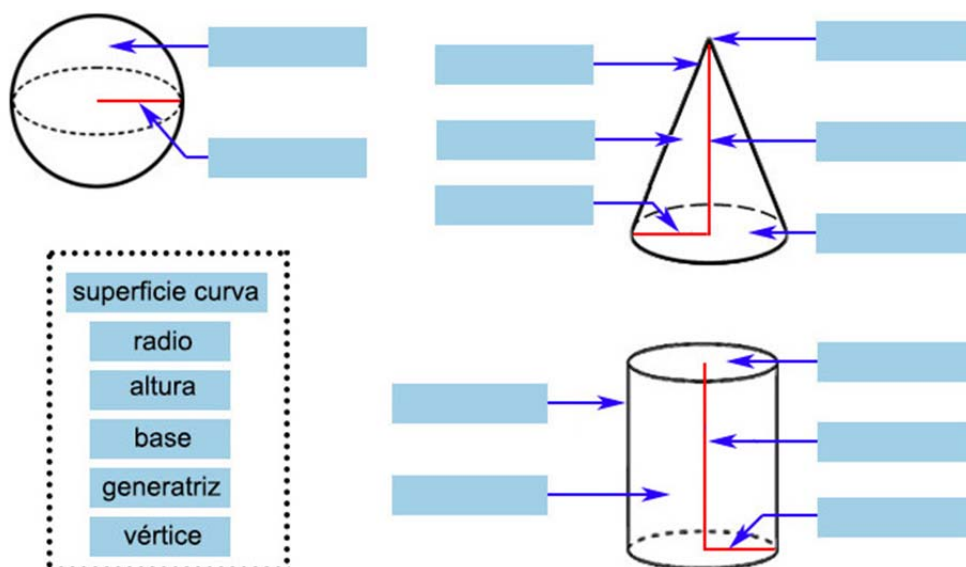
1 •
0 —
1 ▽
1 ○

Anexo XII.

Actividades de clase.

1) Nombra ejemplos que se te ocurran sobre objetos de la vida real que posean las características de los cilindros, los conos o las esferas (al menos dos de cada).

2) Escribe los elementos en el lugar correspondiente.

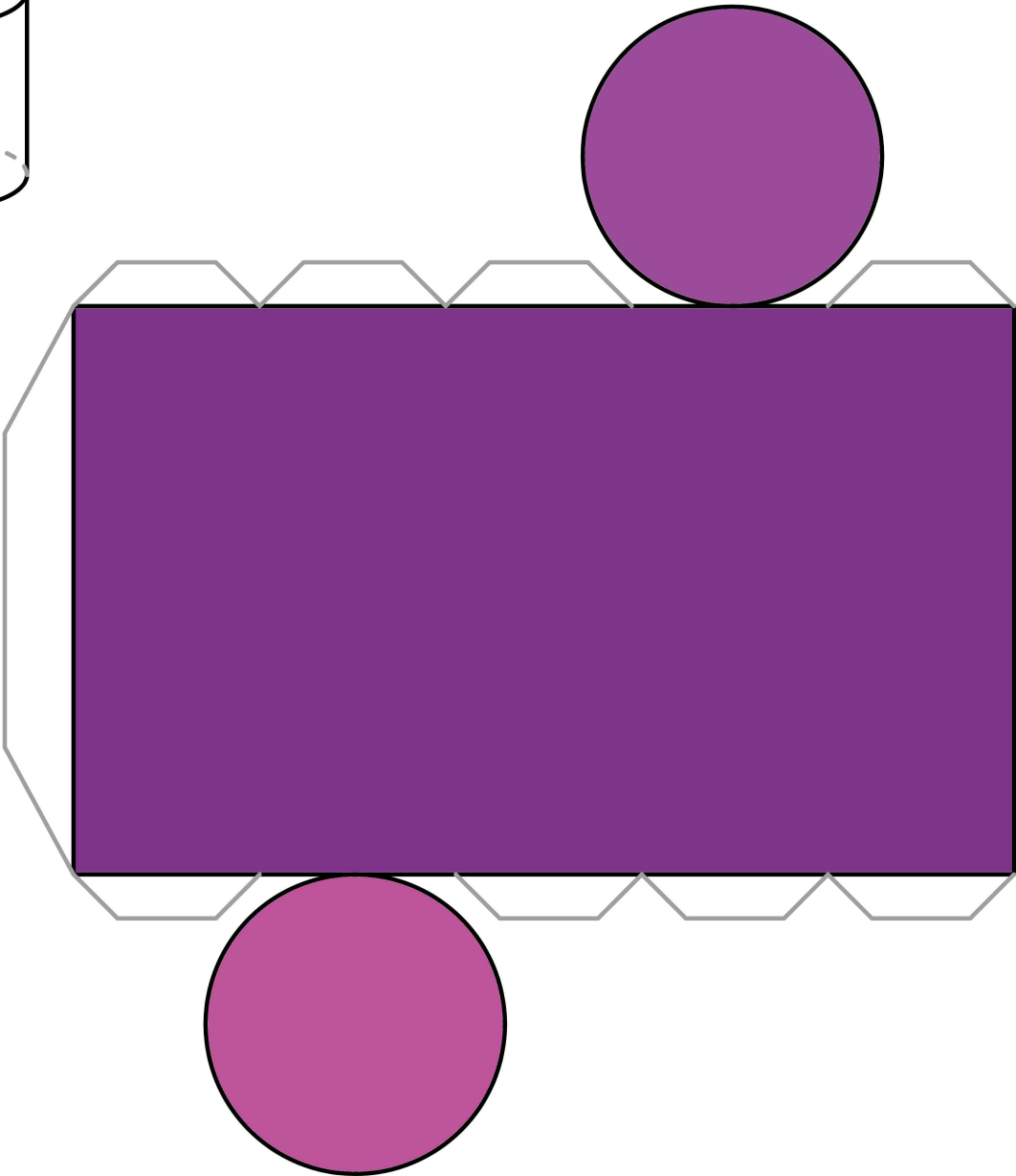
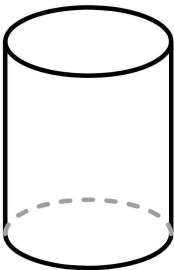


Anexo XIII.

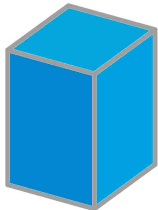
Actividad para clase: Recortables.

Construye un cilindro y un cono a partir de las fotocopias **recortables²** que te proporciona el profesor, necesitarás tijeras y pegamento.

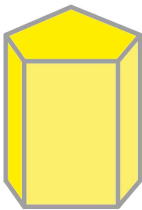
CILINDRO



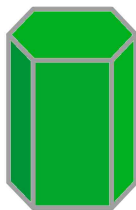
- 6 •
- 9 /
- 3 □
- 2 △



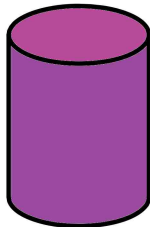
- 8 •
- 12 /
- 4 □
- 2 □



- 10 •
- 15 /
- 5 □
- 2 ▢

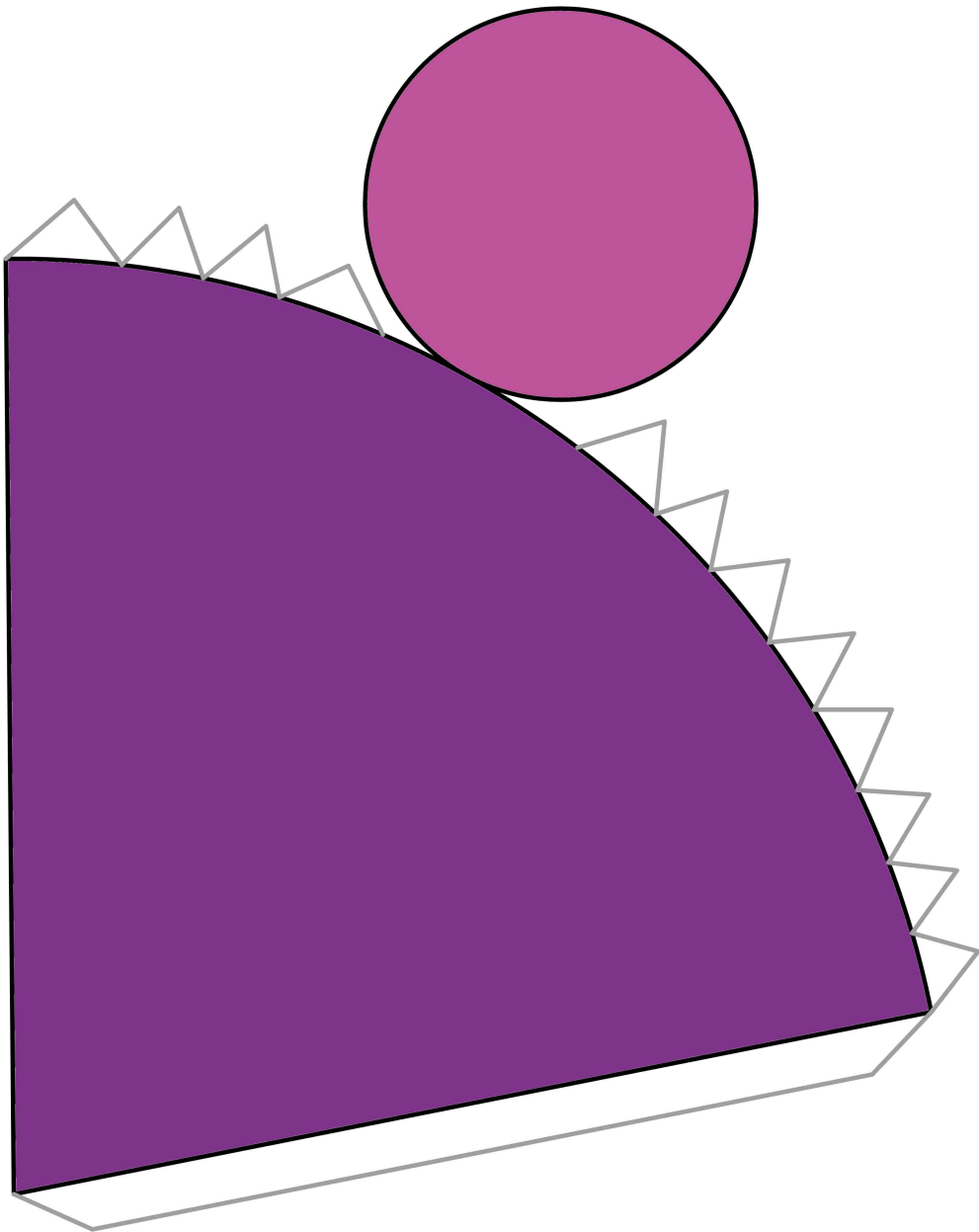
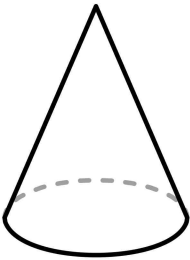


