



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

LA PROBABILIDAD EN LAS AULAS DE 4º DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Alumna: Martín García, María Lucía

Tutora: Prof^a. D^a. Raquel Caballero Águila
Departamento: Estadística e Investigación Operativa

Junio, 2020

Índice general

Resumen y palabras clave	VII
Abstract and keywords	IX
Introducción	XI
Objetivos	XIII
1. Fundamentación curricular	15
1.1. Análisis del currículo escolar	15
1.2. Análisis de libros de texto	18
2. Fundamentación epistemológica	25
2.1. Experimentos aleatorios. Sucesos	27
2.2. Operaciones y relaciones entre sucesos	28
2.2.1. Operaciones entre sucesos. Propiedades	29
2.2.2. Relaciones entre sucesos	32
2.3. Estructura de σ -álgebra. Espacio medible	34
2.4. Probabilidad. Leyes de azar	35
2.4.1. Regla de Laplace. Definición clásica de probabilidad. Probabilidad geométrica	35
2.4.2. Principio de regularidad de frecuencias. Definición frecuentista de probabilidad	39
2.4.3. Frecuencias	39

2.4.4.	Interpretación subjetiva de la probabilidad	42
2.5.	Espacio probabilístico. Definición axiomática de probabilidad	42
2.5.1.	Definición axiomática de probabilidad	43
2.5.2.	Propiedades de la probabilidad	43
3.	Fundamentación didáctica	53
3.1.	Problemas en la enseñanza del Cálculo de Probabilidades y la Estadística	53
3.2.	Recursos TIC en la enseñanza del Cálculo de Probabilidades y la Estadística	55
3.3.	Estadística basada en proyectos	57
4.	Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica	61
4.1.	Título	61
4.2.	Justificación	61
4.3.	Contextualización del centro y del aula	62
4.3.1.	Marco histórico - geográfico que envuelve al centro	63
4.3.2.	Entorno social, económico, cultural y laboral del centro	63
4.3.3.	Características del centro	64
4.3.4.	Características del alumnado	66
4.4.	Objetivos	66
4.4.1.	Objetivos generales de etapa	66
4.4.2.	Objetivos del área de Matemáticas	68
4.4.3.	Objetivos de la unidad didáctica de Cálculo de Probabilidades .	69
4.5.	Competencias clave	70
4.6.	Contenidos	72
4.7.	Metodología	74
4.8.	Actividades y recursos	75
4.9.	Atención a la diversidad	76
4.10.	Temporalización	77

4.11. Evaluación	83
4.11.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje	83
4.11.2. Sistema de evaluación	85
Conclusiones	91
Bibliografía	93
ANEXO I	97

Resumen y palabras clave

El presente Trabajo Fin de Máster pretende poner en práctica los conocimientos aprendidos y las competencias adquiridas durante el desarrollo del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, por la Universidad de Jaén.

El objetivo es llevar a cabo el diseño fundamentado de una unidad didáctica, titulada “Cálculo de Probabilidades”, dirigida al alumnado de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Para ello, se realiza un estudio en profundidad del tema elegido, desde el punto de vista curricular, epistemológico y didáctico. Concretamente, los contenidos de esta unidad se analizan a la luz de la legislación vigente y se comparan en dos libros de texto de diferentes editoriales. Seguidamente, se desarrolla el tema de oposiciones número 63, estrechamente relacionado con los contenidos de la unidad. A continuación, se analizan algunos artículos de investigación, que ponen de manifiesto los posibles problemas y dificultades que se pueden encontrar en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo de Probabilidades, la importancia del uso de recursos tecnológicos y la utilidad del aprendizaje basado en proyectos. Por último, se desarrolla la unidad didáctica propiamente dicha, en la que se ha intentado utilizar diferentes metodologías para motivar al alumnado, despertar su interés y conseguir la adquisición de las competencias clave.

Palabras clave: Matemáticas, Cálculo de Probabilidades, didáctica, educación secundaria obligatoria.

Abstract and keywords

This Master's Final Project aims to put into practice the knowledge and the skills learned during the development of the Master's Degree in Compulsory Secondary Education and High School, Vocational Training and Language Teaching, at the University of Jaén.

The objective is to design a well-founded teaching unit, entitled "Probability Calculus", aimed at students in the 4th year of Compulsory Secondary Education, of Mathematics Oriented to Academic Teaching. For this purpose, a comprehensive study of the chosen topic is carried out from the curricular, epistemological and didactic point of view. Specifically, the contents of this unit are analysed in light of the current legislation and they are compared in two different textbooks. After that, taking into account the official agenda for the secondary education teaching staff public exam, the subject number 63, which is closely related to the contents of the unit, is developed. Next, some research articles are analysed, which highlight some potential problems and handicaps that can be found in the teaching-learning process of Probability Calculus, as well as the importance of the use of technological resources and the usefulness of project-based learning. Finally, the teaching unit itself is developed, attempting to use different methodologies that motivate students, call their interest and encourage the acquisition of essential skills.

Keywords: Mathematics, Probability Calculus, didactics, compulsory secondary education.

Introducción

El presente Trabajo Fin de Máster (TFM) supone la culminación de mis estudios de Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, por la Universidad de Jaén. Para su realización, se han puesto en práctica gran parte de los conocimientos aprendidos y de las competencias adquiridas durante el desarrollo de este máster, tanto en la parte de asignaturas específicas, como en la parte de asignaturas comunes.

El objetivo principal de este trabajo es el diseño y programación de una unidad didáctica sobre el “Cálculo de Probabilidades”, dirigida a los alumnos y alumnas de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). La elaboración de dicha unidad didáctica se ha basado en tres pilares, que permiten fundamentar el contenido de la misma desde el punto de vista curricular, epistemológico y didáctico. De forma más concreta, este trabajo consta de las siguientes partes:

- **Objetivos.** Este apartado recoge los objetivos que pretendo alcanzar con la realización de este TFM para mi futura experiencia laboral como docente, así como una serie de habilidades y competencias que me gustaría aprender y adquirir.
- **Fundamentación curricular.** Consta de dos partes: La primera de ellas es un breve análisis de la normativa vigente en la actualidad. En ella se revisan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, sobre los que vamos a basar nuestra unidad didáctica. En la segunda parte, se va a realizar una comparación entre dos libros de texto de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO, de las editoriales SM Savia y Anaya, en cuanto a estructura, contenidos y tipos de ejercicios, se refiere, así como un análisis de ambos textos en relación con el cumplimiento de la normativa actual.
- **Fundamentación epistemológica.** En esta parte se desarrolla el tema 63 del temario general de oposiciones de la especialidad de Matemáticas, titulado “*Frecuencia*

y probabilidad. Leyes de azar. Espacio probabilístico”, cuyo contenido está estrechamente relacionado con el tema de la unidad didáctica.

- **Fundamentación didáctica.** En este apartado se analizan varias investigaciones relacionadas con la didáctica de la Estadística y la Probabilidad. Concretamente, a la luz de dichas investigaciones, se estudian algunos de los problemas que nos podemos encontrar en la enseñanza del Cálculo de Probabilidades y la Estadística, la importancia del uso de tecnologías de información y comunicación y la utilidad del aprendizaje basado en proyectos.
- **Proyección didáctica.** Es el apartado más extenso del TFM. En él se desarrolla una unidad didáctica destinada al alumnado de 4º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, a la que he puesto por título: “Cálculo de Probabilidades”. Esta parte incluye los contenidos, objetivos, competencias clave, metodología, actividades, temporalización y evaluación específicos de la unidad didáctica.
- **Conclusiones.** En este apartado se resumen los resultados del aprendizaje que he adquirido durante la realización de este TFM con el desarrollo de cada una de sus partes.

Objetivos

Como se ha indicado en la Introducción, el objetivo primordial de este trabajo es el diseño y programación de una unidad didáctica que esté sujeta a la normativa actual y que sea útil para mi futura profesión como docente.

Aparte de esta finalidad, con este trabajo también se quiere conseguir alcanzar los siguientes objetivos para mi futura labor como docente:

- Conocer la normativa vigente, por la que se regula el currículo del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria.
- Analizar varias investigaciones, con la finalidad de conocer los errores que se cometen a la hora de enseñar, y las posibles dificultades que les surge al alumnado, al aprender Matemáticas, y en especial, Probabilidad.
- Aprender a realizar una unidad didáctica, relacionando los contenidos, objetivos, competencias, actividades y evaluación con el tema escogido para su realización.
- Aprender a realizar una temporalización de clase y realizar actividades que contribuyan a la consecución de las competencias necesarias, así como los métodos de resolución de dichas actividades que resulten más adecuados para alcanzar dichas competencias.
- Desarrollar con rigor el tema 63 de oposiciones, el cual, se va a utilizar para la elaboración de la unidad didáctica.
- Analizar varios libros de texto de diferentes editoriales, con el fin de conocer si sus contenidos son acordes con la normativa.
- Conocer los diferentes tipos de metodologías existentes en la enseñanza, alternativas a la tradicional, para poder llevarlas a cabo en mi futura labor como docente.
- Conocer la importancia de las tecnologías de información y comunicación como herramienta para el aprendizaje del alumnado, así como su utilización para la

elaboración de actividades motivadoras e innovadoras, que despierten el interés en el alumnado.

- Conocer el proceso de evaluación del alumnado (criterios, indicadores, estándares de aprendizaje).

Capítulo 1

Fundamentación curricular

El diseño de cualquier unidad didáctica requiere una labor previa de estudio de las normativas curriculares vigentes y análisis de algunos libros de texto, que permita conocer no solo los contenidos a incluir sino también el alcance de los mismos, así como los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.

1.1. Análisis del currículo escolar

En la actualidad, la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) se rige por la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) de 2013, y en Andalucía se rige por la Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía (LEA).

De forma más concreta, la normativa vigente de ámbito estatal, que rige la ESO, es el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre (BOE), por el que se establece el currículo básico de la ESO y del Bachillerato. A nivel autonómico, la legislación educativa en vigor en Andalucía es la Orden del 14 de julio de 2016 (BOJA), por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la ESO en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

Este trabajo se va a centrar en las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO, en concreto en el Bloque 5: Estadística y Probabilidad.

La Orden del 14 de julio de 2016 establece que las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas es una materia troncal, que se cursa en tercero y cuarto de ESO, distribuida en cinco bloques: Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas, Números y Álgebra, Geometría, Funciones y, por último, Estadística y Probabilidad.

Las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas contribuyen al desarrollo de habilidades para formular, plantear, interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana y profesional, permitiendo abordar y resolver situaciones interdisciplinares en contextos reales. Aportan, por tanto, al alumnado, una base adecuada para desarrollar estrategias útiles para otras disciplinas, comprender otras áreas del saber y afrontar sus futuros estudios académicos, especialmente si desean cursar Bachillerato. Esta materia fomenta la adquisición de la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT), que es fundamental en el desarrollo intelectual del alumnado y les permite resolver y comunicar matemáticamente diferentes problemas en cualquier contexto, haciendo hincapié en el razonamiento, la actividad y los conocimientos.

En concreto, el Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre recoge los siguientes contenidos, criterios de evaluación, y estándares de aprendizaje para el Bloque 5 de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º ESO, en el que, como hemos indicado, se enmarca la unidad didáctica objeto de este trabajo.

■ **Contenidos:**

- Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.
- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.
- Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Experiencias aleatorias compuestas.
- Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.
- Probabilidad condicionada.
- Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística.
- Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.
- Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.
- Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización.
- Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
- Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.

■ **Criterios de evaluación:**

1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.
2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.
3. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación.
4. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.

■ **Estándares de aprendizaje:**

● Relacionados con el criterio de evaluación 1:

- 1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación.
- 1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.
- 1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.
- 1.4. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones.
- 1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
- 1.6. Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.

● Relacionados con el criterio de evaluación 2:

- 2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias.
- 2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.

- 2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada.
- 2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas.
 - Relacionado con el criterio de evaluación 3:
- 3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, cuantificar y analizar situaciones relacionadas con el azar.
 - Relacionados con el criterio de evaluación 4:
- 4.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos estadísticos.
- 4.2. Representa datos mediante tablas y gráficos estadísticos utilizando los medios tecnológicos más adecuados.
- 4.3. Calcula e interpreta los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador).
- 4.4. Selecciona una muestra aleatoria y valora la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas.
- 4.5. Representa diagramas de dispersión e interpreta la relación existente entre las variables.

1.2. Análisis de libros de texto

En esta sección se va a realizar un análisis comparativo de la unidad didáctica que nos ocupa en dos libros de texto de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO. Se observará si cumplen la normativa vigente en la actualidad y si los contenidos que ofrecen están compensados con las actividades que proponen cada uno de ellos. La comparación se basará en las diferencias o similitudes que presentan en base al contenido teórico y práctico de ambos, así como la forma que tiene cada uno de explicar los términos y de plantear los ejercicios.