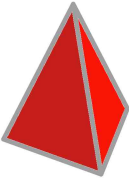
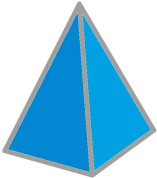
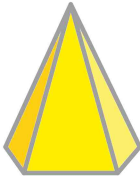
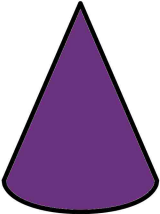
- 12 •
- 18 /
- 6 □
- 2 ▢



- 0 •
- 0 /
- 1 ■
- 2 ●

CONO



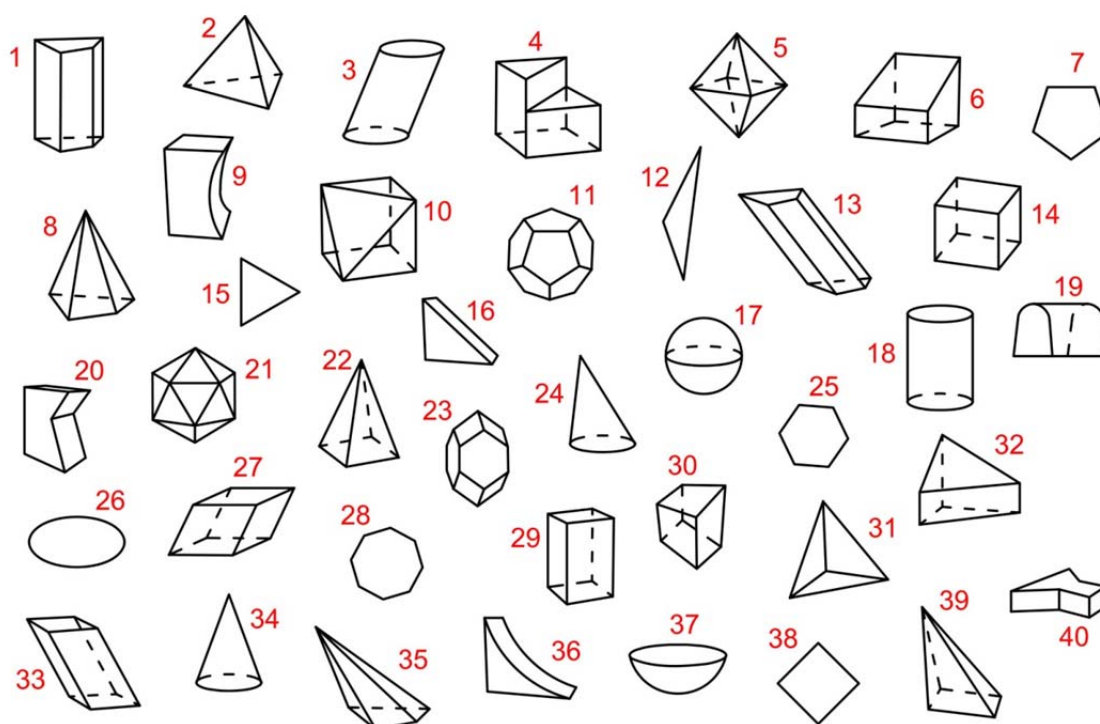
				
4 •	5 •	6 •	7 •	1 •
6 /	8 /	10 /	12 /	0 /
3 △	4 △	5 △	6 △	1 ▤
1 △	1 □	1 ⬡	1 ⬢	1 ●

Anexo XIV.

Prueba individual.

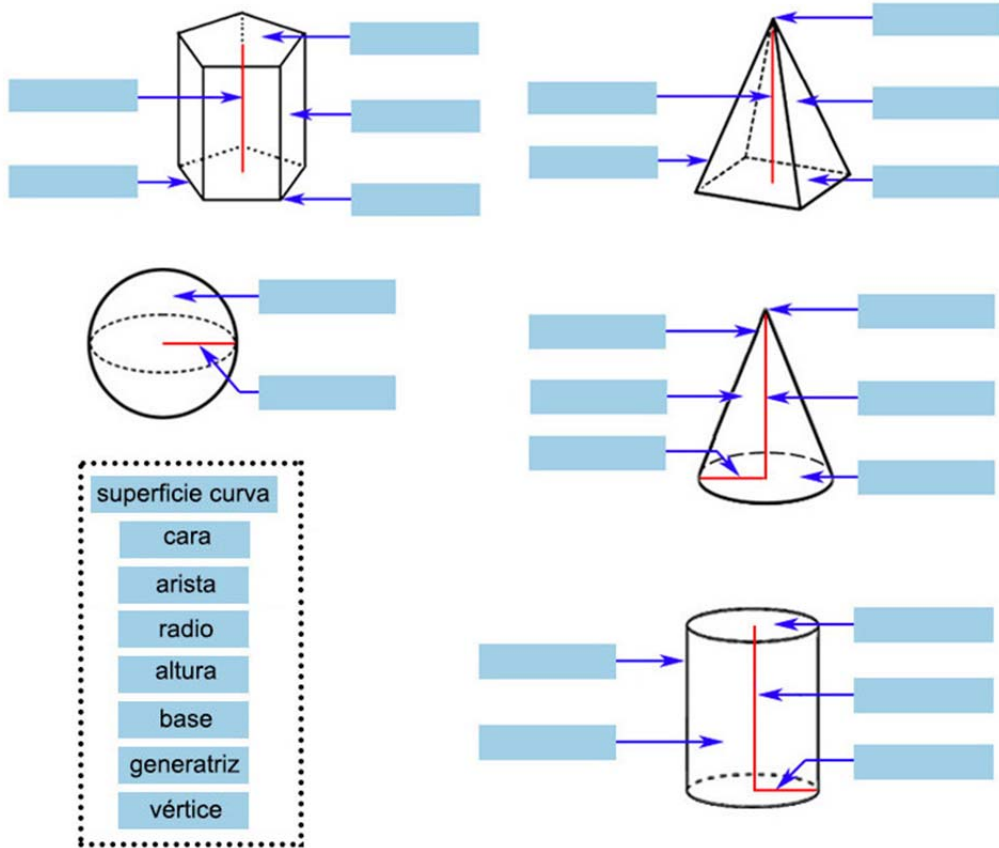
1) Explica la diferencia entre poliedro y no poliedro (cuerpo redondo) usando la definición de poliedro.

2) Dadas las siguientes figuras clasifica los cuerpos geométricos en la tabla dada.

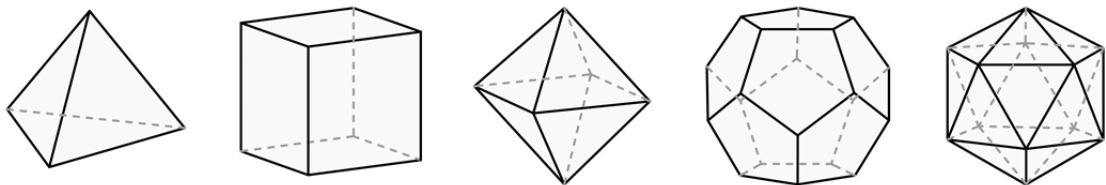


Poliedro	
No poliedro	
Cóncavo	
Convexo	
Recto	
Oblicuo	
Regular	
Irregular	

3) Escribe los elementos en el lugar correspondiente.



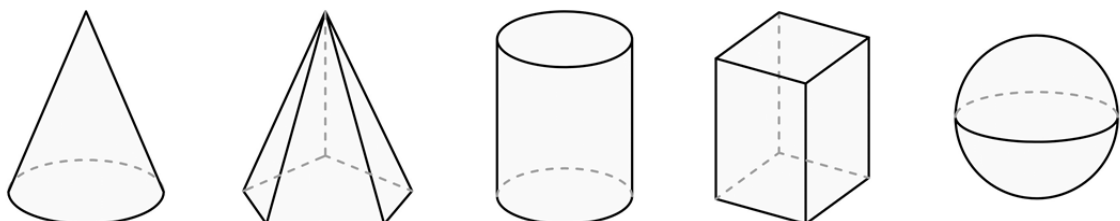
4.a) Fíjate en los siguientes objetos y nómbralos.



4.b) Nombra en cada caso el polígono regular que forma todas sus caras.

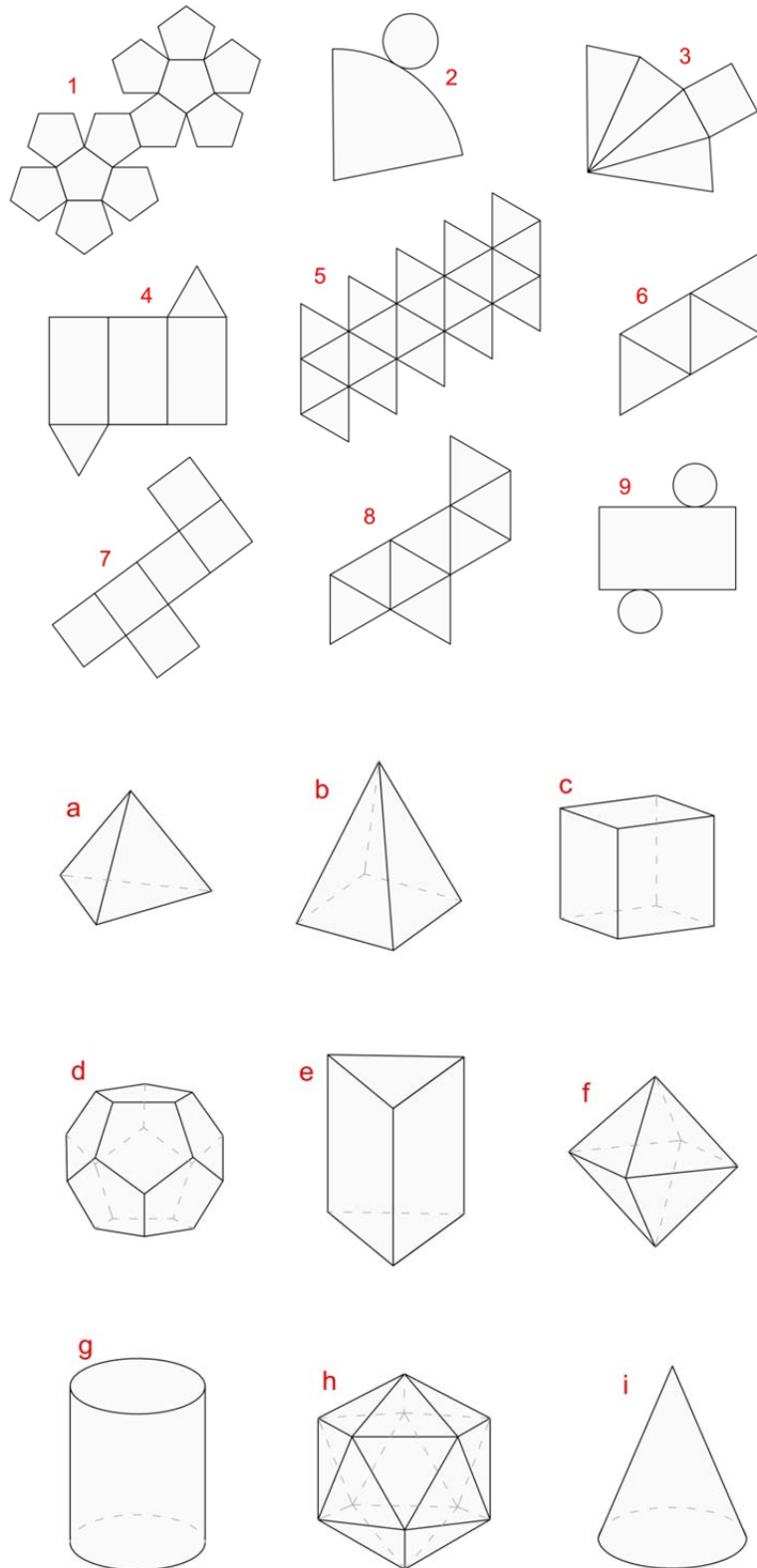
4.c) Escribe cuantas caras, aristas y vértices tienen y comprueba en un par de casos que el Teorema de Euler se cumple.

5.a) Fíjate en los siguientes objetos y nómbralos.



5.b) Escribe cuantas caras, aristas y vértices tienen y comprueba el Teorema de Euler en los casos que se puede aplicar.

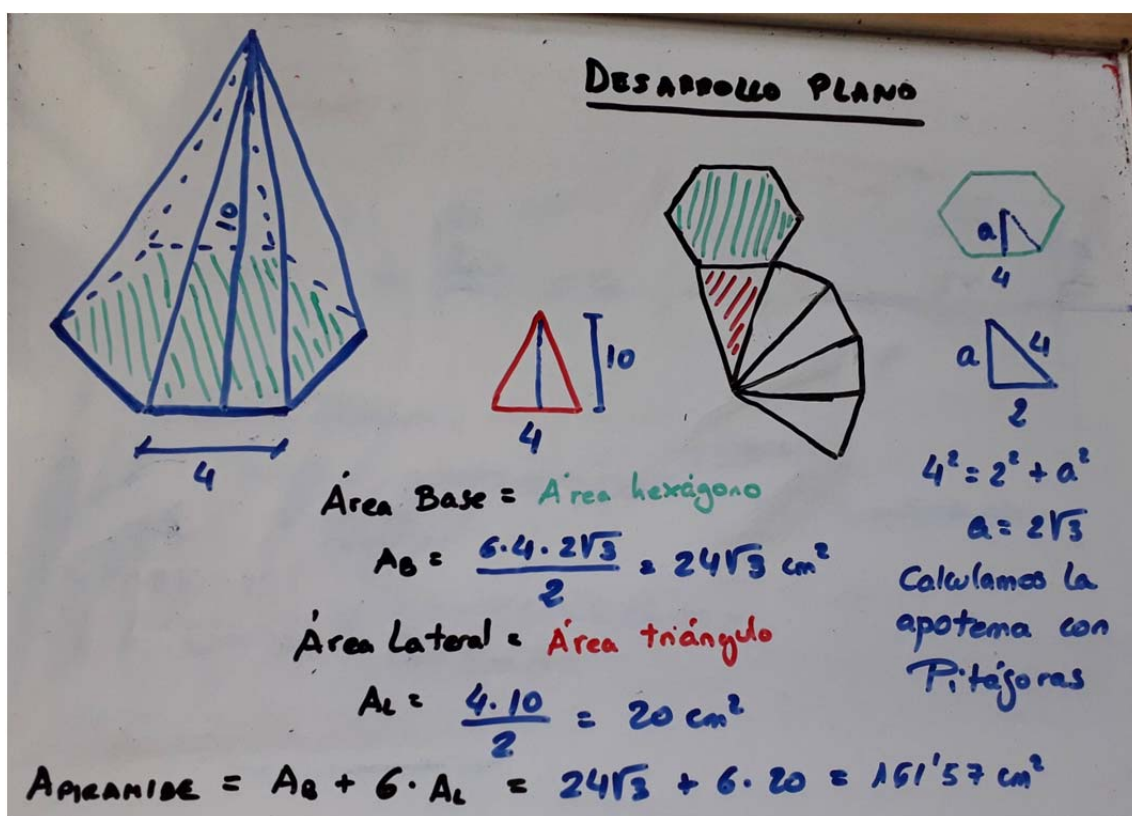
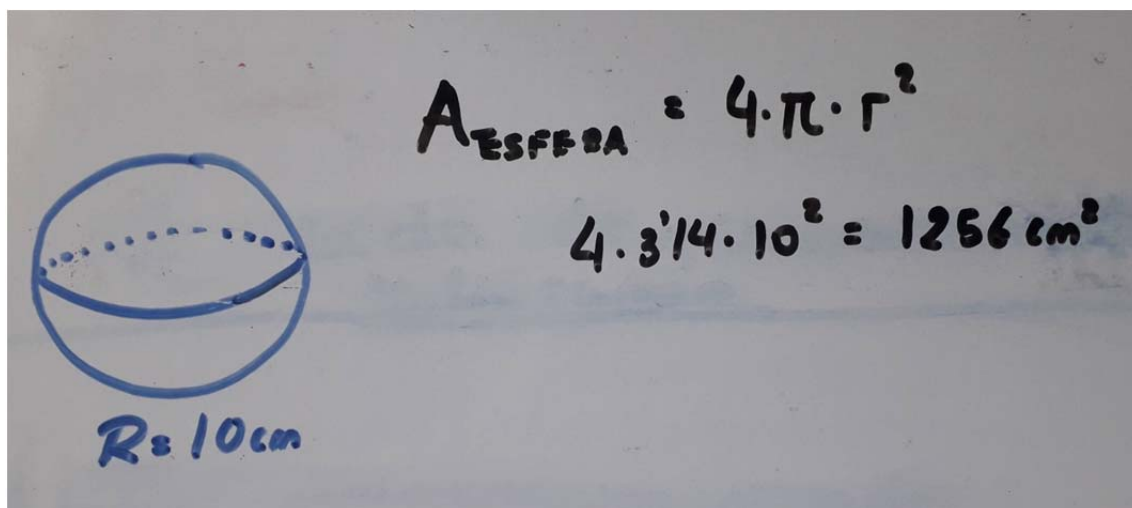
6) Relaciona las siguientes figuras (número con letra).

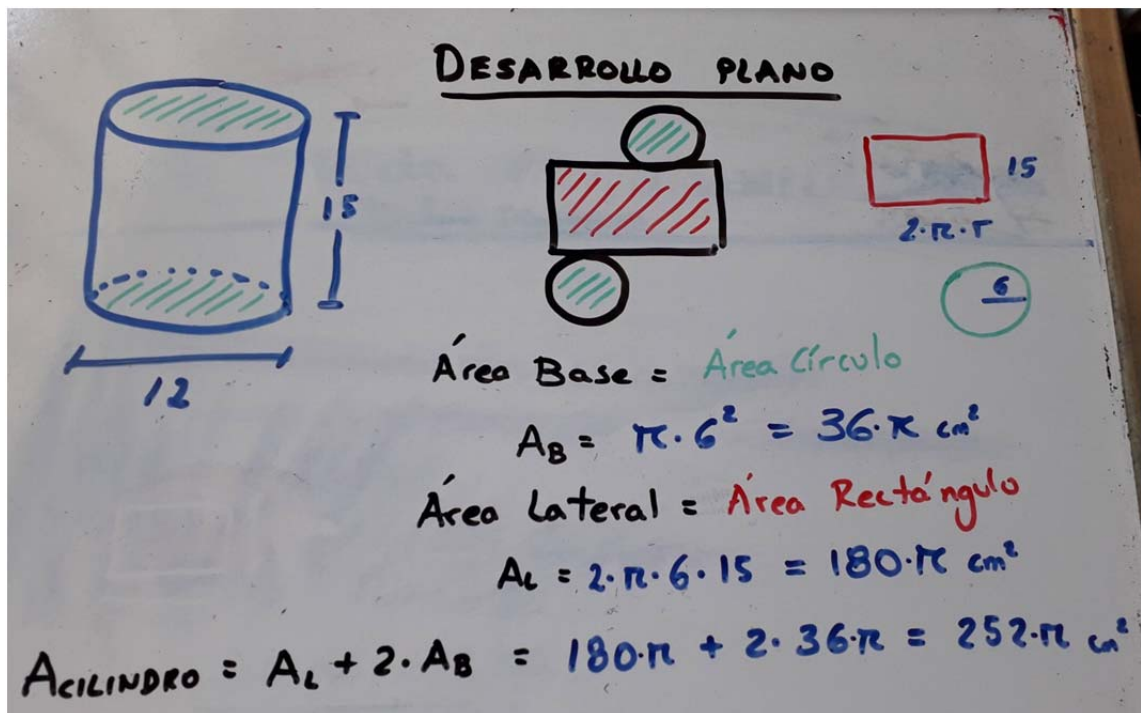


Anexo XV.

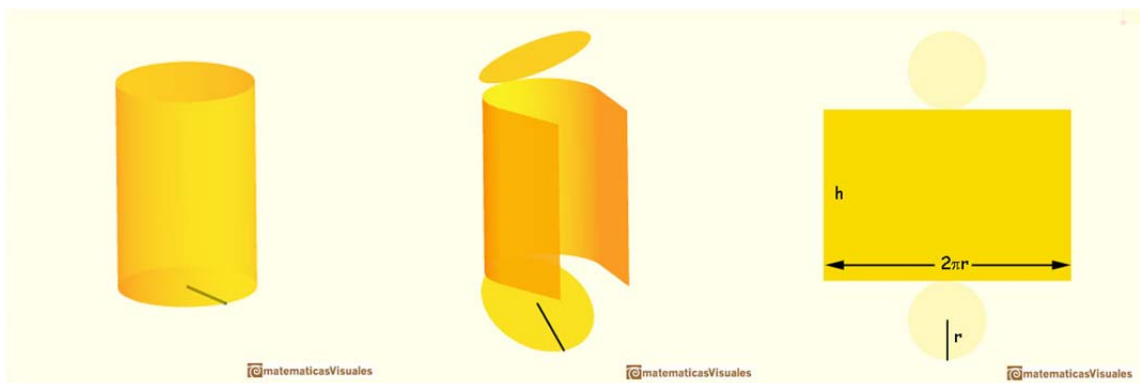
Ejemplo de clase.

En la pizarra se realizan ejemplos de cálculo de área total, en concreto una esfera, un cilindro (se calcula considerándolo como un prisma de base circular) y una pirámide de base hexagonal (el cono sería como una pirámide de base circular).