Los libros seleccionados han sido el de la editorial Anaya, (Colera-Jiménez, Oliveira-González, Gaztelu-Albero y Colera-Cañas, 2018) y el de la editorial SM Savia, (Alcaide-Guindo, Hernández-Gómez, Moreno-Warleta, Serrano-Marugán, Donaire-Moreno y Pérez, 2016). Se han escogido la unidad 12 de la editorial Anaya (Cálculo de probabilidades) y la unidad 13 de la editorial SM Savia (Probabilidad). La tabla 1.1, muestra los contenidos de ambas unidades.

Contenidos	
Editorial Anaya	Editorial SM Savia
■ Sucesos aleatorios. ● Nomenclatura. ● Relaciones y operaciones con sucesos. ■ Probabilidades de los sucesos. Propiedades. ■ Probabilidades en experiencias simples. ● Experiencias regulares e irregulares. ● Ley de Laplace. ■ Probabilidades en experiencias compuestas. ● Sucesos dependientes e independientes. ● Extracciones con o sin reemplazamiento. ■ Composición de experiencias independientes. ■ Composición de experiencias dependientes. ● Probabilidad condicionada. ● Descripción de la experiencia mediante un diagrama de árbol. ■ Tablas de contingencia.	■ Azar y determinismo. Sucesos. ● Tipos de sucesos. ● Operaciones con sucesos. ● Compatibilidad de sucesos. ■ Probabilidad de un suceso. ● Sucesos equiprobables. ● Regla de Laplace. ● Probabilidad de la unión de sucesos. ● Probabilidad del suceso contrario. ■ Sucesos dependientes e independientes. Probabilidad de experimentos compuestos. ■ Probabilidad condicionada. ● Tablas de contingencia. ■ Probabilidad total. Teorema de Bayes. ■ Análisis del azar.

Tabla 1.1: Comparativa de contenidos (elaboración propia).

A rasgos generales, ambos libros estructuran la unidad de forma parecida y se adaptan bien a los contenidos recogidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre.

A continuación se va a realizar un análisis de la estructura y el alcance con que ambos libros desarrollan los contenidos, epígrafe por epígrafe, y se irán destacando los aspectos más significativos que se encuentren en cada uno de ellos, así como aquellos detalles que considere relevantes. Se revisará la forma en la que ambos libros definen los conceptos y los diferentes tipos de actividades que se proponen en cada uno de ellos.

En el primer epígrafe, en el que se introduce el concepto de suceso, la editorial SM define los conceptos de suceso aleatorio y suceso determinista mientras que Anaya solamente explica el concepto general de suceso y se centra en el de suceso aleatorio.

Cabe destacar las definiciones que dan cada libro sobre experimento aleatorio.

Definición de experimento aleatorio (SM Savia).

Un experimento es aleatorio si al repetirlo varias veces en las mismas condiciones se pueden obtener diferentes resultados.

Definición de suceso aleatorio y experiencia aleatoria (Anaya).

- Se llama suceso aleatorio a aquel acontecimiento en cuya realización influye el azar.
- Una experiencia aleatoria es aquella cuyo resultado es un suceso aleatorio.

En mi opinión, considero que la editorial SM Savia explica el concepto de forma más intuitiva, favoreciendo su correcta comprensión por parte del alumnado y facilitando al profesorado su explicación.

Además, la definición que proporciona Anaya es menos rigurosa bajo mi punto de vista, pues utiliza el término “azar”, sinónimo de aleatoriedad, en la propia definición de suceso aleatorio, concepto que además considero es muy abstracto y, por tanto, puede dificultar la comprensión al alumnado.

A rasgos generales, considero que la estructura del primer epígrafe del libro de Anaya es un poco más confusa, ya que comienza definiendo suceso aleatorio y experiencia aleatoria y después define el concepto de suceso, que en mi opinión creo que debería introducirse antes. Por el contrario, SM sí tiene un orden adecuado. Además, ambos definen las relaciones y las operaciones con los sucesos; SM incluye un dibujo de cada una de ellas bastante claro y preciso (Figura 1.1), mientras que Anaya lo hace con un ejemplo sobre la baraja de cartas (Figura 1.2).

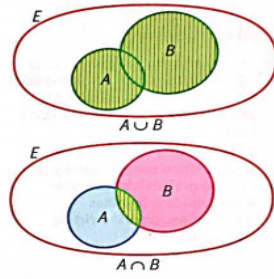


Figura 1.1: Ilustración de algunas operaciones con sucesos, editorial SM Savia (Alcaide-Guindo et al., 2016).

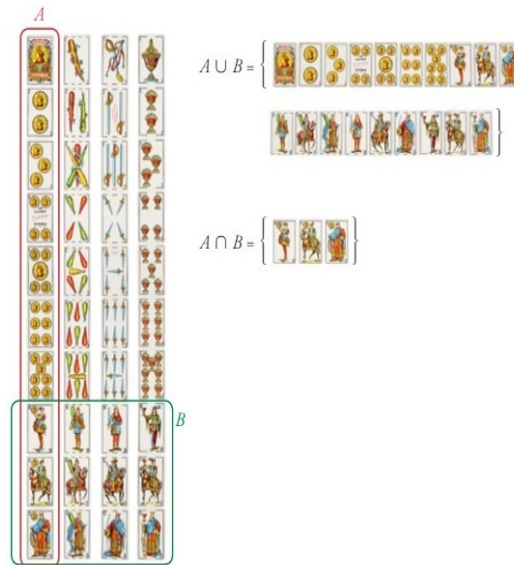


Figura 1.2: Ilustración de algunas operaciones con sucesos, editorial Anaya (Colera-Jiménez et al., 2018).

El siguiente epígrafe de SM establece la definición de probabilidad de un suceso, las propiedades que cumple la probabilidad asociada a un experimento aleatorio, el concepto de sucesos equiprobables, la Regla de Laplace y las probabilidades de la unión y del suceso contrario. Este epígrafe se divide en dos diferentes en la editorial Anaya: en el primero introduce el concepto de probabilidad de un suceso y sus propiedades, mientras que en el segundo explica las probabilidades en experiencias simples, donde incluye la Ley de Laplace.

A continuación voy a mostrar cómo define cada libro el concepto de probabilidad.

Definición de probabilidad (SM Savia)

La probabilidad $P(A)$ de un suceso A es el valor de la frecuencia relativa de A , $h(A)$, al repetir el experimento infinitas veces.

Definición de probabilidad (Anaya)

La probabilidad de un suceso S , que se designa $P(S)$, indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

En esta definición, considero que el alumnado entendería mejor el concepto de probabilidad que nos ofrece Anaya que el de SM. Además, la editorial SM define la probabilidad como límite de frecuencias relativas, y esto no sería necesario hasta Bachillerato según los contenidos que vienen recogidos en el RD 1105/2014. Por lo demás, en esta parte del tema no se diferencian mucho un libro de otro en cuanto a contenido teórico y estructura se refiere.

Los siguientes epígrafes de ambos libros son bastante similares, ambos incluyen la probabilidad de sucesos independientes, dependientes y probabilidad condicionada. Hay que destacar que la editorial Anaya no incluye el Teorema de la Probabilidad Total, el Teorema de Bayes y la probabilidad del suceso unión, contenidos que, si bien, para el nivel que nos ocupa, no están recogidos en el RD 1105/2014, considero importantes y creo que es interesante que el alumnado se vaya familiarizando con ellos. El texto de SM Savia sí los incluye.

La editorial SM Savia no explica los diagramas de árbol, pero añade una indicación para que el alumnado practique con ellos en su página web, mientras que Anaya tiene un apartado específico sobre los diagramas de árbol.

Por otro lado, Anaya explica detalladamente las tablas de contingencia en un epígrafe, mientras que SM las incluye brevemente en un apartado, explicándolas sobre un ejemplo de probabilidades condicionadas. Anaya profundiza más y también nos explica la utilidad que tienen para calcular proporciones y probabilidades.

En ambos libros de texto encontramos un apartado en cada epígrafe donde invita a los estudiantes a afianzar los conocimientos aprendidos en clase con ejemplos que hay en las páginas web de cada editorial.

En cuanto a ejercicios se refiere, la editorial SM los clasifica según su nivel de dificultad, distinguiendo tres niveles. Anaya solo clasifica los ejercicios que propone al final

del tema. También hay que comentar que las dos editoriales clasifican los ejercicios, excepto los de autoevaluación, según los contenidos del tema a los que se refieren, por lo que el alumnado sabe, antes de comenzar a resolverlos, qué fórmulas y conceptos tiene que utilizar. No sé hasta qué punto clasificar los ejercicios sea acertado, quizás esto condicione al alumnado a la hora de enfrentarse a ellos.

Hay que destacar que ambos libros ofrecen una gran cantidad de ejercicios y ejemplos resueltos, y esto es un punto positivo ya que es de gran ayuda para el alumnado a la hora de resolver el resto de actividades que propone el libro. También destacaría que la editorial SM, al final de todo el temario, incluye un resumen con los conceptos más importantes vistos en la unidad.

La Tabla 1.2 muestra el número de ejercicios que podemos encontrar en cada libro de texto, clasificados por su nivel de dificultad. También se indica el número de ejemplos y de ejercicios resueltos que podemos encontrar, así como los ejercicios propuestos para que los propios alumnos y alumnas realicen su autoevaluación.

Ejercicios	
Editorial Anaya	Editorial SM Savia
■ Número total de ejercicios propuestos: 66 ● Ejercicios de nivel bajo: 34. ● Ejercicios de nivel medio: 22. ● Ejercicios de nivel alto: 10. ■ Número total de ejemplos resueltos: 6. ■ Número total de ejercicios resueltos: 15. ■ Ejercicios autoevaluación: 6.	■ Número total de ejercicios propuestos: 71. ● Ejercicios de nivel bajo: 33. ● Ejercicios de nivel medio: 32. ● Ejercicios de nivel alto: 6. ■ Número total de ejemplos resueltos: 18. ■ Número total de ejercicios resueltos: 8. ■ Ejercicios autoevaluación: 6.

Tabla 1.2: Ejercicios y ejemplos (elaboración propia).

En general, los dos libros de texto se ajustan adecuadamente al nivel del alumnado, aunque se puede decir que la editorial SM presenta un nivel algo superior, ya que,

como hemos indicado, incorpora ciertos contenidos que, según la legislación vigente, podrían introducirse en Bachillerato. El lenguaje que se utiliza en ambos textos no es excesivamente técnico y considero que es bastante asequible para el alumnado al que va dirigido. Los ejercicios propuestos se ajustan bien al contenido teórico que se explica y la gran cantidad de ejercicios que hay permite al alumnado afianzar sus conocimientos, complementar su aprendizaje y adquirir o reforzar las competencias correspondientes.

Capítulo 2

Fundamentación epistemológica

El objetivo de este capítulo es desarrollar el tema número 63 del temario oficial de oposiciones de Matemáticas, titulado “Frecuencia y probabilidad. Leyes del azar. Espacio probabilístico.” y relacionarlo con los contenidos de la unidad didáctica elegida. Para ello, hemos utilizado las siguientes fuentes de información: (Borovkov, 2013), (Feller, 1973), (García-Ligero Ramírez, Hermoso Carazo, Maldonado Jurado, Román Román y Torres Ruiz) y (Rohatgi y Ehsanes Saleh, 2015).

En primer lugar, haremos una breve reseña histórica del desarrollo y evolución del Cálculo de Probabilidades: (Mateos-Aparicio, 1985) y (Mateos-Aparicio, 2002).

La existencia de los juegos de azar se remonta al año 3500 a.C al haberse encontrado evidencia de ellos en diversas pirámides de Egipto. Gracias a excavaciones que se han ido realizando en Egipto, Grecia y Roma, se ha podido conocer que hace unos 40.000 años, en la Prehistoria, nuestros antepasados ya utilizaban como dados para jugar el hueso astrálogo de los mamíferos, que corresponde al hueso del talón. Este tiene forma aproximada de prisma rectangular, pero con el desgaste de lanzarlo adquiriría forma de cubo y es lo que se conoce como tabas.

Las antiguas civilizaciones concebían el concepto de azar como algo divino y predecían el futuro con las tiradas de cuatro tabas. A pesar de que en la antigüedad tenían una gran afición por el juego con el dado, no fueron capaces de observar que una cara, cuando se repetían muchas tiradas, tendía a salir el mismo número de veces que el resto si el dado estaba bien equilibrado. Esto provocó que se retrasara durante siglos el cálculo de las probabilidades. Tal vez, nuestros antepasados no se plantearon la equiprobabilidad de las caras porque el dado no era perfecto o por sus creencias religiosas, ya que pensaban que el resultado de una tirada dependía del poder divino.

Esta creencia fue evolucionando con el tiempo, hasta llegar al Renacimiento, momento en el que empieza a verse el mundo de diferente manera y es cuando se eliminan las explicaciones teológicas, las cuales impedían el desarrollo de muchos razonamientos. Es entonces cuando se replantea el concepto de experimento aleatorio y se estudia desde un razonamiento científico.

En el siglo XV, la aparición de la imprenta ayudará a expandir todos los conocimientos que había hasta el momento y a impulsar el desarrollo del Cálculo de Probabilidades como disciplina.