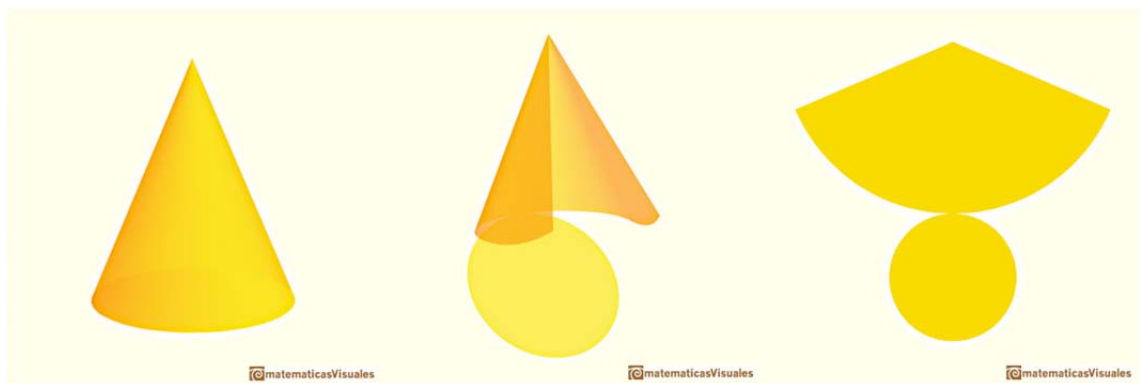


A la misma vez se proyectará un video del desarrollo plano de un cilindro en la página web de matematicasvisuales.com a través del siguiente enlace:



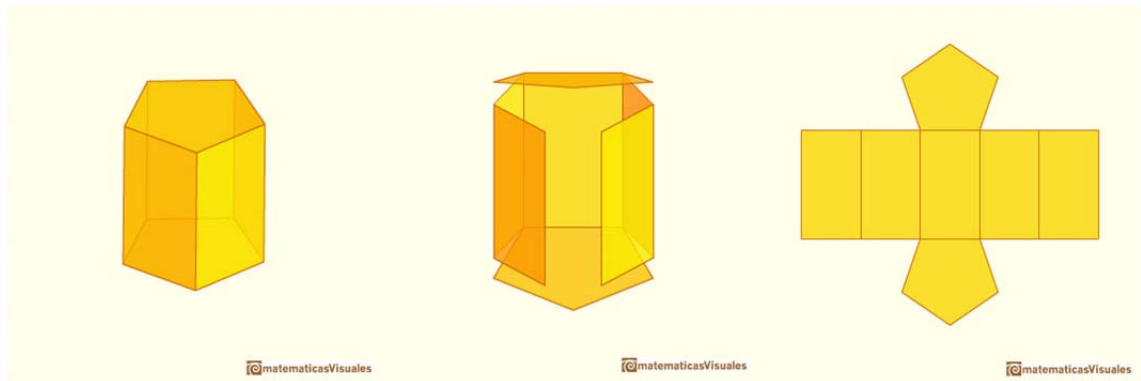
<http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/cylinder.html>

También se proyectará un video del desarrollo plano de un cono en la misma página web a través del siguiente enlace:



<http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/cone.html>

Por último se proyectará un video del desarrollo plano de un prisma de base pentagonal en la misma página web a través del siguiente enlace:



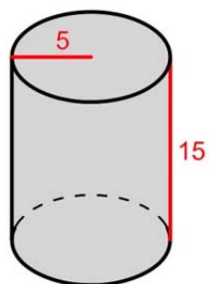
<http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/prismas.html>

Anexo XVI.

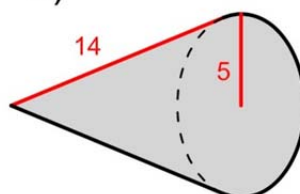
Actividad de clase.

1) Calcula el área total de las siguientes figuras cuyas bases son polígonos regulares.

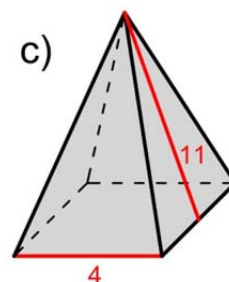
a)



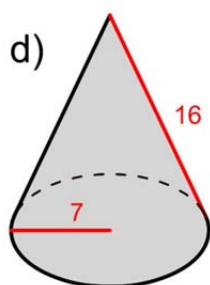
b)



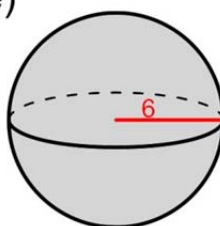
c)



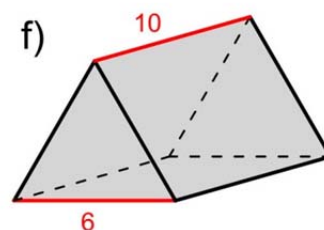
d)



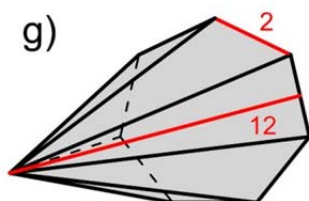
e)



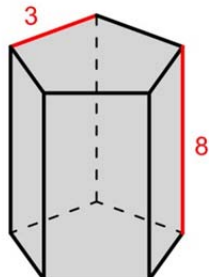
f)



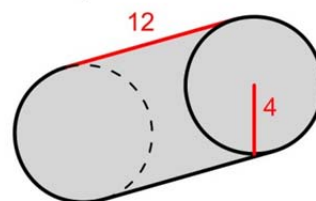
g)



h)



i)



Anexo XVII.

Actividad IBL.

Descubre la relación entre volúmenes mediante figuras 3D especiales para ser llenadas de agua.

- Volumen de un prisma y una pirámide con la misma base y altura.

Los alumnos deben coger un prisma y una pirámide con base igual, por ejemplo ambas serán cuadradas, estas figuras vienen fabricadas con la misma base y la misma altura. Ahora tienen que llenar de agua la pirámide y después vaciarla dentro del prisma, para conseguir llenar el prisma es necesario llenar la pirámide exactamente tres veces. Por lo tanto la conclusión de este experimento debe ser que el volumen del prisma es directamente proporcional al de la pirámide:

$$V_{prisma} = 3 \cdot V_{piramide}$$

$$V_{piramide} = \frac{1}{3} \cdot V_{prisma}$$

$$V_{piramide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot altura$$

- Volumen de un cilindro y una esfera con el mismo radio y altura igual al diámetro.

Los alumnos deben coger el cilindro y la esfera, estas figuras vienen fabricadas con el mismo radio y la altura del cilindro es el doble del radio. Los alumnos dividen en tres partes la altura creando unas muescas. Ahora tienen que llenar de agua el cilindro y después introducir la esfera de manera que por el principio de Arquímedes se va a desalojar el volumen de agua equivalente al volumen de la esfera. Una vez realizado esto se debe observar que el agua se encuentra en la primera muesca. Por lo tanto la conclusión de este experimento debe ser que el volumen de la esfera es dos tercios del volumen del cilindro:

$$V_{esfera} = \frac{2}{3} \cdot V_{cilindro}$$

$$V_{esfera} = \frac{2}{3} \cdot A_{base} \cdot altura$$

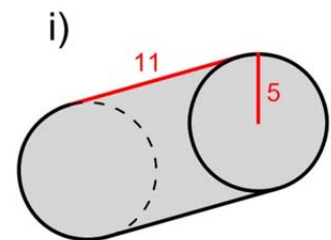
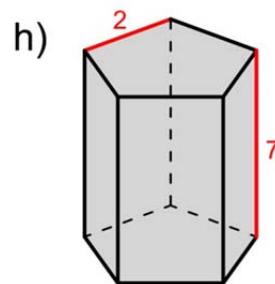
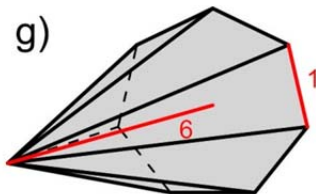
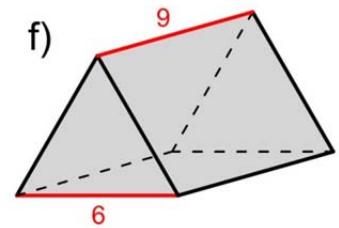
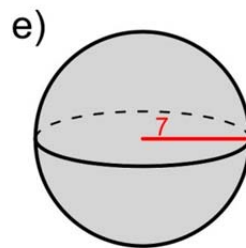
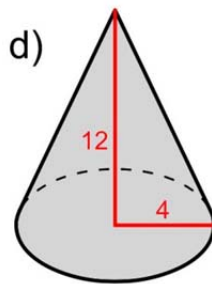
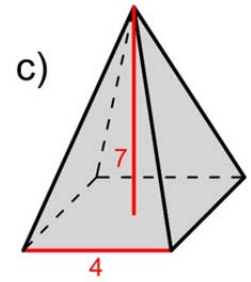
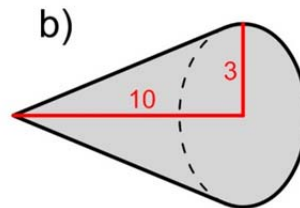
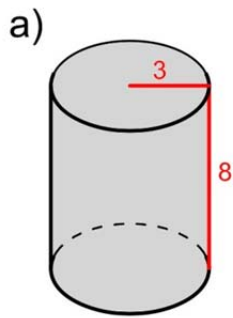
$$V_{esfera} = \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 2r$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

Anexo XVIII.

Actividad de clase.

1) Calcula el volumen de las siguientes figuras cuyas bases son polígonos regulares.



Anexo XIX.

Problemas.

1) Una fuente de 4m x 2m se ha cubierto con una capa de hielo de 1.5cm de espesor. ¿Cuántos litros de hielo hay?

2) Cuánto cartón es necesario para fabricar un tetrabrik de litro con base cuadrada.

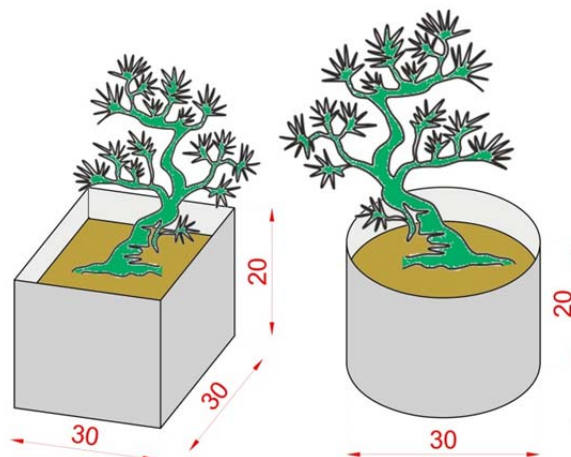
3) Averigua cuanto mide la superficie y el volumen del planeta Marte sabiendo que su diámetro es 6795km.

4) Vamos a suponer que la Luna y la Tierra son esferas perfectas de radio 1740km y 6370km respectivamente, calcula cuántas veces es mayor el volumen de la Tierra que el de la Luna.

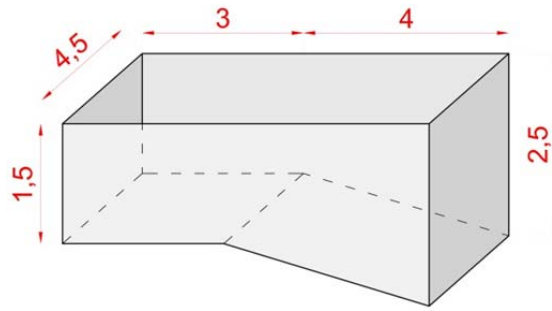
5) Tenemos un balón de baloncesto con un diámetro de 20cm y una pelota de tenis con radio 4cm. ¿Cuántas veces es menor la superficie de la pelota que la del balón?

6) Cual será el volumen de una lata de tomate si el papel que la rodea mide 10cm de base y 5cm de altura.

7) Mi madre quiere plantar un bonsái y me manda a comprar una maceta, en la tienda tienen dos modelos como los del dibujo ¿En cuál entra menos tierra?

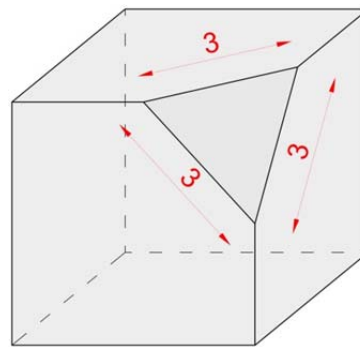


8) A continuación se dibuja el croquis de mi piscina. Elabora un desarrollo plano de la piscina y calcula el precio por pintarla si el pintor me cobra a 6 € el metro cuadrado.

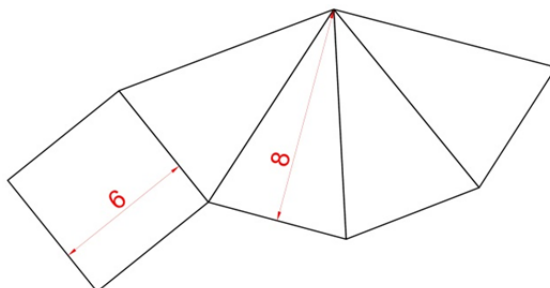


9) Tenemos cuatro pelotas de tenis en un bote cilíndrico, si se encuentran perfectamente ajustadas. ¿Sabrías decir qué proporción del volumen del cilindro está ocupado por las pelotas de tenis?

10) Damos un corte de 3cm de arista en uno de los vértices de un cubo de lado 10cm. ¿Cuál es la superficie de la figura que se obtiene?

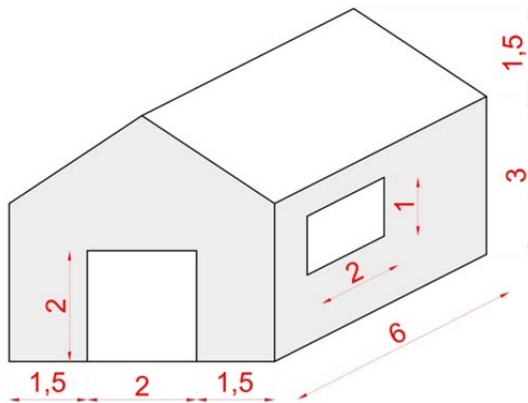


11) Al calcular el volumen de la pirámide que se construye a partir del siguiente desarrollo plano, Juan ha cometido un error ¿Puedes indicar cuál ha sido su error?

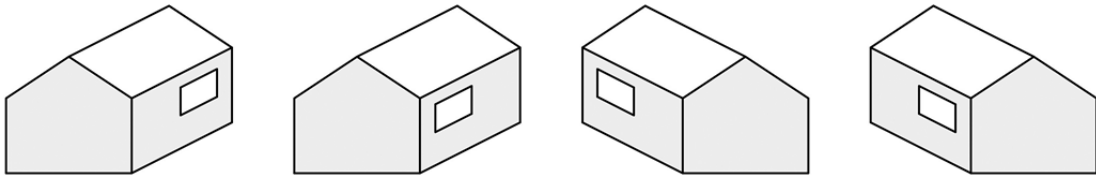


$$V_{pirámide} = \frac{A_{base} \cdot altura}{3} = \frac{6^2 \cdot 8}{3} = 96 u^3$$

12) Una fábrica de casas prefabricadas construye el siguiente modelo de madera con una sola puerta y una sola ventana.



Sabrías decir cuál es el modelo que se corresponde con el fabricado entre las siguientes ilustraciones vistas desde la parte posterior.

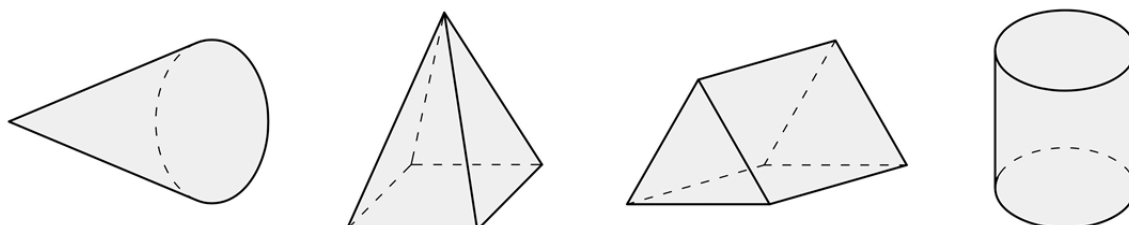


Que cantidad de madera (en m^2) se necesita para construir las paredes exteriores de la casa.

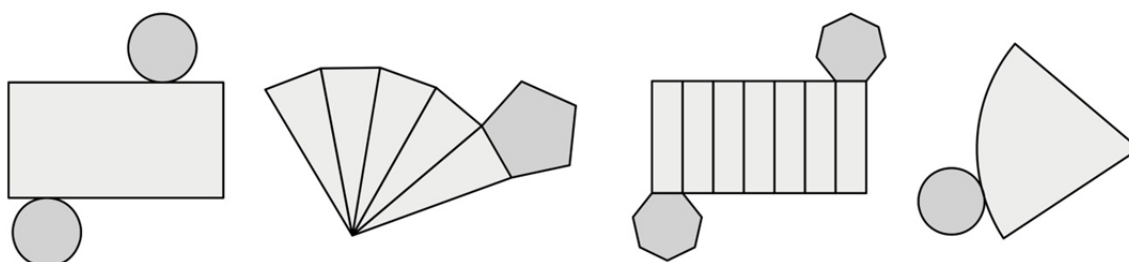
Anexo XX.

Prueba individual.

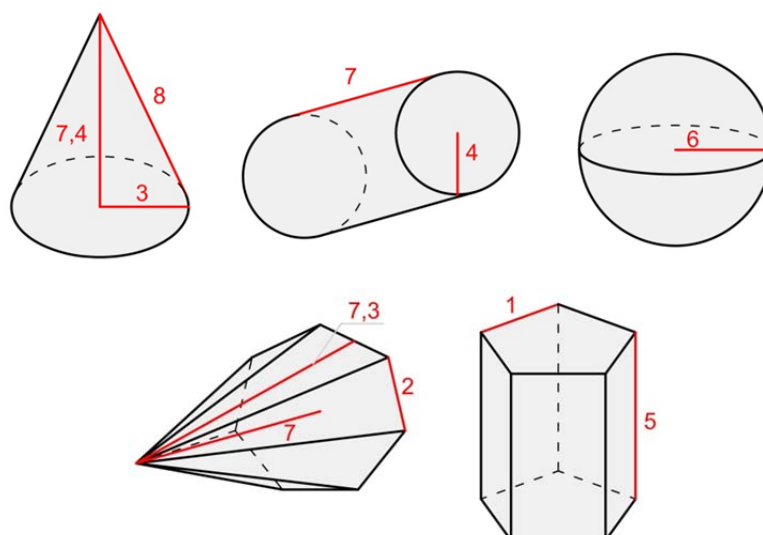
1) Dibuja el desarrollo plano de las siguientes figuras:



2) Identifica los siguientes poliedros a partir de sus desarrollos planos:



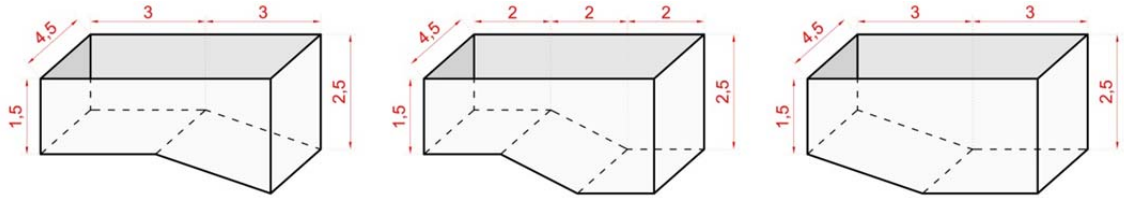
3) Calcula el área de las siguientes figuras:



4) Calcula el volumen de las figuras de la pregunta 3.

5) Resuelve el siguiente problema expresando el proceso seguido y razonando la respuesta:

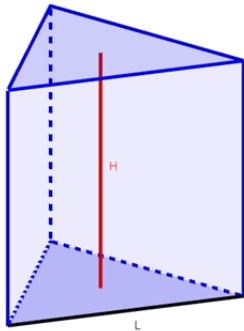
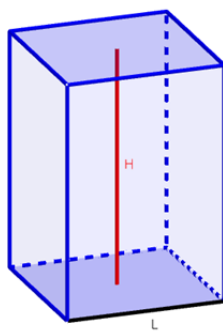
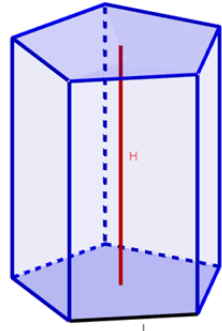
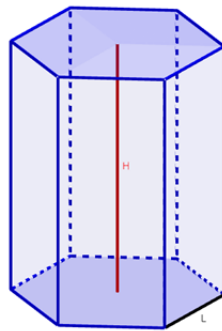
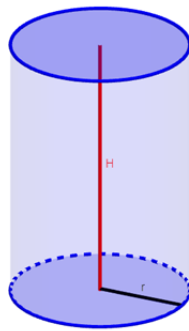
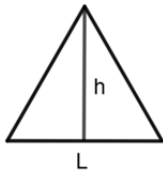
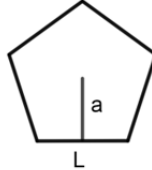
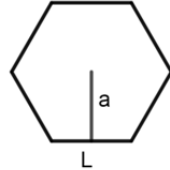
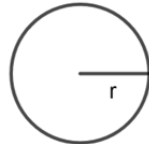
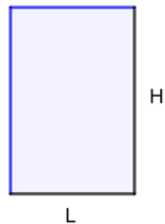
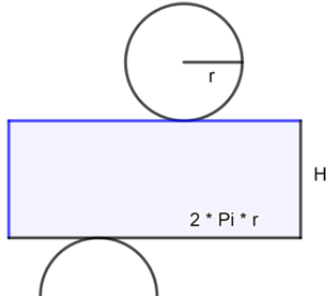
“Me estoy construyendo una casa y el arquitecto me enseña varios modelos para la piscina. Teniendo en cuenta que me cobra a $100\text{€}/\text{m}^2$ construido ¿Qué modelo debería elegir para que me salga más económico?”