A principios del siglo XVI, algunos matemáticos italianos empezaron a conseguir entender los resultados que se obtenían de experimentos aleatorios sencillos, destaca Gerolamo Cardano (1501-1576), quien escribió un tratado en el que resolvía problemas de combinatoria y estrategias para los juegos de dados. También destaca en este ámbito el matemático, físico y astrónomo italiano Galileo Galilei (1564-1642).

Fue ya a finales del siglo XVII cuando se popularizó la Probabilidad como teoría matemática. Entre sus impulsores destacan autores como Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre De Fermat (1601-1665).

En esta época, los juegos de azar eran muy populares entre la alta sociedad francesa. Antoine Gombard (1607-1684), también conocido como Caballero De Meré, planteó en 1654 a Pascal dos problemas relacionados con las apuestas. Pascal y Fermat intercambiaron mucha correspondencia en relación con la resolución de estos problemas; de hecho, las soluciones que entre ambos encontraron consolidaron las bases del Cálculo de Probabilidades y la Teoría de Juegos.

Fermat, conocido como “padre de la teoría de los números”, que es la parte de las matemáticas centrada en el estudio de las propiedades que tienen los números enteros, hizo importantes aportaciones y colaboró con otros matemáticos para la elaboración de numerosos teoremas que no fueron demostrados hasta después de fallecer. En teoría de los números, se inspiró en Diofanto de Alejandría, un matemático griego del siglo II d.C.

En 1657, el matemático Christian Huygens (1629-1695), a raíz de los trabajos realizados por Fermat y Pascal realizó un estudio sobre los juegos de azar llamado *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, considerado como la aportación más importante a la teoría de la probabilidad en la segunda mitad del siglo XVII.

Gracias a las aportaciones de Huygens, el Cálculo de Probabilidades comienza a consolidarse y su obra atrae la atención de importantes matemáticos como James Bernoulli (1655-1705) y Abraham De Moivre (1667-1754).

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), matemático, astrónomo y físico francés, fue quien propuso una de las primeras definiciones de la Probabilidad en su trabajo *Theorie analytique des probabilités* (1812).

La Teoría de la Probabilidad, como la conocemos en la actualidad, es bastante reciente. Andréi Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) fue quien, en su trabajo *Gundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad) (1933), introdujo la definición axiomática de probabilidad (Sección 2.5) .

2.1. Experimentos aleatorios. Sucesos

El objetivo del Cálculo de Probabilidades es intentar establecer y desarrollar modelos matemáticos para tratar situaciones que se desarrollan en ambiente de incertidumbre.

Definición 2.1.1. *Un fenómeno es una serie de hechos o circunstancias que provocan diferentes efectos.*

Algunos fenómenos se pueden estudiar mediante la realización de un experimento, que permita conocer algunas de sus características.

Definición 2.1.2. *Un experimento es una prueba o acción que proporciona unos determinados resultados bajo distintas condiciones. Los experimentos se clasifican en:*

- *Experimentos deterministas. Se dice que un experimento es determinista si su resultado se puede conocer de antemano, ya que realizado bajo las mismas condiciones se obtiene el mismo resultado.*
- *Experimentos aleatorios. Se dice que un experimento es aleatorio si satisface las siguientes condiciones:*
 1. *Todos los posibles resultados del experimento se conocen de antemano.*
 2. *Cualquier realización del experimento proporciona un resultado que no se conoce de antemano.*
 3. *El experimento puede repetirse en condiciones idénticas.*

Definición 2.1.3. *Un suceso aleatorio es una propiedad, un hecho relativo al resultado de un experimento aleatorio, cuyo cumplimiento o no puede ser observado tras la realización del mismo.*

Definición 2.1.4. *Dado un experimento aleatorio llamaremos suceso elemental o resultado elemental a cada posible resultado del mismo, que no pueda descomponerse en otros sucesos más simples. Se denomina suceso compuesto a un posible resultado del experimento que contenga más de un suceso elemental.*

Definición 2.1.5. *Dado un experimento aleatorio se define su espacio muestral como el conjunto formado por todos los sucesos elementales del mismo. Se suele denotar por Ω .*

Los espacios muestrales pueden clasificarse atendiendo a distintos criterios:

- Según la naturaleza de sus elementos.
 - Cuantitativos: son aquellos cuyos elementos son números. Por ejemplo, el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de un dado.
 - Cualitativos: son aquellos cuyos elementos son objetos arbitrarios. Por ejemplo, el espacio muestral correspondiente al experimento de extraer bolas de una urna y anotar su color.
- Según su cardinal.
 - Discretos: son aquellos formados por un conjunto finito o infinito numerable de elementos.
 - Continuos: son aquellos formados por un conjunto infinito no numerable de elementos.

2.2. Operaciones y relaciones entre sucesos

La importancia de realizar un experimento aleatorio radica, con frecuencia, en estudiar si el resultado del mismo satisface o no una o varias características. Para especificar relaciones y operaciones entre sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio, se utiliza la teoría de conjuntos. Concretamente, identificaremos los sucesos asociados a un experimento aleatorio con subconjuntos del espacio muestral y diremos que un suceso aleatorio ocurre al realizar un experimento aleatorio, si el resultado es un suceso elemental perteneciente a dicho suceso.

2.2.1. Operaciones entre sucesos. Propiedades

- Suceso contrario o complementario. Sea A un suceso (subconjunto) de un espacio muestral Ω . Definiremos el complementario de este suceso como un suceso que ocurre si y solo si no ocurre A . Se denota como $\bar{A}$ y está formado por los elementos de Ω que no pertenecen a A , es decir $\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ (Figura 2.1).

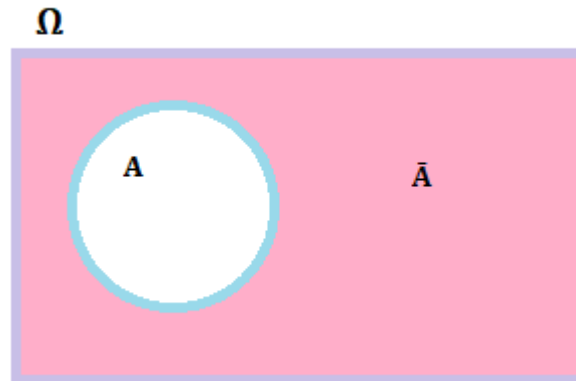


Figura 2.1: Complementario de un suceso (elaboración propia).

- Unión de sucesos. Sean A y B sucesos (subconjuntos) de un espacio muestral Ω . Definiremos el suceso unión, $A \cup B$, como aquel suceso que ocurre si y solo si ocurre alguno de los dos sucesos; $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ó } \omega \in B\}$ (Figura 2.2).

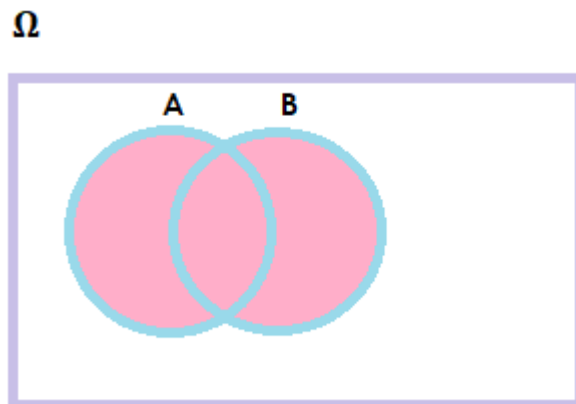


Figura 2.2: Unión de sucesos (elaboración propia).

- Intersección de sucesos. Sean A y B sucesos (subconjuntos) de un espacio muestral

Ω . Definiremos el suceso intersección, $A \cap B$ como aquel suceso que ocurre si y solo si ocurren ambos sucesos; $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y } \omega \in B\}$ (Figura 2.3).

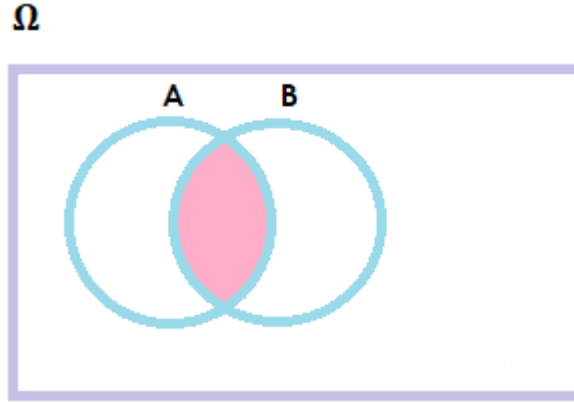


Figura 2.3: Intersección de sucesos (elaboración propia).

- Diferencia de sucesos. Sean A y B sucesos (subconjuntos) de un espacio muestral Ω . Definiremos el suceso diferencia, $A - B$, como el suceso que ocurre si ocurre A pero no B ; $A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \notin B\}$ (Figura 2.4). Observemos que $A - B = A \cap \overline{B}$.

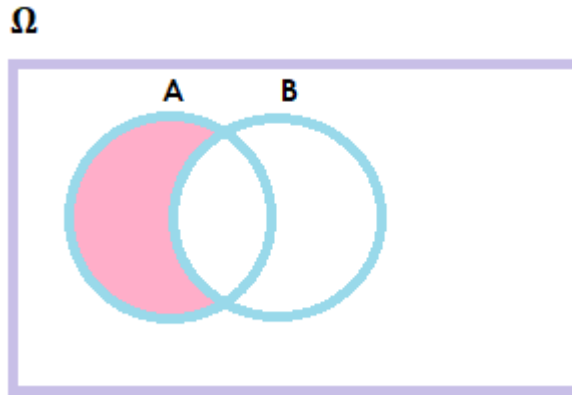


Figura 2.4: Diferencia de sucesos (elaboración propia).

- Diferencia simétrica de sucesos. Sean A y B sucesos (subconjuntos) de un espacio muestral Ω . Definiremos el suceso diferencia simétrica, $A \Delta B$, como el suceso que ocurre si ocurre A o B , pero no los dos simultáneamente; $A \Delta B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y } \omega \notin B, \text{ o bien } \omega \in B \text{ y } \omega \notin A\}$ (Figura 2.5). Observemos que $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

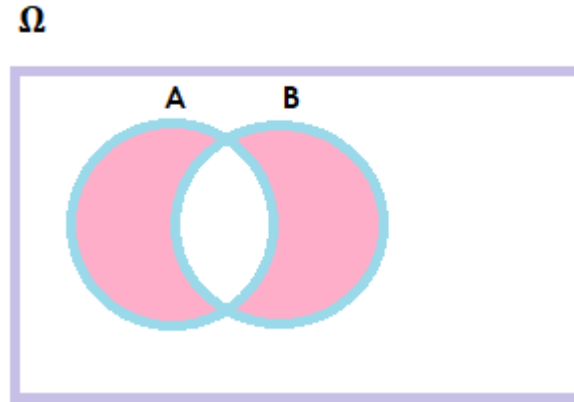


Figura 2.5: Diferencia simétrica de sucesos (elaboración propia).

Propiedades que satisfacen la operaciones con sucesos:

Sean A_1, A_2, A_3 sucesos de un espacio muestral Ω

- Propiedad asociativa:

$$A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$$

$$A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$$

- Propiedad conmutativa:

$$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$$

$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$$

- Existencia de elemento neutro:

Para la unión $\emptyset : A \cup \emptyset = A$

Para la intersección $\Omega : A \cap \Omega = A$

- Propiedad distributiva:

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$$

$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$$

- Propiedades relacionadas con el complementario: $A \cup \overline{A} = \Omega$ y $A \cap \overline{A} = \emptyset$

También se cumple que el complementario del complementario de un suceso, es el mismo suceso: $\overline{\overline{A}} = A$ y que $\overline{A} = \Omega - A$.

- Leyes de De Morgan: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2.2.2. Relaciones entre sucesos

- Inclusión de sucesos. Sean A y B sucesos (subconjuntos) de un espacio muestral Ω . Diremos que el suceso A está contenido en el suceso B ($A \subset B$) si siempre que ocurre el primero ocurre también el segundo; es decir, cuando todos los sucesos elementales del primero pertenecen al segundo. $A \subset B$ significa, por tanto, que $\forall \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$ (Figura 2.6).

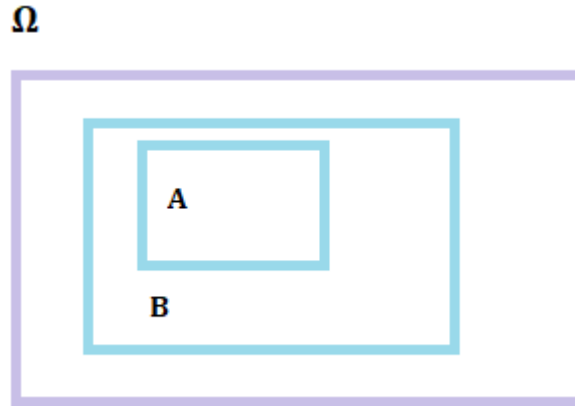


Figura 2.6: Inclusión de sucesos (elaboración propia).