6) Resuelve el siguiente problema expresando el proceso seguido y razonando la respuesta:

“He terminado de construir la piscina de la pregunta 5 y ahora hay que llenarla de agua todos los años. Sabiendo que el precio del agua está en $10\text{€}/\text{m}^3$ ¿Qué modelo crees que debería haber elegido para que me saliera más económico en este caso?”

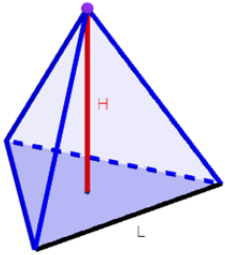
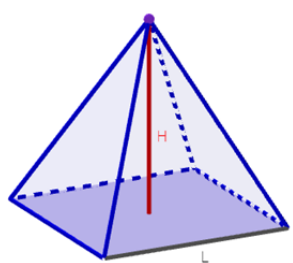
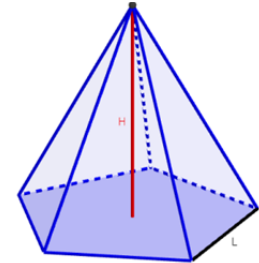
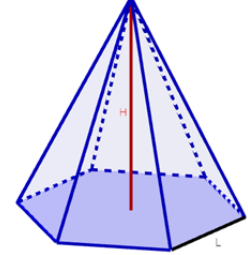
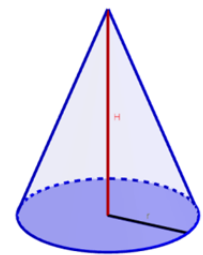
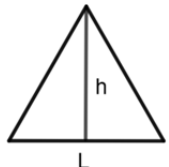
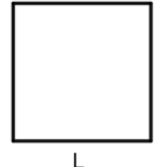
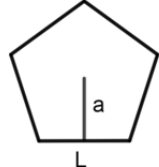
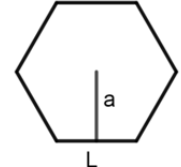
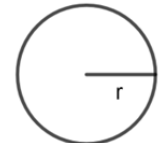
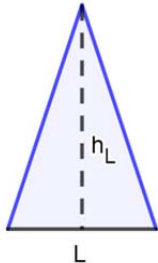
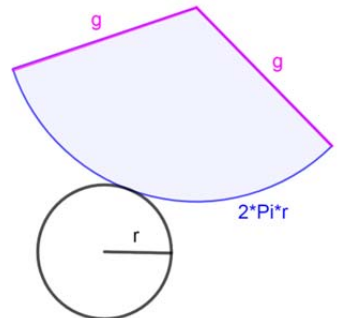
Anexo XXI.
Resumen de la unidad.

	PRISMA				CILINDRO
					
BASE	triángulo	cuadrado	pentágono	hexágono	Círculo
Numero de lados	3	4	5	6	----
Dibujo					
Perímetro	$P=3*L$	$P=4*L$	$P=5*L$	$P=6*L$	$P=2*\pi*r$
Área Base	$A_B = \frac{L * h}{2}$	$A_B = L^2$	$A_B = \frac{P * a}{2}$		$A_B = \pi * r^2$
FIGURA LATERAL	rectángulo				rectángulo
Dibujo					
Área Lateral	$A_L = L * H$				$A_L = 2 * \pi * r * H$

Volumen = $A_B * H$

Área Total = $2 * A_B + (\text{número de lados}) * A_L$

Área Total = $2 * A_B + A_L$

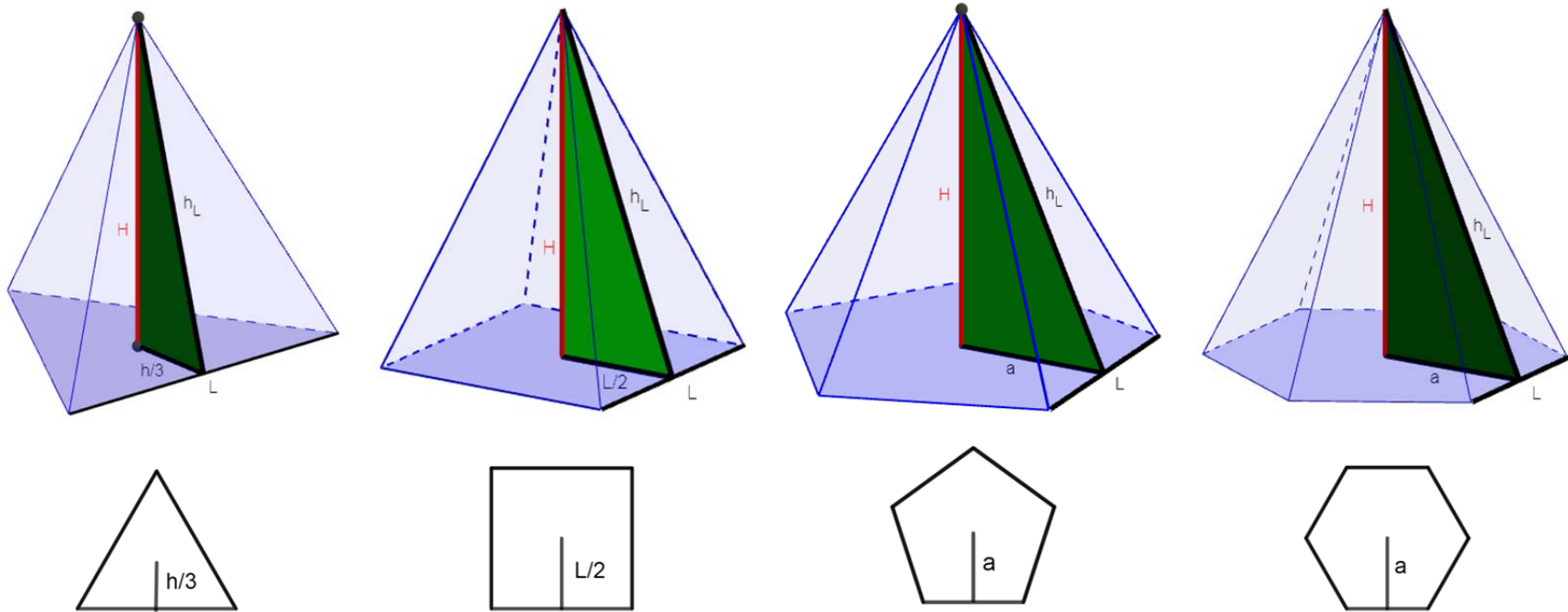
	PIRÁMIDE				CONO
					
BASE					
Numero de lados	3	4	5	6	----
Dibujo					
Perímetro	$P=3*L$	$P=4*L$	$P=5*L$	$P=6*L$	$P=2*\pi*r$
Área Base	$A_B = \frac{L * h}{2}$	$A_B = L^2$	$A_B = \frac{P * a}{2}$		$A_B = \pi * r^2$
FIGURA LATERAL	triángulo				sector circular
Dibujo					
Área Lateral	$A_L = \frac{L * h_L}{2}$				$A_L = r * \pi * g$

Volumen = $\frac{1}{3} * A_B * H$

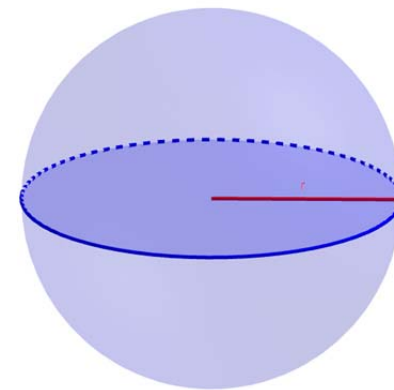
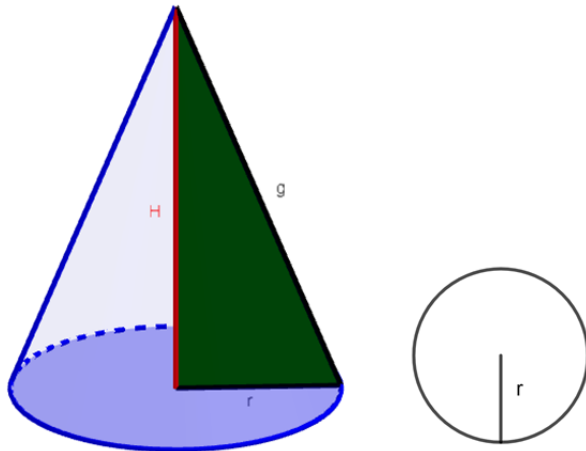
Área Total = $A_B + (\text{número de lados}) * A_L$

Área Total = $A_B + A_L$

Cuando no nos dan la *altura lateral* " h_L " tenemos que calcularla mediante teorema de Pitágoras.



Cuando no nos dan la *generatriz* " g " tenemos que calcularla con Pitágoras.



ESFERA

Área Total = $4 * \pi * r^2$

Volumen = $\frac{4}{3} * \pi * r^3$

Anexo XXII.

Examen: Yincana geométrica.

YINCANA GEOMÉTRICA DEL PIRATA POLIEDRO

NOMBRE GRUPO: _____

FECHA: _____

CURSO: 2º ESO _____

COMPONENTES DEL GRUPO:

Coordinador:.....

Secretario:.....

Intendente:.....

Informático:.....

Manipulador:.....

Como ayuda para repartir los distintos roles de los componentes del grupo debéis recordar que el papel del coordinador es el de supervisión y asignación de las distintas tareas. El secretario debe ir rellenando esta ficha y encargarse de custodiarla hasta que sea entregada al final de la tarea. El intendente es el encargado de llevarse el libro de texto y comunicarse con el profesor para cualquier posible duda surgida en el proceso de elaboración. El informático debe llevar el móvil con batería suficiente para posibles consultas. Finalmente, el manipulador es el encargado de manipular todo el material que se facilite llevando guantes y gel hidro-alcohólico y desinfectando dicho material previamente y posteriormente a su uso.

El grupo debe consensuar qué componente realiza cada tarea, excepto el coordinador y el secretario que ya están previamente elegidos.

Cada grupo deberá traer el siguiente material:

- Un teléfono móvil tipo Smartphone.
- Un libro de texto.
- Una regla.
- Algo para escribir (lápiz, goma, bolígrafo...).
- Una barra de pegamento.
- Unas tijeras.
- Una calculadora.

PRUEBA 1

COMIENZO EN LA PISTA DE BALONCESTO

La reina Daenerys Prismarian no solo valora a los hombres sabios. Se da cuenta de que quien quiera el tesoro tiene que ser también un hombre de acción. Por eso, ha dejado encargado a sus ayudantes que preparen una prueba que valore esta cualidad en los candidatos a conseguir el tesoro. La prueba consistirá en tener que calcular el volumen de **dos** figuras geométricas y el área de una de ellas. Los ayudantes han dispuesto dos objetos para ello. ¿Estarán los candidatos lo suficientemente preparados para realizar esta tarea? Esperemos que la prueba les salga **redonda** y sea **el pilar en el que se base** su triunfo, lo que les permitirá pasar a la siguiente fase.

	VOLUMEN	ÁREA
OBJETO 1 (Balón)		
OBJETO 2 (Pilar)		-----

EVALUACIÓN DE LA PRUEBA			
HORA DE FINALIZACIÓN	 PELIGRO PIRATA	 PIRATA NEUTRO	 PIRATA CONTENTO

PISTA PARA FASE 2

Los piratas realizan sus **actos** sin demora. No pueden descansar tras la medida de un balón. Puede que la siguiente pista esté ahora bien escondida en el interior de un gran **salón**.

PRUEBA 2

EL SALÓN DE ACTOS

Esta noche se da una fiesta en honor de la reina, y ya está todo preparado. En esta ocasión la prueba consiste en calcular el área de una figura geométrica. El objeto en cuestión sirve para brindar en esta celebración, si os gusta el licor de mora pasaréis a la siguiente fase sin demora.

	ÁREA TOTAL
OBJETO	

EVALUACIÓN DE LA PRUEBA			
HORA DE FINALIZACIÓN	 PELIGRO PIRATA	 PIRATA NEUTRO	 PIRATA CONTENTO

PISTA PARA FASE 3

Donde el pirata juega al balón encontraréis el tesoro de Cristóbal Colón.

PRUEBA 3

LAS INSTALACIONES DEPORTIVAS, PISTA DE FÚTBOL.

Muy bien grumetes, está claro que sois buenos superando adversidades, pero a continuación tendréis que realizar una prueba que solo un gran pirata de la orden de “Poliedry Jones” sería capaz de superar. Debéis calcular la diagonal de una de estas porterías con la ayuda de un metro, y solo os impongo una CONDICIÓN: no podéis medirla directamente.

Ayuda: Si no se te ocurre cómo, “*pinta sin n unas gorras con una sola r*”

EVALUACIÓN DE LA PRUEBA			
HORA DE FINALIZACIÓN	 PELIGRO PIRATA	 PIRATA NEUTRO	 PIRATA CONTENTO

PISTA PARA FASE 4

La siguiente prueba se encuentra en el aula donde podemos encontrar muchos ortoedros con pantalla. Si no eres un pirata cabeza hueca sabrás que se encuentra al lado de la biblioteca.

PRUEBA 4

AULA DE TECNOLOGÍA.

Habéis vivido una “aventura” tipo “The Goonies” (historia de Steven Spielberg llevada a película en 1985). En una escena de la misma, uno de los protagonistas que, junto con el resto, intenta encontrar un tesoro con la ayuda de un mapa lee en el mismo: “El rufián que intente descifrar el contenido de este mapa, sufrirá la más terrible de las muertes”.

No es vuestro caso, ya que continuareis con vida, pero sí debéis ayudaros para descifrar este acertijo con el mapa:

- ¿Qué figura geométrica surge al unir los puntos dados por la ubicación de las anteriores pruebas?
- Una vez respondida esta pregunta, y con la ayuda de la escala, calculad el perímetro real de la misma.
- Con la ayuda de la plantilla, construye la figura tridimensional relacionada con esta figura plana y halla su área y su volumen.

EVALUACIÓN DE LA PRUEBA			
HORA DE FINALIZACIÓN	 PELIGRO PIRATA	 PIRATA NEUTRO	 PIRATA CONTENTO

PISTA PARA FASE 5

A la prueba final llegarás si el **centro** de las pruebas consigues trazar.