- Igualdad de sucesos. Sean A y B sucesos (subconjuntos) de un espacio muestral Ω . Diremos que estos sucesos son iguales ($A = B$) si siempre que ocurre uno de ellos ocurre el otro es decir, si tienen ambos los mismos sucesos elementales; $A=B$, significa por tanto que $\omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B$ (Figura 2.7).

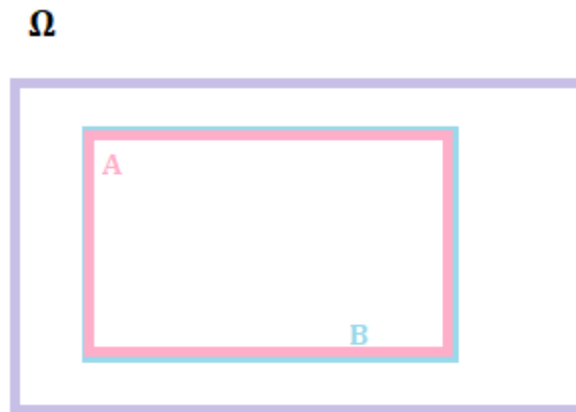


Figura 2.7: Igualdad de sucesos (elaboración propia).

- Incompatibilidad de sucesos. Sean A y B sucesos (subconjuntos) de un espacio muestral Ω . Diremos que estos sucesos son disjuntos o incompatibles si no pueden ocurrir los dos al mismo tiempo; es decir, cuando no tienen ningún suceso elemental en común. Significa, por tanto, que $A \cap B = \emptyset$ es decir, $\forall \omega \in A \Rightarrow \omega \notin B$ (Figura 2.8).

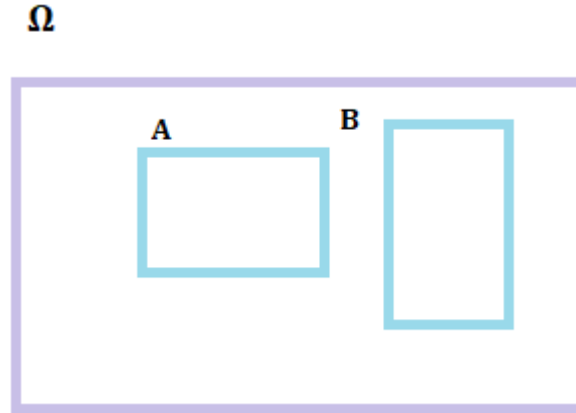


Figura 2.8: Incompatibilidad de sucesos (elaboración propia).

- Exhaustividad de sucesos. Sean $A_1, \dots, A_n$ sucesos (subconjuntos) de un espacio muestral Ω . Diremos que un conjunto de sucesos es exhaustivo cuando la unión de dichos sucesos forman el espacio muestral. Es decir, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ (Figura 2.9).

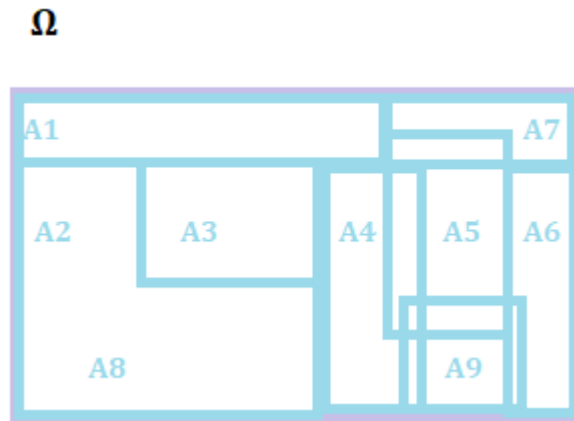


Figura 2.9: Exhaustividad de sucesos (elaboración propia).

- Sean $A_1, \dots, A_n$ sucesos (subconjuntos) de un espacio muestral Ω . Diremos que un conjunto de sucesos forma un sistema completo o partición del espacio mues-

tral cuando los sucesos forman un sistema exhaustivo de sucesos y además son disjuntos dos a dos. Es decir, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ y $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ (Figura 2.10).

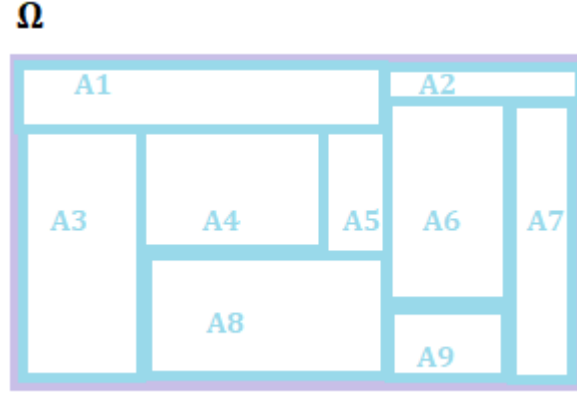


Figura 2.10: Sistema exhaustivo completo (elaboración propia).

2.3. Estructura de σ -álgebra. Espacio medible

Para describir un experimento aleatorio, además de su espacio muestral Ω , hay que especificar la clase de sucesos de interés, ya que, a menudo, no todos los subconjuntos de Ω son objeto de estudio en dicho experimento.

Si tenemos un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es no finito, puede ocurrir que no sea finita la clase formada por los sucesos que son de interés, y en este caso cualquier unión o intersección numerable de sucesos debe ser también un suceso. Por tanto, para tratar estas situaciones, es necesario considerar la estructura siguiente:

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una clase de conjuntos no vacía. Diremos que tiene estructura de σ -álgebra si cumple las siguientes propiedades:

1. Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$.
2. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
3. $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Definición 2.3.2. Un espacio medible es un par $(\Omega, \mathcal{A})$, formado por un conjunto Ω y una clase de subconjuntos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, que tiene estructura de σ -álgebra.

La estructura de espacio medible permitirá modelizar el espacio muestral y la clase de sucesos asociados a un experimento aleatorio y proporcionará la base necesaria para establecer la definición axiomática de probabilidad.

2.4. Probabilidad. Leyes de azar

A continuación, vamos a revisar algunas concepciones del concepto de probabilidad, que surgen a partir del siglo XVIII.

2.4.1. Regla de Laplace. Definición clásica de probabilidad. Probabilidad geométrica

La primera definición rigurosa de probabilidad aparece cuando Laplace en 1812 formaliza la que hoy conocemos como *definición clásica o regla de Laplace*.

Esta definición se basa en el *principio de la razón insuficiente*, o *principio de indiferencia*, que afirma que si no hay ninguna razón por la que pensar que los distintos sucesos elementales tienen probabilidades diferentes, entonces se deben considerar equiprobables.

Consideremos un experimento aleatorio que cumpla las características siguientes:

- Tiene un espacio muestral finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.
- No hay ninguna razón por la que suponer que cualquier suceso elemental tiene más posibilidad de aparecer que cualquier otro; es decir, todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir, son equiprobables.

Si $A = \{\omega_{i1}, \dots, \omega_{im}\}$ un suceso aleatorio asociado a dicho experimento, podemos definir la probabilidad de A como el cociente entre el número de resultados elementales que son favorables a dicho suceso (m), y el número de los resultados posibles que puede tener el experimento (n). Es decir, si denotamos como $P(A)$ la probabilidad del suceso A , se tiene que

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Esta definición de probabilidad tiene diferentes inconvenientes y críticas:

- La principal crítica que se le hace es que incluye en la propia definición el término que se está definiendo, al exigir que haya un grupo de alternativas que son equiprobables.

- No se puede aplicar a situaciones de la vida real que tengan un conjunto no finito de resultados posibles.
- Hay que concretar las alternativas del problema, y a veces esto crea confusión. Por ejemplo, si queremos calcular la probabilidad de que salgan dos caras al lanzar dos monedas, y se considera que los posibles resultados son dos caras, dos cruces, cara y cruz, la probabilidad sería $1/3$ y esto sería erróneo ya que, en el caso de que salga una cara y una cruz, esto se podría dividir en dos sucesos elementales distintos, que salga primero cara y luego cruz, o que salga cruz y luego cara. Por tanto la probabilidad de que salgan dos caras sería $1/4$.

Probabilidad geométrica

Cuando el espacio muestral de un experimento es una región infinita sobre la que hay definida una medida (longitud, área, volumen, etc.), la regla de Laplace se puede generalizar como establecemos en la siguiente definición.

Definición 2.4.1. *Sea Ω una región sobre la que hay definida una medida μ . Consideremos el experimento de elegir un punto de Ω al azar y supongamos que $\mu(\Omega) < \infty$.*

Sea $A \subseteq \Omega$ un subconjunto arbitrario con medida finita. La probabilidad de que un punto elegido al azar se encuentre en A se define como:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Existen multitud de problemas de probabilidad geométrica que pueden resolverse mediante esta extensión de la regla de Laplace. El inconveniente principal es que a veces la expresión “al azar” se puede definir de distintas formas, dando lugar a distintas soluciones de un mismo problema. Un ejemplo es la famosa paradoja de Bertrand, que exponemos a continuación.

Paradoja de Bertrand (1889)

Se dibuja una cuerda al azar en una circunferencia de radio R y deseamos calcular cuál es la probabilidad de que la cuerda sea más larga que el lado del triángulo equilátero que está inscrito en la circunferencia. Bertrand propone tres soluciones a este problema:

1. Cada punto del círculo determina una única cuerda tomando como centro dicho punto (Figura 2.11):

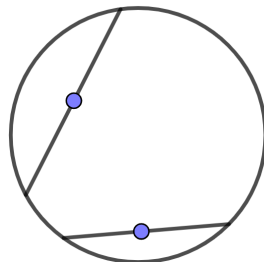


Figura 2.11: Determinación del punto medio (elaboración propia).

Como observamos en la Figura 2.12, la longitud de la cuerda es mayor que el lado del triángulo que está inscrito si su punto medio es interior al círculo inscrito en el triángulo ya mencionado.

Por tanto, el problema es calcular la probabilidad de que el punto que hemos elegido al azar esté dentro del círculo que está inscrito en el triángulo. Esta probabilidad la podemos obtener haciendo el cociente entre las áreas de los dos círculos.

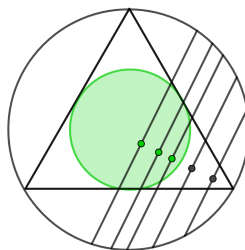


Figura 2.12: Círculo inscrito en el triángulo (elaboración propia).

Si tenemos que R es el radio del círculo inicial, el radio del círculo que está inscrito en el triángulo sería $R/2$ (Figura 2.13), y la probabilidad que buscamos sería:

$$\frac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

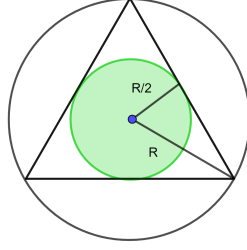


Figura 2.13: Radio del círculo concéntrico (elaboración propia).

En este caso, Ω es el círculo original de radio R y el suceso de interés es el círculo concéntrico de radio $R/2$.

2. Otra solución que propone es obtener las posibles cuerdas, fijando un punto al azar en la circunferencia y uniéndolo con cualquier otro punto de la circunferencia. En la Figura 2.14 se ha tomado como punto uno de los vértices del triángulo que está inscrito.

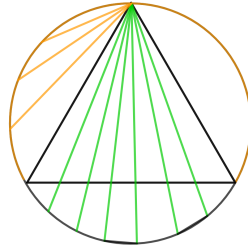


Figura 2.14: Unión de puntos al azar (elaboración propia).

Así para resolver el problema lo que hay que hacer es elegir, dentro del intervalo de longitud $2\pi R$, un punto en la circunferencia y calcular la probabilidad de que la longitud de la cuerda que surge a raíz de este punto sea mayor que la longitud del lado del triángulo.

Para que esto sea posible, el punto tiene que estar en el arco inferior de la circunferencia, y como se trata de un triángulo equilátero, los tres arcos que determinan los vértices van a tener la misma longitud. Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$\frac{2\pi R/3}{2\pi R} = \frac{1}{3}$$

En este caso, Ω es la circunferencia de longitud $2\pi R$ y el suceso de interés es el arco de longitud $\frac{2\pi R}{3}$.

3. La tercera solución propone elegir un radio del círculo, escoger al azar un punto del radio y trazar la cuerda perpendicular al radio, que pasa por este punto (Figura 2.15).

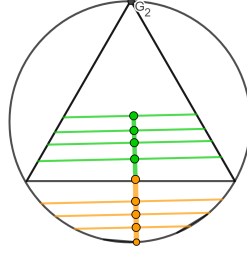


Figura 2.15: Trazado de cuerdas perpendiculares al radio (elaboración propia).

Dibujamos el triángulo inscrito de forma que uno de sus lados dividen al radio en dos mitades. El punto medio de la cuerda tendría que estar en el segmento interior del lado del triángulo para que la longitud de dicha cuerda sea mayor que la longitud del lado del triángulo.

El problema se resume en calcular la probabilidad de que el punto medio de la cuerda, que hemos elegido al azar, caiga en un intervalo de longitud $R/2$. Esta probabilidad es:

$$\frac{R/2}{R} = \frac{1}{2}.$$

En este caso, Ω es el radio de longitud R y el suceso de interés el segmento de longitud $R/2$.