I.E.S. CÁSTULO
E: 1/500

- LEYENDA
1. BIBLIOTECA

2. AULA DE MÚSICA

3. AULA DE TECNOLOGÍA

4. SALA DE PROFESORES

5. TALLER DE COMERCIO

6. SECRETARIA

7. ORIENTADOR

8. JEFE DE ESTUDIOS

9. DIRECCIÓN

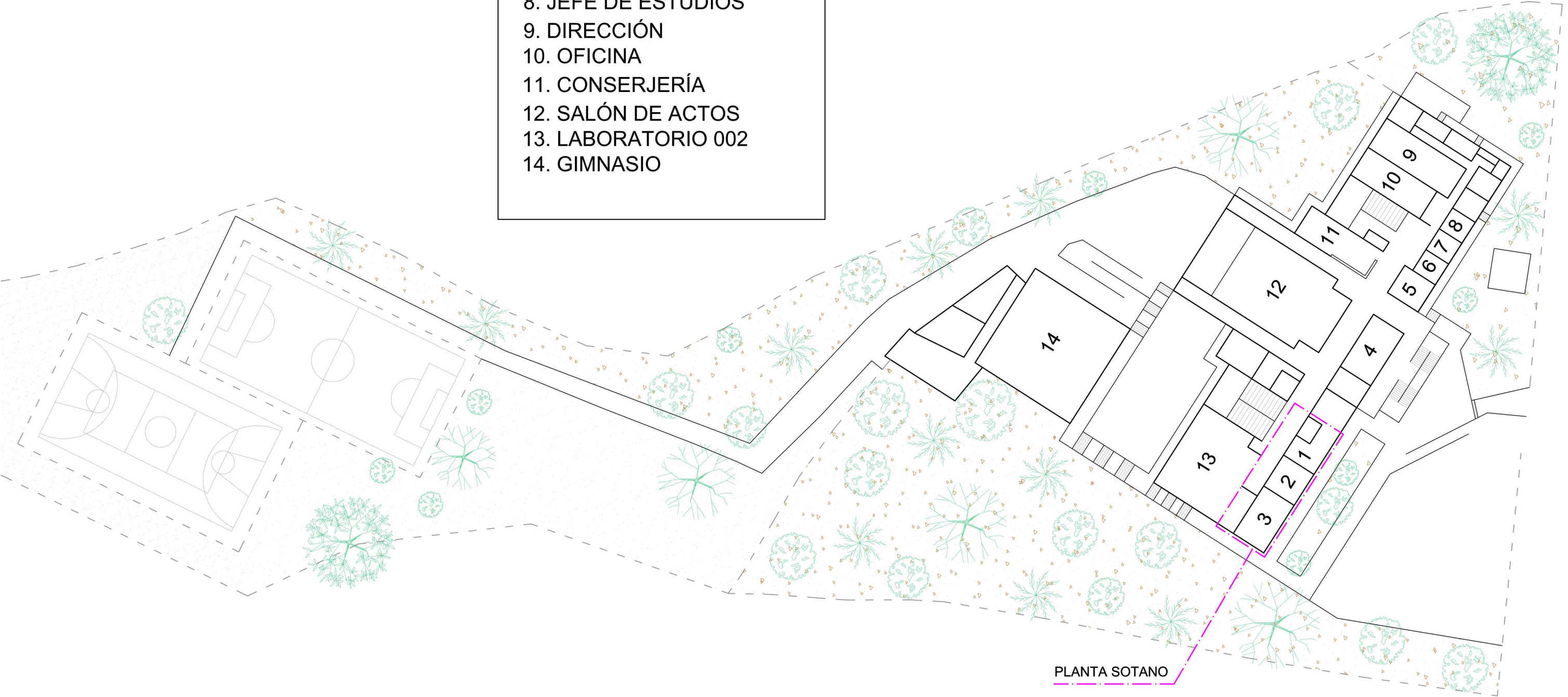
10. OFICINA

11. CONSERJERÍA

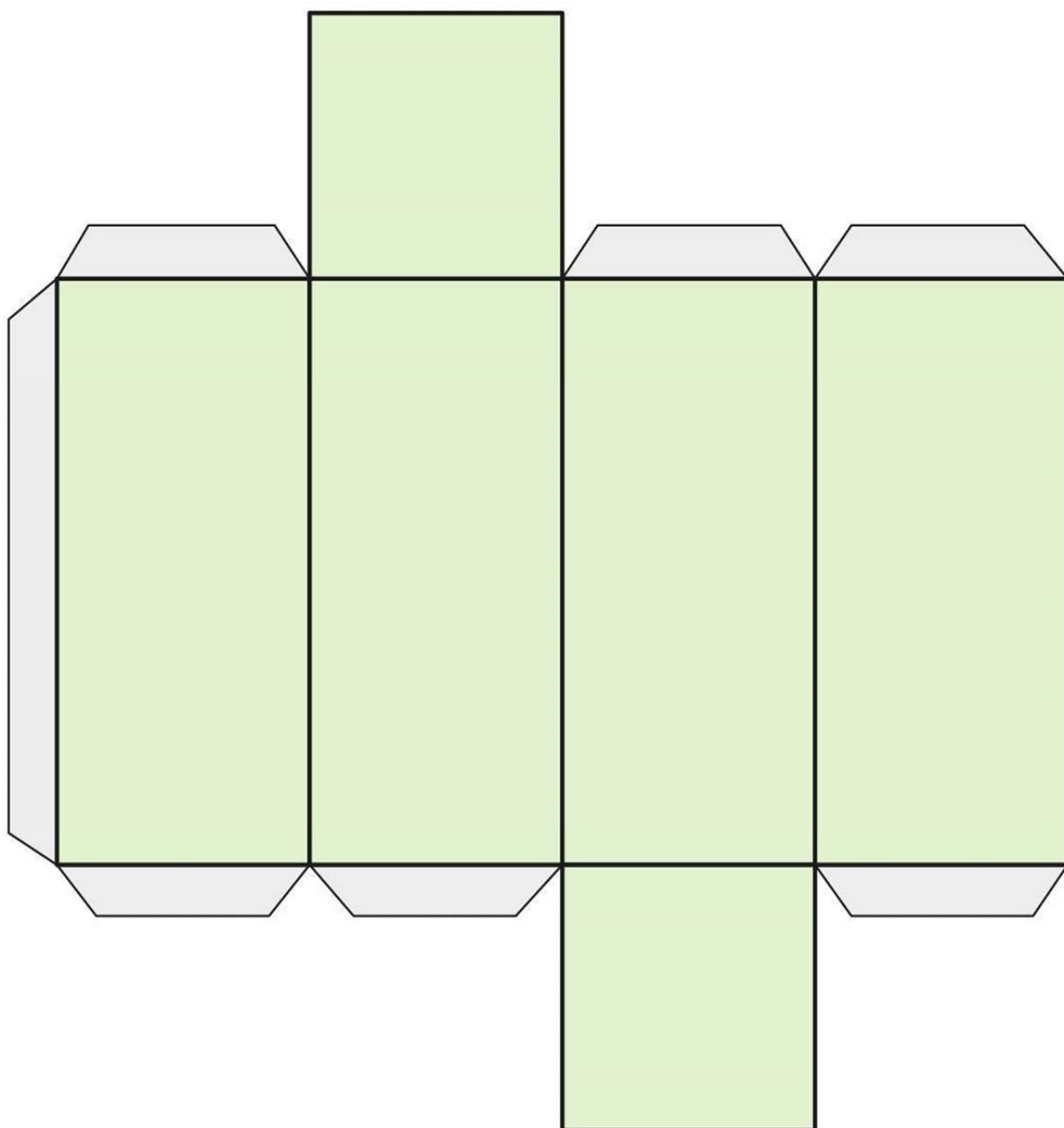
12. SALÓN DE ACTOS

13. LABORATORIO 002

14. GIMNASIO



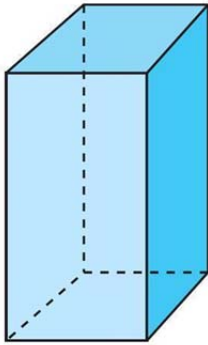
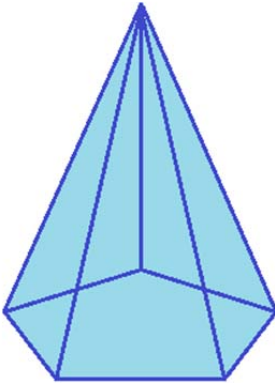
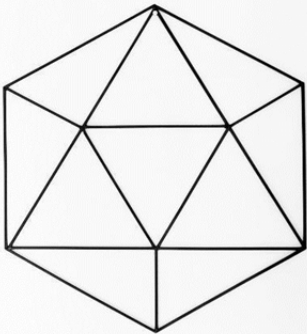
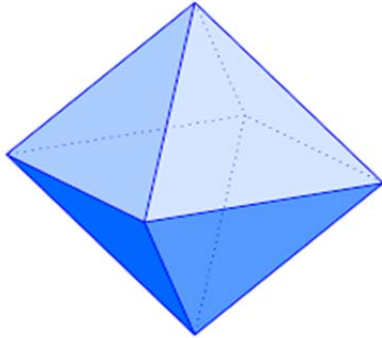
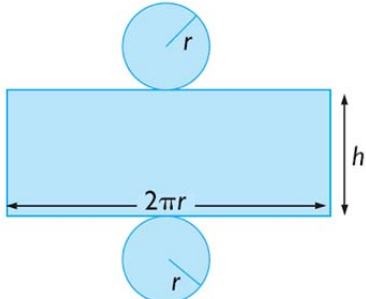
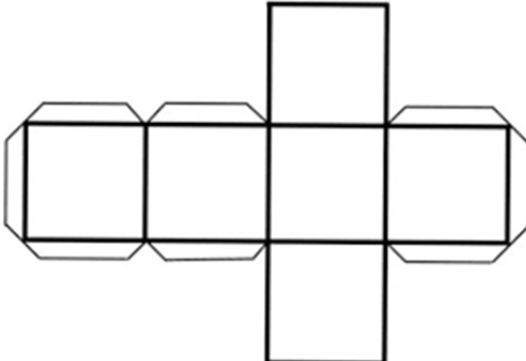
PLANTA SOTANO



PRUEBA 5

PRUEBA FINAL: PUNTO MEDIO DEL RECTÁNGULO.

El pirata Poliedro necesita encontrar el mapa del tesoro, para poder conseguir este mapa tiene que pedirlo a la reina Daenerys Prismarian. A esta reina le gusta que los tesoros solo los consigan los grandes sabios de la geometría, por lo tanto tiene que poder clasificar los siguiente cuerpos geométricos.

	
Nombre del Cuerpo:	Nombre del Cuerpo:
	
Nombre del Cuerpo:	Nombre del Cuerpo:
	
Nombre del Cuerpo:	Nombre del Cuerpo:

Clasificar puede ser muy fácil, pero esta reina le pide al pirata Poliedro que demuestre sus dotes artísticas dibujando el desarrollo plano de las figuras geométricas que pide.

Nombre del Cuerpo: CONO
OBSERVA EL CUERPO GEOMÉTRICO QUE TE MUESTRA EL PROFESOR
Nombre del Cuerpo:

EVALUACIÓN DE LA PRUEBA			
HORA DE FINALIZACIÓN	 PELIGRO PIRATA	 PIRATA NEUTRO	 PIRATA CONTENTO

Anexo XXIII.

Rúbrica de la unidad.

Rúbrica de la unidad 11: Cuerpos geométricos. Obtenida de los recursos didácticos asociados al libro de Matemáticas de 2 ESO (SM, 2019).

		NIVEL DE DESEMPEÑO			
		Sobresaliente (4)	Notable (3)	Aprobado (2)	Insuficiente (1)
ESTÁNDARES	1.1.1.	Razona y expresa verbalmente, con el rigor y la precisión adecuados, el proceso seguido en la resolución de todos los problemas.	Razona y expresa verbalmente, con el rigor y la precisión adecuados, el proceso seguido en la resolución de la mayoría de los problemas.	Razona y expresa verbalmente, con el rigor y la precisión adecuados, el proceso seguido en la resolución de muy pocos problemas.	No es capaz de razonar ni de expresar verbalmente, con el rigor y la precisión adecuados, el proceso seguido en la resolución de los problemas.
	1.2.1.	Entiende e interpreta el significado del enunciado de todos los problemas, contextualizándolos, identificando los datos que contienen y relacionándolos entre sí.	Entiende e interpreta el significado del enunciado de la mayoría de los problemas, contextualizándolos, identificando los datos que contienen y relacionándolos entre sí.	Tiene dificultades para entender e interpretar el significado del enunciado de los problemas, contextualizándolos, identificando los datos que contienen y relacionándolos entre sí.	Nunca entiende ni interpreta el significado del enunciado de los problemas, no los contextualiza, no identifica los datos que contienen ni los relaciona entre sí.
	1.2.4.	Utiliza diferentes estrategias, usa el razonamiento y reflexiona sobre los resultados obtenidos a la hora de resolver todos los problemas.	Utiliza diferentes estrategias, usa el razonamiento y reflexiona sobre los resultados obtenidos a la hora de resolver la mayoría de los problemas.	Utiliza diferentes estrategias, usa el razonamiento y reflexiona sobre los resultados obtenidos a la hora de resolver muy pocos problemas.	No es capaz de utilizar diferentes estrategias, usar el razonamiento ni reflexionar sobre los resultados obtenidos a la hora de resolver problemas.
	1.6.1.	Siempre identifica aquellas situaciones de la realidad susceptibles de contener problemas de interés.	Casi siempre identifica aquellas situaciones de la realidad susceptibles de contener problemas de interés.	Identifica muy pocas situaciones de la realidad susceptibles de contener problemas de interés.	No es capaz de identificar situaciones de la realidad susceptibles de contener problemas de interés.
	1.6.2.	En todos los casos, relaciona los problemas del mundo real y el mundo matemático, identificando los problemas que subyacen y utilizando los conocimientos matemáticos necesarios.	En la mayoría de los casos, relaciona los problemas del mundo real y el mundo matemático, identificando los problemas que subyacen y utilizando los conocimientos matemáticos necesarios.	En muy pocos casos, relaciona los problemas del mundo real y el mundo matemático, identificando los problemas que subyacen y utilizando los conocimientos matemáticos necesarios.	En ningún caso, relaciona los problemas del mundo real y el mundo matemático, identificando los problemas que subyacen y utilizando los conocimientos matemáticos necesarios.
	1.6.4.	Interpreta las soluciones matemáticas de todos los problemas en el contexto de la realidad.	Interpreta las soluciones matemáticas de la mayoría de los problemas en el contexto de la realidad.	Tiene dificultades para interpretar las soluciones matemáticas de los problemas en su contexto.	No es capaz de interpretar las soluciones matemáticas de los problemas en su contexto.
	1.8.1.	Siempre desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.	La mayoría de las veces desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.	Muy pocas veces desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.	Nunca desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.
	1.8.2.	Se propone solucionar retos y resolver problemas con la precisión, esfuerzo e implicación correspondientes al nivel educativo y a la complejidad de la circunstancia en todos los casos.	Se propone solucionar retos y resolver problemas con la precisión, esfuerzo e implicación correspondientes al nivel educativo y a la complejidad de la circunstancia en la mayoría de los casos.	Se propone solucionar retos y resolver problemas con la precisión, esfuerzo e implicación correspondientes al nivel educativo y a la complejidad de la circunstancia en muy pocos casos.	No se propone solucionar retos y resolver problemas con la precisión, esfuerzo e implicación correspondientes al nivel educativo y a la complejidad de la circunstancia.
	1.11.4.	Utiliza herramientas tecnológicas interactivas para recrear entornos y objetos geométricos con el fin de mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas en todos los casos.	Utiliza herramientas tecnológicas interactivas para recrear entornos y objetos geométricos con el fin de mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas en la mayoría de los casos.	Utiliza herramientas tecnológicas interactivas para recrear entornos y objetos geométricos con el fin de mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas en muy pocos casos.	No es capaz de utilizar herramientas tecnológicas interactivas para recrear entornos y objetos geométricos con el fin de mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.
	1.12.3.	Siempre utiliza correctamente los medios tecnológicos adecuados para organizar y mejorar su proceso de aprendizaje, analizando fortalezas y debilidades del mismo y estableciendo pautas de mejora.	En la mayoría de los casos utiliza correctamente los medios tecnológicos adecuados para organizar y mejorar su proceso de aprendizaje, analizando fortalezas y debilidades del mismo y estableciendo pautas de mejora.	En muy pocos casos utiliza correctamente los medios tecnológicos adecuados para organizar y mejorar su proceso de aprendizaje, analizando fortalezas y debilidades del mismo y estableciendo pautas de mejora.	No es capaz de utilizar correctamente los medios tecnológicos adecuados para organizar y mejorar su proceso de aprendizaje, no analiza fortalezas y debilidades del mismo ni establece pautas de mejora.
	3.5.1.	Analiza e identifica los elementos característicos de distintos cuerpos geométricos en todos los casos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.	Analiza e identifica los elementos característicos de distintos cuerpos geométricos en la mayoría de los casos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.	Tiene dificultades para analizar e identificar los elementos característicos de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.	No es capaz de analizar ni de identificar los elementos característicos de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.
	3.5.3.	Reconoce los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente, en todos los casos.	Reconoce los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente, en muchos casos.	Reconoce los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente, en muy pocos casos.	No reconoce los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos ni recíprocamente, en ningún caso.
	3.6.1.	Resuelve todos los problemas propuestos de cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados, en contextos del mundo físico y real.	Resuelve la mayoría de los problemas propuestos de cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados, en contextos del mundo físico y real.	Tiene dificultades para resolver los problemas propuestos de cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados, en contextos del mundo físico y real.	No es capaz de resolver los problemas propuestos de cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados, en contextos del mundo físico y real.