2.4.2. Principio de regularidad de frecuencias. Definición frecuentista de probabilidad

La concepción frecuentista de probabilidad comenzó a desarrollarse a finales del siglo XIX, tras las críticas a la definición de Laplace.

La definición se formalizó en 1928 en la obra *Probability, Statistics and Truth* de Richard von Mises.

La definición está basada en el concepto de frecuencia relativa de un suceso asociado a un experimento aleatorio e identifica la probabilidad de dicho suceso con su frecuencia relativa, cuando el número de veces que se realiza el experimento tiende a infinito.

2.4.3. Frecuencias

Definición 2.4.2. Sea A un suceso de un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es Ω . Si realizamos n veces el experimento y el suceso A se verifica n_A veces, se llama frecuencia absoluta del suceso A a esta cantidad n_A .

A continuación resaltaremos cuatro propiedades importantes de las frecuencias absolutas de los sucesos de un experimento aleatorio.

- $n_{\emptyset} = 0$. La demostración es muy sencilla:

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega \text{ y } \Omega \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow n = n + n_{\emptyset} \Rightarrow n_{\emptyset} = n - n = 0.$$

- $n_{\bar{A}} = n - n_A$. Esto se puede demostrar de la siguiente forma:

$$A \cup \bar{A} = \Omega \text{ y } \bar{A} \cap A = \emptyset \Rightarrow n = n_{A \cup \bar{A}} = n_A + n_{\bar{A}} \Rightarrow n_{\bar{A}} = n - n_A.$$

- Dados dos sucesos A y B cualesquiera, $n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$.

Esto se puede deducir de la forma siguiente:

$$A \cup B = A \cup (B - A) \text{ y } (B - A) \cap A = \emptyset \Rightarrow n_{A \cup B} = n_{A \cup (B - A)} = n_A + n_{B - A}.$$

Por otro lado también se tiene que $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$, luego

$$n_B = n_{(B - A) \cup (A \cap B)} = n_{B - A} + n_{A \cap B} \Rightarrow n_{B - A} = n_B - n_{A \cap B}.$$

Resumiendo tendríamos que: $n_{A \cup B} = n_A + n_{B - A} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$

- Dados dos sucesos A y B tales que $A \subset B$, se cumple que $n_A \leq n_B$. En efecto:

$$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B - A) \Rightarrow n_B = n_A + n_{B - A} \geq n_A + 0 = n_A.$$

Definición 2.4.3. *Llamamos frecuencia relativa al cociente*

$$fr(A) = \frac{n_A}{n}.$$

A continuación veremos una serie de propiedades.

- La frecuencia relativa de un suceso cualquiera toma valores entre 0 y 1.

$$0 \leq fr(A) \leq 1.$$

Claramente si realizamos n veces el experimento, la frecuencia absoluta de cualquier suceso verifica $0 \leq n_A \leq n$ y, por tanto, $0 \leq fr(A) \leq 1$.

- Si tenemos dos sucesos A y B que son incompatibles, entonces:

$$fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B).$$

Se puede ver que si al realizar n pruebas sucesivas se tiene que el suceso A se verifica en n_A veces y el suceso B en n_B veces, como el suceso $A \cup B$ se verificaría $n_A + n_B$ veces al ser incompatibles, tendríamos que:

$$fr(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = fr(A) + fr(B).$$

- Si tenemos dos sucesos A y B cualesquiera, entonces:

$$fr(A \cap B) = fr(A) + fr(B) - fr(A \cup B).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} fr_{A \cup B} &= \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B - n_{A \cap B}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} - \frac{n_{A \cap B}}{n} \\ &= fr(A) + fr(B) - fr(A \cap B). \end{aligned}$$

Definición 2.4.4. Sea A un suceso asociado a un experimento aleatorio. Supongamos que el experimento se repite n veces, de las cuales, el suceso A aparece n_A veces. Entonces, se define la probabilidad de A

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} fr(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n},$$

siempre que este límite exista.

El principal inconveniente de esta concepción de probabilidad es su inviabilidad en la vida real; es prácticamente imposible conseguir repetir un experimento infinitas veces bajo las mismas condiciones, por lo que no se podrá asegurar si las frecuencias relativas correspondientes a un suceso convergen o no.

Por tanto, lo único que se puede hacer es realizar el experimento numerosas veces y ver que las frecuencias relativas comienzan a estabilizarse aunque no se podrá asegurar si el valor que se le asigna es el correcto o no.

A esta probabilidad también se le puede llamar *probabilidad a posteriori* ya que solo se puede calcular cuando ya se ha repetido el experimento un gran número de veces.

2.4.4. Interpretación subjetiva de la probabilidad

Hay ocasiones en las que, aún teniendo las mismas condiciones, los experimentos no se pueden repetir y por tanto la interpretación frecuentista de la probabilidad no puede ser aplicada. Por ejemplo, en el caso de que un equipo gane o no un partido, tendríamos que considerar la probabilidad como algo que es subjetivo, ya que lo único que expresa es la creencia que se tiene sobre la posibilidad de que ocurra un suceso.

La probabilidad subjetiva es la cuantificación que una o varias personas hacen de un suceso asociado a algún experimento aleatorio que no se puede repetir, solo basándose en la información previa que ya se tiene.

En esta concepción, se entiende la probabilidad de un suceso como el *grado de creencia* que tiene un individuo sobre la ocurrencia o no de un suceso. Se basa, por tanto, en la experiencia individual. La persona evalúa las posibilidades y asigna los valores de acuerdo a los hechos previos que conoce.

Esta interpretación de la probabilidad se originó en el siglo XVIII, gracias a los trabajos de Thomas Bayes, si bien su consolidación no se produjo hasta el siglo XX, de la mano de probabilistas como Frank P. Ramsey (1903-1930), Bruno De Finetti (1906-1985) y Leonard Jimmie Savage (1917-1971). La crítica principal que recibe la interpretación subjetiva de la probabilidad hace referencia a que, ante un mismo fenómeno, dos individuos distintos podrían efectuar asignaciones de probabilidad diferentes. Para salvar este inconveniente, el individuo debe cuantificar y ordenar sus grados de creencia de acuerdo con una serie de principios o postulados de coherencia, que garantizan que la concepción subjetiva de la probabilidad es racional. Estos principios permiten el desarrollo de una teoría axiomática de la probabilidad subjetiva, cuya formalización puede considerarse equivalente a los axiomas de la teoría de Kolmogorov, que estudiaremos en la Sección [2.5](#).

2.5. Espacio probabilístico. Definición axiomática de probabilidad

El matemático Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) fue quien desarrolló la concepción axiomática de la probabilidad, que unifica todas las teorías anteriores. En 1933 publicó un trabajo sobre los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad, donde se recoge la siguiente definición axiomática de probabilidad.

2.5.1. Definición axiomática de probabilidad

Definición 2.5.1. Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$, asociado a un experimento aleatorio, una función de probabilidad sobre este espacio es una función de conjunto $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica tres axiomas:

1. Axioma de no negatividad:

$$P(A) \geq 0, \text{ para todo } A \in \mathcal{A}.$$

2. Axioma del suceso seguro:

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Axioma de σ -aditividad:

$$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

Para cada $A \in \mathcal{A}$, el valor $P(A)$ se denomina probabilidad del suceso A .

Definición 2.5.2. La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se denomina espacio de probabilidad o espacio probabilístico.

Definición 2.5.3. Sea $A \in \mathcal{A}$:

- Diremos que A es un suceso imposible $\Leftrightarrow P(A) = 0$.
- Diremos que A es un suceso seguro $\Leftrightarrow P(A) = 1$.

En particular, el suceso vacío $(\emptyset)$ es un suceso imposible (Teorema 2.5.1) y el espacio muestral (Ω) es un suceso seguro (Axioma 2). El recíproco no es cierto en general.

2.5.2. Propiedades de la probabilidad

Las siguientes propiedades, teoremas y corolarios se deducen directamente de los axiomas de Kolmogorov.

Teorema 2.5.1. La probabilidad del vacío es nula, es decir, $P(\emptyset) = 0$.

Demostración. Consideremos una sucesión de sucesos todos ellos iguales al suceso imposible, esto es:

$$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad A_i \in \mathcal{A}, \quad A_i = \emptyset \quad \forall i.$$

Claramente se cumplen las condiciones del tercer axioma porque estos sucesos son a su vez incompatibles, por lo que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset\right) = P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

Entonces se llegaría a la igualdad siguiente:

$$P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset).$$

La única solución posible de esta igualdad es $P(\emptyset) = 0$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Teorema 2.5.2. Propiedad de aditividad. Sean $\{A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, $A_i \in \mathcal{A} \forall i$, $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$, entonces la probabilidad de la unión de los sucesos es igual a la suma de las probabilidades. Esto es:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Demostración. Consideremos la sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, con $A_i = \emptyset, \forall i > n$. Como son sucesos mutuamente excluyentes y se cumple que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$, el resultado lo podemos obtener a partir del axioma de σ -aditividad y teniendo en cuenta que $P(\emptyset) = 0$, se tiene que $P(A_i) = 0, \forall i > n$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

$\square$

Corolario 2.5.1. Propiedad del complementario. Sea $A \in \mathcal{A}$, se tiene que la probabilidad de $\bar{A}$ es igual a uno menos la probabilidad de A ; es decir: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Demostración. Puesto que A y $\bar{A}$ son disjuntos, podemos aplicar el Teorema 2.5.2 obteniendo que: $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Dado que $A \cup \bar{A} = \Omega$, en virtud del Axioma 2, tenemos que $P(A \cup \bar{A}) = 1$.

Uniendo ambas igualdades y despejando $P(\bar{A})$ tenemos la expresión deseada.

$\square$

Corolario 2.5.2. Para todo $A \in \mathcal{A}$ se cumple que la probabilidad de A toma valores entre cero y uno; esto es: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Demostración. Por el axioma de no negatividad tenemos que $P(A) \geq 0$. La desigualdad que nos falta la vamos a deducir por reducción al absurdo: Si $P(A) > 1$, por la propiedad del complementario se tendría que $P(\bar{A}) = 1 - P(A) < 0$, y esto no podría ser ya que contradice el axioma de no negatividad.

□

Teorema 2.5.3. Sean $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene que la probabilidad de la diferencia es igual a la probabilidad de A menos la probabilidad de la intersección. Esto es $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Demostración. Descomponemos A como unión de dos sucesos incompatibles:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B).$$

Entonces utilizando el Teorema 2.5.2 tendríamos que $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ y el resultado se obtiene de forma inmediata despejando $P(A - B)$.

□

Corolario 2.5.3. Sean $A, B \in \mathcal{A}$ y $B \subseteq A$, se tiene que la probabilidad de la diferencia es igual a la diferencia de las probabilidades. Esto es: $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

Demostración. Lo vamos a deducir a partir del Teorema 2.5.3, teniendo en cuenta que si $B \subseteq A$ entonces tendríamos que $A \cap B = B$ y así pues:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B).$$

□

Corolario 2.5.4. Regla de adición. Dados dos sucesos $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene que la probabilidad de la unión de los sucesos es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos menos la probabilidad de la intersección. Esto es: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demostración. Para probar esta propiedad, expresamos $A \cup B$ como unión de sucesos disjuntos:

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

Utilizando la propiedad de aditividad, obtenemos que:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

y aplicando el Teorema 2.5.3, tenemos que $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ y $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$. Sustituyendo estas expresiones en la igualdad anterior, obtenemos el resultado buscado.

□

Teorema 2.5.4. Principio de inclusión-exclusión: Sean $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \end{aligned}$$

Demostración. La demostración de esta propiedad se hará razonando por inducción sobre n :

Para $n = 1$ es inmediato ya que $P(A_1) = P(A_1)$.

Para $n = 2$ tenemos que $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$, en virtud de la regla de adición.

Supongamos que la hipótesis es cierta para $n - 1$, es decir que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \end{aligned}$$

Lo vamos a demostrar para n . Aplicando la regla de adición, tenemos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right).$$

Usando ahora la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección, y utilizando de nuevo la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_n) + \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ j < i < k}}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n) - \dots \\
&\quad \dots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right)
\end{aligned}$$

y la propiedad queda probada sin más que sustituir esta expresión en la anterior y reordenar las sumas.

□

Teorema 2.5.5. Monotonía. *Si tenemos dos sucesos A y $B \in \mathcal{A}$ tales que A está contenido en B , entonces la probabilidad del suceso A es menor o igual que la probabilidad del suceso B . Esto es: $P(A) \leq P(B)$.*

Demostración. Puesto que $A \subseteq B$, podemos escribir $B = A \cup (B - A)$. Como ambos elementos en los que hemos descompuesto B son disjuntos, podemos aplicar el Teorema 2.5.2 y tendríamos que:

$$P(B) = P(A) + P(B - A).$$

Por otro lado, por el primer axioma de Kolmogorov, tenemos que todos los elementos de la igualdad anterior son positivos o nulos; en particular, $P(B - A) \geq 0$, por tanto $P(A) \leq P(B)$.

□

Corolario 2.5.5. Propiedad de subaditividad. *Si tenemos una colección finita o infinita numerable de sucesos, la probabilidad de la unión de los sucesos es siempre menor o igual que la suma de las probabilidades.*

$$\begin{aligned}
(i) \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} &\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i). \\
(ii) \quad \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} &\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).
\end{aligned}$$

Demostración.

(i) Es consecuencia inmediata de (ii) sin más que tomar $A_i = \emptyset$, $\forall i > n$, y teniendo en cuenta que $P(\emptyset) = 0$.

(ii) Definimos una sucesión nueva $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de la siguiente forma,

$$B_1 = A_1 \text{ y } B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j, \quad i \geq 2.$$

Es claro que los sucesos $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ son mutuamente excluyentes, cada B_i contiene los elementos de A_i que no pertenecen a A_j con $j < i$, y cumplen que:

(a) $B_i \subseteq A_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

(b) $\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$

Por tanto, utilizando el axioma de σ -aditividad y la propiedad de monotonía, concluimos que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

como queríamos demostrar.

□

Teorema 2.5.6. Desigualdad de Bonferroni. *Si tenemos una colección finita de sucesos, la probabilidad de la unión de los sucesos es mayor o igual a la suma de las probabilidades de los sucesos menos sus intersecciones.*

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(A_i \cap A_j).$$

Demostración. Para realizar la demostración razonamos por inducción sobre n .

Para $n = 2$, por la regla de adición, $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ y, siendo cierta la igualdad, se verifica la desigualdad.

Ahora si suponemos que la desigualdad es cierta para n sucesos, vamos a probarlo para $n + 1$. Utilizando la regla de adición, podemos escribir:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right),$$

y aplicando la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección en el último sumando tenemos que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right).$$

Usando la hipótesis de inducción en el primer sumando, obtenemos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j=1, i < j}^n P(A_i \cap A_j).$$

Por otro lado, por la propiedad de subaditividad:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i \cap A_{n+1}).$$

Entonces teniendo en cuenta estas desigualdades se obtiene

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &\geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(A_i \cap A_j) + P(A_{n+1}) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i \cap A_{n+1}), \end{aligned}$$

y si reordenamos las sumas concluimos que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{n+1} P(A_i \cap A_j).$$

□

Teorema 2.5.7. Desigualdad de Boole. Si tenemos una colección finita o infinita numerable de sucesos, se cumple que la probabilidad de la intersección de los sucesos es siempre mayor o igual que uno menos la suma de las probabilidades de los complementarios.

$$(i) \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\overline{A_i}).$$

$$(ii) \quad \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{+\infty} P(\overline{A_i}).$$

Demostración.

(i) Por las leyes de De Morgan, tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \overline{\left(\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}\right)}.$$

Expresando la probabilidad de este suceso en términos de la probabilidad del complementario, y aplicando la propiedad de subaditividad, concluimos que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\overline{\left(\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}\right)}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\overline{A_i}).$$

(ii) La demostración es totalmente análoga teniendo en cuenta ahora que

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}\right)},$$

y la subaditividad para uniones numerables.

□

Teorema 2.5.8. Propiedad de continuidad. Sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, una sucesión monótona de sucesos, entonces, existe el límite de la probabilidad de la sucesión y este es igual a la probabilidad del límite de la sucesión.

$$\exists \lim_{i \rightarrow +\infty} P(A_i) = P\left(\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i\right)$$

Demostración. Suponemos que la sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es creciente, y se tendría que $\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A$.

A continuación, construimos una sucesión $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tomando $B_1 = A_1$, $B_n = A_n - A_{n-1}$, $\forall n \geq 2$ y claramente,

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_i \bigcup \left(\bigcup_{n=i+1}^{+\infty} B_n\right), \quad \forall i \geq 1.$$

Como cada suceso B_n excluye al suceso A_{n-1} y por ello también se excluirían a los A_i y los B_i con $i < n$, los sucesos que se encuentran en la unión en el miembro derecho de la igualdad anterior son mutuamente excluyentes y, aplicando el axioma de σ -aditividad, se tiene que

$$P(A) = P(A_i) + \sum_{n=i+1}^{+\infty} P(B_n), \quad \forall i \geq 1.$$

O, equivalentemente,

$$P(A_i) = P(A) - \sum_{n=i+1}^{+\infty} P(B_n), \quad \forall i \geq 1.$$

Entonces, esta propiedad quedaría probada si demostramos que

$$\exists \lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{n=i+1}^{+\infty} P(B_n) = 0.$$

Esto se obtiene de que $\sum_{n=i+1}^{+\infty} P(B_n)$ es el resto de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$, que es convergente ya que, por la propiedad de σ -aditividad, esta serie es $P(\cup_{n=1}^{+\infty} B_n)$.

Ahora vamos a suponer que la sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es decreciente, y en este caso se tendría que $\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i = \cap_{i=1}^{+\infty} A_i$.

Como tenemos que la sucesión $\{\overline{A_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es creciente, tendríamos que

$$\exists \lim_{i \rightarrow +\infty} P(\overline{A_i}) = P\left(\lim_{i \rightarrow +\infty} \overline{A_i}\right)$$

siendo

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \overline{A_i} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i} = \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right)} = \overline{\left(\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i\right)}.$$

Finalmente, uniendo ambas igualdades y utilizando la propiedad del complementario concluimos que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} P(\overline{A_i}) = P\left(\lim_{i \rightarrow +\infty} \overline{A_i}\right) = 1 - P\left(\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i\right),$$

luego,

$$1 - \lim_{i \rightarrow +\infty} P(A_i) = 1 - P\left(\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i\right)$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} P(A_i) = P\left(\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i\right).$$

□

Capítulo 3

Fundamentación didáctica

En este Capítulo se van a analizar algunas investigaciones relacionadas con el enfoque didáctico del tema elegido en el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje; concretamente las referencias: (Batanero, 2001), (Batanero y Díaz, 2011), (Belfiori, 2014), (Beltrán-Pellicer, 2017) y (Beltrán-Pellicer, Begué y Roldán López de Hierro, 2020).

3.1. Problemas en la enseñanza del Cálculo de Probabilidades y la Estadística

En la actualidad, ha aumentado el interés por enseñar Cálculo de Probabilidades y Estadística como una parte de las Matemáticas. Esto se debe a que la Estadística no solo es útil para investigar y para la vida profesional en general, sino también una herramienta de gran utilidad en otras ciencias como son Biología, Física, etc.

Hoy en día, aunque en los libros de texto de primaria y secundaria se incluye la enseñanza de Cálculo de Probabilidades y Estadística, gran parte del profesorado que la imparte, lo hace de manera muy breve y generalizada, de forma muy abstracta sin apenas poner ejemplos de la vida real e incluso, en ocasiones, no se imparte por falta de tiempo, ya que suele estar al final de la programación de los contenidos del curso.

Algunos de los problemas a los que se enfrenta el profesorado que imparte esta asignatura son, por un lado, los continuos cambios que sufre esta disciplina en la actualidad, y, por otro, que cada vez se está alejando más de las matemáticas puras.

Además, uno de los problemas más notables, radica en las escasas investigaciones

que hay sobre la didáctica del Cálculo de Probabilidades y la Estadística, lo que dificulta que el profesorado entienda cuáles son los problemas que tiene el alumnado en la comprensión de los conceptos más importantes de esta rama.

El objetivo de las investigaciones en Matemáticas en el ámbito didáctico es llegar a descubrir por qué los alumnos realizan erróneamente algunas tareas o incluso no consiguen ni siquiera dar respuesta. Esto puede deberse a que quizás la tarea fuese muy difícil para el estudiante en concreto, pero a menudo se observa que los errores no se producen de forma aleatoria, sino que se repiten y que además dependen también del tipo de tarea y de las circunstancias en las que el alumnado se encuentre.

El principal motivo por el cual el alumnado comete errores en la ejecución de los ejercicios es debido a las diferentes creencias o concepciones que tienen sobre una misma idea matemática. En las investigaciones en didáctica se ha descubierto que estas concepciones, en ocasiones, les ayudan a resolver tareas pero otras veces las utilizan en tareas más generales y entorpecen su resolución. Cuando el alumno se niega a cambiar esta concepción, estaríamos ante la aparición de un obstáculo.

El más importante que nos encontramos ocurre cuando el alumnado utiliza el conocimiento que tiene sobre algo en un contexto que no es el adecuado, produciendo una respuesta errónea. Es muy importante que el alumno se dé cuenta de este obstáculo, lo rechace y así pueda adquirir un conocimiento más amplio.

Se distinguen diferentes tipos de obstáculos (Batanero, 2001):

- Ontogénicos o psicogenéticos: se deben al desarrollo que tenga cada niño.
- Didácticos: se producen cuando un concepto ha sido enseñado de forma equivocada.
- Epistemológicos: están asociados al propio significado del concepto en sí.

En muchas ocasiones, el alumnado presenta estos tipos de obstáculos debido a la forma en que le han sido enseñados determinados conceptos. En el caso de esta materia, en concreto, el Bloque de Estadística y Probabilidad, siempre aparece al final de la programación del curso. Por este motivo, gran parte del profesorado que la imparte, suele explicarlo de forma rápida y sin poder dedicarle todo el tiempo que necesita. A menudo ocurre que, durante varios cursos consecutivos, al profesorado no le da tiempo a dar todo el temario que está estipulado por la normativa vigente, y en este caso, cuando el alumnado llega a cursos superiores, no tienen una base consolidada de los conocimientos relevantes de este bloque, lo que provoca serias dificultades a la hora de

adquirir competencias y contenidos avanzados, relacionados con Estadística y Probabilidad. Una posible solución sería alterar el orden de los contenidos para que no siempre se imparta al final del curso este bloque.

3.2. Recursos TIC en la enseñanza del Cálculo de Probabilidades y la Estadística

En la actualidad, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) están presentes tanto en nuestra sociedad como en la enseñanza educativa y su desarrollo ha provocado notables cambios en numerosos ámbitos, como es la economía, la cultura o la política.

La presencia de las TIC en la educación facilita, en gran medida, el proceso de aprendizaje de muchas materias, ya que con ellas se consigue que la enseñanza sea más dinámica que la tradicional. Además, permiten utilizar estrategias innovadoras que motivan el interés del alumnado por los contenidos que se están impartiendo.

En la actualidad, parte del presupuesto que cada estado destina a la educación, se utiliza para introducir las nuevas tecnologías en los institutos y en los colegios, modificando las infraestructuras, reorganizando el espacio y dotando las aulas de material tecnológico, como ordenadores, pizarras electrónicas, etc.

La Estadística se beneficia enormemente de estas herramientas digitales, que permite aumentar la variedad de problemas y ejercicios que pueden realizar los estudiantes, así como las estrategias para su resolución, ya que se pueden ayudar de programas, aplicaciones online y muchos otros recursos educativos que se ofrecen en Internet.

A continuación se indican distintos tipos de recursos que se pueden utilizar para la enseñanza de la Estadística y el Cálculo de Probabilidades:

■ Ordenadores y calculadoras

Para la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística es muy común la utilización de calculadoras gráficas, que permiten intercambiar datos desde Internet y transferirlos a la calculadora de manera inmediata. Permiten, asimismo, transformar y manejar listas de datos, hacer cálculos estadísticos y gráficos de una o varias variables, así como la realización de tablas estadísticas sencillas.

En cuanto al ordenador, se pueden destacar numerosas formas de uso. Es interesante iniciar al alumnado en el uso de programas informáticos sencillos (Geogebra,

Excel, etc.), que permitan complementar las explicaciones de clase y experimentar con los conceptos estudiados en cada lección, además de realizar cálculos en poco tiempo, lo que facilita mucho el trabajo de los estudiantes y les permite dedicar más tiempo a actividades de comprensión e interpretación.

Por otra parte, a través del ordenador, pueden utilizar gráficos interactivos, pueden compartir sus tareas con otros compañeros para trabajar al mismo tiempo y también utilizarlo como procesador de textos, ya que les será de gran utilidad saber escribir de forma detallada un informe estadístico sobre lo que están investigando y sobre los resultados obtenidos.

■ Recursos en Internet

Internet está suponiendo una revolución en la enseñanza; en este apartado nos centraremos en diferentes programas y páginas de Internet que permiten hacer una enseñanza más dinámica de la Estadística y Probabilidad.

Por ejemplo, los *applets*, son aplicaciones que para ejecutarse necesitan otro programa, normalmente un navegador web. Los más conocidos en el ámbito educativo son los *applets* que se ejecutan en Flash, que es un software distribuido por Adobe y que este año desaparecerá, por lo que páginas como *Active Maths*, permiten descargar de forma gratuita sus materiales hasta que deje de funcionar. Un ejemplo de *applet* se muestra en la Figura 3.1, donde se pide que cada tabla de frecuencias se asocie a su ruleta correspondiente.

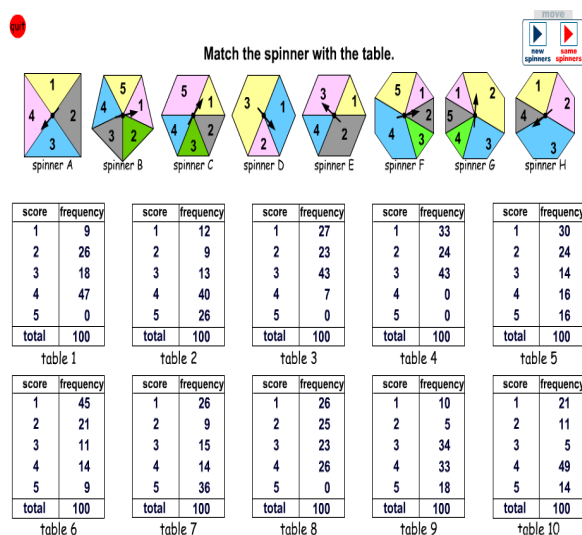


Figura 3.1:

Applet de la página *Active Maths*: <http://www.active-maths.co.uk/>

Y de este tipo podemos encontrar una gran cantidad de ejercicios y de juegos de estadística y de otras áreas de las matemáticas, así como también de diferentes cursos para que se puedan adaptar a los distintos niveles de los alumnos.

Hay que destacar también la web divulgativa del Instituto Nacional de Estadística, *Explica*: <https://www.ine.es/explica/explica.htm>, donde podemos encontrar diferentes actividades, juegos y vídeos de contenidos, relacionados con la estadística y que son fáciles de entender por un público no especializado. Su objetivo es conseguir que se entiendan los conceptos básicos que se utilizan en un trabajo estadístico y fomentar un uso adecuado de la Estadística.

También destaca, por la gran cantidad de *applets* que ofrece para la enseñanza en secundaria, el *Laboratorio básico de azar, probabilidad y combinatoria*, que podemos encontrar en: https://www.matematicasonline.es/mas_mates/laboratorio/index.html, y que en 2010 fue premiando con el primer premio de Materiales Educativos del Ministerio de Educación.

■ Modelado e impresión 3D

Este recurso resulta muy llamativo y de gran interés para el alumnado. Se les podría encargar que mediante un programa de modelado, diseñaran algún elemento, relacionado con los contenidos que estén estudiando, que posteriormente puedan imprimir y conservar.

Un ejemplo muy interesante es el que propone (Beltrán-Pellicer, 2017), que consiste en el modelado y fabricación de un dado. Para ello los alumnos deben tener en cuenta muchos factores, por un lado, aspectos de la fabricación del mismo, como por ejemplo cuál es la mejor forma para que el dado ruede más, e incluso la cantidad de material a utilizar, y por otro lado tienen que tener en cuenta que el dado debe tener todas sus caras equiprobables. Una vez construido el dado, los alumnos deberán probar cada uno el suyo y concluir, a partir de un número elevado de lanzamientos, si ha sido una buena fabricación, es decir, si su dado está equilibrado o no.

3.3. Estadística basada en proyectos

En general, la utilización de proyectos educativos incentiva la motivación de los alumnos por el estudio de la materia en sí.

A lo largo de la historia de la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística, se han utilizado, a menudo, problemas descontextualizados, problemas que no tienen un

contenido significativo y que no indican situaciones reales. Si algo caracteriza a la Probabilidad y la Estadística es el estudio de datos reales, por lo que una de las ventajas de trabajar con proyectos es precisamente la posibilidad de analizar situaciones reales y manejar datos recopilados por los propios estudiantes.

Existen distintos puntos positivos del aprendizaje basado en proyectos (ABP):

- Si se trabaja con datos que tienen significado, los resultados pueden ser interpretados, lo que permite situar a la Probabilidad y la Estadística en un contexto conocido por el alumnado y dotarlas de importancia.
- El alumnado puede elegir el tema a resolver; esto hace que aumente su interés, ya que no es algo que el profesor les haya impuesto.
- Al trabajar con datos reales, el alumnado pone más empeño en su realización y consigue tener más precisión y fiabilidad.
- Permite mostrar al alumnado que la Probabilidad y la Estadística no solo trabajan con contenidos matemáticos teóricos.

Resulta fundamental saber elegir los proyectos y sobre todo saber trabajar con ellos, ya que es muy importante que sean apropiados para el nivel que tiene el alumnado.

Los proyectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la Estadística constan de las siguientes fases (Figura 3.2):

- **Fase 1.** La primera fase y la más importante es la elección del tema del proyecto, elegir cuál es el problema sobre el que se va a investigar y sobre el que va a tratar nuestro proyecto.
- **Fase 2.** Esta fase, que consiste en el planteamiento de preguntas, es sin duda la más complicada, ya que al principio, los problemas pueden no estar bien formulados y el profesor deberá encargarse de guiar, al alumnado, desde la visión general del problema hacia un contexto más concreto, mediante la formulación de preguntas específicas.
- **Fase 3.** En esta fase, el alumnado ha de investigar y de recopilar los datos que considere útiles para el desarrollo de su proyecto.
- **Fase 4.** Una vez recogidos todos los datos de interés para sus trabajos, deben organizarlos, analizarlos e interpretarlos.

- **Fase 5.** Por último, el alumnado debe resolver el problema a partir de los datos que ha recopilado y ordenado. Una vez resuelto, deberá escribir de forma detallada y rigurosa el informe de su investigación.

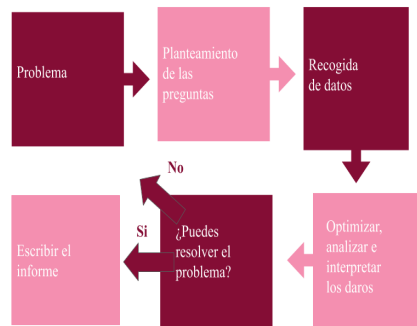


Figura 3.2: Fases de un proyecto (elaboración propia).

Algunos ejemplos de preguntas para intentar guiar la investigación serían:

- * ¿Qué hay que solucionar? ¿Qué necesitas buscar/observar/medir?
- * ¿Cuáles son los datos que necesitas? ¿Cómo vas a buscar los datos? ¿Qué harás con ellos?
- * ¿Tendrás dificultades? ¿Qué tipos de problemas crees que te vas a encontrar?
- * ¿Crees que encontrarás la solución? ¿De qué te van a servir los resultados?

Con la utilización de proyectos para el aprendizaje de contenidos estadísticos, se pretende, por una parte, que el alumnado ejercite técnicas para el resumen, análisis e interpretación de la información contenida en un conjunto de datos y, por otra, que mejore su creatividad y su capacidad de formulación y argumentación.

En efecto, con este tipo de metodología, el alumnado aprende a recoger datos, organizarlos, almacenarlos, y a saber representar los resultados, ya que ellos mismos son los que tienen que elegir qué datos son necesarios para sus trabajos y desechar los que no les sean útiles. Por el contrario, esto no lo aprenderían si trabajasen solo sobre ejercicios de los libros de texto, porque son problemas que suelen venir con todos los datos dados.

Otra ventaja que tiene la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística de esta forma es que los estudiantes aprecien el verdadero trabajo que supone la creación de los

estudios estadísticos oficiales que se realizan a nivel nacional e internacional, y aprendan la importancia de diferenciar si la información que estos nos muestran es fiable o no.

En conclusión, las competencias más importantes que adquiere el alumnado al trabajar con proyectos se pueden resumir como sigue:

- *Competencia en comunicación lingüística.* Trabajar con proyectos fomenta el uso del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita, de representación, interpretación y comprensión de la realidad, de construcción y transmisión del conocimiento y de organización del pensamiento.
- *Competencia matemática.* En el desarrollo de los proyectos se requiere la utilización correcta de números (enteros, decimales y fraccionarios) y símbolos matemáticos, así como la realización de operaciones básicas y la correcta aplicación del razonamiento matemático. Además, trabajar con proyectos permite al alumnado integrar el conocimiento matemático con el de otras disciplinas.
- *Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.* El trabajo con proyectos permite trabajar con datos reales y tratar problemas de la actualidad, además de obtener conclusiones que están fundamentadas en pruebas.
- *Tratamiento de la información y competencia digital.* Los proyectos ayudan al alumnado a aprender a utilizar ordenadores, calculadoras, programas informáticos y a adquirir habilidades de razonamiento para relacionar, analizar y sintetizar información.
- *Competencia social y ciudadana.* A través de la realización de proyectos se fomenta el trabajo en grupo y la cooperación. Además, determinados proyectos pueden ayudar a los estudiantes a comprender la realidad en la que vivimos y la necesidad de mejorarla.
- *Competencia para aprender a aprender.* Esta competencia la desarrolla el alumnado al plantearse numerosas preguntas que después tendrá que resolver. Además, tiene que saber tomar decisiones y emplear diferentes técnicas para obtener resultados coherentes e interpretarlos.
- *Autonomía e iniciativa personal.* Trabajar con proyectos fomenta que el alumnado elija su propio tema y que escoja las mejores estrategias para resolver los diferentes problemas que les puedan surgir.

Capítulo 4

Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica

En este capítulo se va a desarrollar una unidad didáctica en la especialidad de Matemáticas. Se va a tener en cuenta la contextualización del centro y del aula, los objetivos, las competencias clave, la metodología, la atención a la diversidad y la evaluación.

4.1. Título

“Cálculo de Probabilidades” será el título de la unidad didáctica que se va a desarrollar. Es una unidad dirigida al alumnado de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), que cursa las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, asignatura troncal según el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre (BOE).

4.2. Justificación

Dentro del Bloque 5: “Estadística y Probabilidad”, podemos encontrar un tema relacionado con “Cálculo de Probabilidades” que aparece, normalmente, como el último tema del libro de texto.

En los cursos de 1º y 2º de ESO, solo se estudia el Cálculo de Probabilidades mediante la Regla de Laplace en experimentos sencillos. En 3º de ESO, se añade también como contenido, la utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

Como ya hemos indicado, nosotros nos centraremos en el curso de 4º de ESO, en las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, cuyos contenidos profundizan mucho más en los conceptos, resultados y técnicas del Cálculo de Probabilidades.

Estos contenidos se complementan con los de Matemáticas II de 2º de Bachillerato, donde ya se introduce el concepto de probabilidad bajo la axiomática de Kolmogorov.

Esta unidad se llevaría a cabo en el período final del curso, debido a que la mayoría de editoriales sitúan este bloque el último.

A pesar de que, como ya mencioné en la fundamentación didáctica, a este bloque de las Matemáticas no se le suele dar mucha importancia, e incluso a veces, no se imparte con la profundidad que se debería, saber calcular probabilidades es una herramienta muy útil en la vida cotidiana. Además, aprender Estadística, que también se incluye en el Bloque 5, ayuda a saber interpretar correctamente datos y gráficos estadísticos, así como a distinguir si hay errores en la información que nos muestran, por ejemplo, los medios de comunicación.

Los contenidos aparecen especificados en el Bloque 5 del Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, en el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, y en la Orden de 14 de julio de 2016 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

4.3. Contextualización del centro y del aula

Esta unidad didáctica estará contextualizada en el Instituto de Educación Secundaria (I.E.S) Fernando III, de Martos, Jaén, donde estaba destinada a hacer las prácticas del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, prácticas que, finalmente, estoy realizando de forma online debido a la suspensión de las clases presenciales por la crisis sanitaria de COVID-19.

Para el desarrollo de esta sección se ha obtenido la información del Plan de Centro del I.E.S Fernando III Martos (Jaén).

4.3.1. Marco histórico - geográfico que envuelve al centro

Martos es un municipio eminentemente agrícola, cubierto por olivares en un 77 % de su territorio. Se encuentra a 25 km de la capital de Jaén y emplazado en la comarca denominada Campiña Sur. Es el mayor productor olivarero del mundo, y en la actualidad tiene fábricas derivadas de su agricultura, del sector de iluminación del automóvil e industrias auxiliares de éstas. Martos se sitúa entre la Campiña de Jaén y la zona noroccidental de las Sierras Sub-béticas. La población aproximada es algo más de 24000 habitantes; el término tiene una extensión de 259,16 km^2 y la ciudad se asienta en la falda de La Peña. El asentamiento urbano de Martos se realiza históricamente en la ladera de la Peña. La Peña es un promontorio natural rocoso, de forma troncocónica, última estribación de Sierra Mágina, que alcanza una altitud de 1003 m.

En esta ciudad hay dos centros públicos y dos concertados de educación secundaria. Al IES “Fernando III” se le ha asignado la zona norte de la ciudad que queda por encima del siguiente eje Este - Oeste: Barriada Niño Jesús, Travesía Perú, La Teja, Cruz del Lloro, Sevilla; se le ha asignado, además, el alumnado de Monte Lope Álvarez y Santiago de Calatrava. Parte de la zona de influencia del centro corresponde a la parte alta del núcleo urbano. Está situada en la ladera de La Peña y habitada en su mayoría por personas asalariadas y de escasos recursos económicos. Avanzando hacia el oeste llegamos a la zona baja urbana, la antigua vega, donde abundan propietarios agrícolas, pequeños industriales, profesionales liberales, etc, con un nivel socioeconómico en general más alto que en el casco antiguo. Por último, Monte Lope Álvarez y Santiago de Calatrava son núcleos pequeños eminentemente agrícolas.

4.3.2. Entorno social, económico, cultural y laboral del centro

El IES “Fernando III” tiene adscritos para 1º de ESO los siguientes CEIP: Tuc-ci y San Amador. En 3º de ESO se incorporan alumnos del CEIP “Fernando IV” de Monte Lope Álvarez y del CEIP “Santiago Apóstol” de Santiago de Calatrava. Las realidades sociales, económicas, culturales y laborales de los cuatro colectivos de alumnos y alumnas procedentes de estos centros son bien distintas, aunque lógicamente con características comunes, propias de la sociedad del entorno en el que nos movemos.

En su extenso término municipal hay una intensa actividad agrícola, donde predomina sobre todo el monocultivo del olivar, con una extensión de 22,036 hectáreas. De ellas, 21,200 hectáreas se dedican al cultivo de los olivares de secano y el resto a cultivo de olivares de regadío. Martos es el primer municipio productor de aceite de oliva del mundo. Este sector ocupa a una parte importante de la población activa. En

el sector industrial, Martos cuenta con un floreciente Polígono Industrial. En el mismo hay numerosas empresas instaladas, que desarrollan una extensa gama de actividades, que van desde la fabricación de proyectos y pilotos para automóviles, a la inyección de termoplásticos, armarios y cuadros eléctricos, troquelado de piezas, carreteras, moldes y matrices, construcciones metálicas, prendas de vestir, transformaciones de madera, ocio y hostelería. En este sentido sería digno de destacar la importante presencia de la multinacional francesa Valeo, división de iluminación, industria que directa e indirectamente genera numerosos puestos de trabajo, siendo la actividad industrial que más población concentra, al igual que un número considerable de empresas que dependen de su actividad y producción. También es digno de destacar el crecimiento continuo de la industria del plástico, que convierte a Martos en el epicentro del sector del plástico técnico en Andalucía. Cabe también destacar la actividad relacionada con la elaboración de aceites, ya que la ciudad cuenta con numerosas cooperativas, de productores, almazaras privadas, extractoras de orujo, envasadoras, laboratorios, etc.

4.3.3. Características del centro

El IES “Fernando III”, es un centro público. Comenzó funcionando en 1968 como Sección Delegada del Instituto “Virgen del Carmen” de Jaén; posteriormente, en 1974, se transformó en Instituto de Bachillerato y desde 1996 se denomina Instituto de Educación Secundaria “Fernando III”.

El centro fue construido en 1965. En 1982 se inicia la ampliación del edificio. En una primera fase se levanta el salón de actos, anfiteatro y dos servicios - vestuarios. En 1983 se une el salón de actos con el edificio central construyéndose una sala de usos múltiples y dos tutorías. Posteriormente, se transforman las dos tutorías en aulas y la sala de usos múltiples en cafetería y aula de dibujo. En 1985 se edifica una nueva ampliación consistente en once seminarios y dos laboratorios: Ciencias Naturales y Química. En 1997, con vistas a la incorporación del primer ciclo de ESO, se construyen cuatro aulas y un salón. Actualmente, y una vez finalizada la obra en el año 2013, el centro se encuentra en un buen estado, ya que lo que antes eran aulas prefabricadas, hoy lo compone un edificio nuevo para ESO, las dependencias del profesorado, administración etc.

Actualmente, las instalaciones de las que dispone el centro son:

- 21 aulas, de las cuales 17 tienen pizarra digital y 1 un proyector
- 1 aula de aprendizaje cooperativo
- 1 aula de audiovisuales

- 2 aulas TIC
- 2 laboratorios de física y química
- 1 laboratorio de biología
- 1 taller de informática
- 9 aulas de ciclos formativos de grado superior
- 2 aulas de plástica
- 1 taller de robótica
- 1 taller de tecnología
- 1 taller de informática
- 1 cafetería
- 1 salón de actos
- 1 estudio de cine
- 1 estudio de radio
- 1 aula de música
- 9 departamentos didácticos
- 1 departamento de orientación
- 1 aula de convivencia
- 1 aula de reunión de alumnos
- 1 despacho para la asociación de padres y madres del alumnado
- 1 despacho para dirección
- 1 despacho para jefatura de estudios y vicedirección
- 1 despacho para secretaría y administración
- 1 conserjería
- 2 pistas deportivas

- 1 pabellón cubierto
- 1 sala de profesores
- 1 biblioteca
- 1 pabellón industrial

La jornada del centro para todo el alumnado es de 8:15 a 14:45 con dos recreos de quince minutos: a las 10:15 y a las 12:30, respectivamente.

En cuanto a la normativa del centro, el uso de los teléfonos móviles en clase está prohibido, pero si se requiere su uso en alguna de las asignaturas, el docente enviará una autorización a los padres mediante el alumnado para que den su consentimiento y así permitan acudir a clase con él, los días que el profesor lo necesite.

4.3.4. Características del alumnado

Esta unidad didáctica se va a desarrollar en el curso de 4º de ESO, de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. La clase está formada por 20 estudiantes, 8 alumnos y 12 alumnas.

Aunque en este curso no hay ningún estudiante con necesidades específicas de apoyo educativo, se deberá ir observando la evolución que presente el alumnado en el desarrollo del aprendizaje, por si a lo largo del curso necesitan algún tipo de adaptación.

4.4. Objetivos

Según el Artículo 2 del RD 1105/2014, los objetivos que a continuación se van a especificar son *“aquellos logros que el alumnado debería de adquirir una vez finalizada cada etapa, después de haber experimentado las metodologías de enseñanza y aprendizaje correspondientes a su nivel académico”*(p.172).

Se van a distinguir tres tipos de objetivos: objetivos generales de etapa, objetivos del área de Matemáticas y objetivos concretos de la unidad.

4.4.1. Objetivos generales de etapa

Según el RD 1105/2014, la ESO contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

- (a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- (b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- (c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- (d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- (e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- (f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- (g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- (h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- (i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- (j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

- (k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- (l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

4.4.2. Objetivos del área de Matemáticas

Según la Orden del 14 de julio de 2016, la enseñanza de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en la ESO en Andalucía contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

4.4.3. Objetivos de la unidad didáctica de Cálculo de Probabilidades

Los siguientes objetivos son los específicos de la unidad didáctica “Cálculo de Probabilidades”, y van a elegirse de acuerdo a los estándares de aprendizaje, criterios de evaluación y contenidos del Real Decreto 1105/2014 y de la Orden de 14 de julio de 2016.

El alumnado, después de finalizar esta unidad didáctica, deberá de alcanzar los siguientes objetivos:

- Ob.1** Aprender a resolver posibles problemas o situaciones que se les pueda presentar en la vida real y cotidiana, aplicando el cálculo de probabilidades y otras técnicas que sean adecuadas.
- Ob.2** Saber diferenciar entre experimentos aleatorios simples y compuestos, así como la diferencia entre sucesos dependientes e independientes.
- Ob.3** Aprender a calcular probabilidades asociadas a experimentos aleatorios compuestos, utilizando diagramas de árbol y tablas de contingencia.
- Ob.4** Resolver problemas sencillos de probabilidad condicionada.
- Ob.5** Conocer la historia del origen y evolución del Cálculo de Probabilidades.
- Ob.6** Utilizar recursos TIC.
- Ob.7** Conocer la importancia del Cálculo de Probabilidades en la actualidad y la amplia variedad de aplicaciones que tiene.
- Ob.8** Familiarizarse con el Teorema de la Probabilidad Total y la Regla de Bayes.

4.5. Competencias clave

Según el Artículo 2 del RD 1105/2014 de 26 de diciembre, las competencias clave se pueden definir como *“capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos”* (p.172).

De forma más concreta, dicho artículo establece que las competencias del currículo serán las siguientes:

- a) Comunicación lingüística (CCL).
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
- c) Competencia digital (CD).
- d) Aprender a aprender (CAA).
- e) Competencias sociales y cívicas (CSC).
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP).

g) Conciencia y expresiones culturales (CEC).

Aunque es evidente que la competencia que más se trabajará en nuestra unidad didáctica es la competencia matemática, también el resto de competencias están involucradas. Concretamente, el alumnado adquirirá las distintas competencias de las siguientes formas:

■ CCL:

- Entendiendo e interpretando de forma correcta el enunciado de los ejercicios y problemas.
- Explicando y comunicando, al resto de compañeros, sus ideas de forma correcta.
- Comprendiendo los conceptos y procedimientos que se incluyan en la unidad.
- Utilizando de forma correcta el lenguaje matemático.

■ CMCT:

- Utilizando el cálculo de probabilidades para la resolución de ejercicios y problemas.
- Aplicando las fórmulas correctamente en los ejercicios.
- Entendiendo la información mostrada en los diagramas de árbol.
- Utilizando tablas de contingencia para el cálculo de probabilidades y proporciones.
- Interpretando los resultados obtenidos en los ejercicios.

■ CD:

- Utilizando herramientas TIC para la realización de actividades.
- Utilizando aplicaciones web para realizar cuestionarios.

■ CAA:

- Organizando sus propias tareas.
- Realizando sus propios esquemas de los contenidos para facilitar su estudio.
- Buscando información complementaria por su propia voluntad, sin que sea impuesto por el docente.
- Utilizando los conocimientos adquiridos en situaciones concretas.

- CSC:
 - Tratando con respeto al resto de los compañeros.
 - Resolviendo posibles conflictos mediante el diálogo.
 - Respetando la diversidad de opiniones.
- SIEP:
 - Teniendo la iniciativa de proponer soluciones a determinadas actividades y verificarlas.
 - Siendo capaz de tomar decisiones por sí mismo.
 - Sabiendo trabajar de forma individual y en grupo.
- CEC:
 - Conociendo brevemente el origen del azar y la probabilidad.
 - Conociendo en qué ámbitos de la vida real están presentes las Matemáticas y su relación con las distintas culturas y civilizaciones de la Historia.

4.6. Contenidos

Según el Artículo 2 del RD 1105/2014, los contenidos son un *“conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias.”* (p.172).

A continuación, se van a mostrar los contenidos transversales del Bloque 1 y los contenidos específicos que esta unidad va a desarrollar del Bloque 5, que están recogidos en el RD 1105/2014.

Los contenidos transversales que incluirá esta unidad didáctica del Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, son los siguientes:

- (CT.1) Planificación del proceso de resolución de problemas.
- (CT.2) Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.
- (CT.3) Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.

- (CT.4) Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- (CT.5) Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Los contenidos específicos correspondientes al Bloque 5: Estadística y probabilidad, que se desarrollarán en esta unidad didáctica son:

(CU.1) Introducción al azar. Sucesos.

- Tipos de sucesos: deterministas y aleatorios.
- Operaciones con sucesos: unión, intersección, complementario.
- Relaciones entre sucesos: inclusión, igualdad e incompatibilidad.

(CU.2) Probabilidad de un suceso. Propiedades.

(CU.3) Probabilidades en experiencias simples.

- Sucesos equiprobables.
- Regla de Laplace.

(CU.4) Probabilidades en experiencias compuestas.

- Sucesos independientes.
- Sucesos dependientes.
- Extracciones con y sin reemplazamiento.

(CU.5) Composición de experiencias independientes.

(CU.6) Composición de experiencias dependientes.

- Probabilidad condicionada. Regla de multiplicación de las probabilidades condicionadas.

(CU.7) Tablas de contingencia.

(CU.8) Diagramas de árbol.

(CU.9) Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

4.7. Metodología

Según el Artículo 2 del RD 1105/2014, se define la metodología didáctica como un *“conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados”* (p.172).

De acuerdo con la Orden de 14 de julio de 2016, el proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe caracterizarse por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral.

Es claro que, para que la metodología docente favorezca un aprendizaje dinámico y de interés para el alumnado, se deben de emplear diferentes metodologías innovadoras que despierten la motivación por aprender. Lo que se pretende es, en definitiva, provocarles la curiosidad por adquirir nuevos conocimientos.

Un tipo de metodología que favorece la motivación del alumnado y que genera aprendizajes más duraderos son las metodologías que están contextualizadas, es decir, aquellas que utilizan datos y situaciones reales para enseñar al alumnado de qué manera influyen en la vida real los contenidos que se están viendo en clase.

A continuación, se van a describir algunas metodologías que se quieren llevar a cabo en esta unidad para favorecer un aprendizaje óptimo por parte del alumnado.

Una de las metodologías que se utilizará será la metodología expositiva. Esta facilitará la explicación de nuevos conceptos y contenidos. Ocupará la mitad de la duración de la clase aproximadamente, ya que así nos aseguraremos que el alumnado esté concentrado y podremos aprovechar el resto de tiempo para implementar otro tipo de metodologías.

Otra metodología adecuada es la de gamificación, que consiste en utilizar actividades con estructura de juego para el aprendizaje del alumnado. Es una estrategia metodológica para ayudar a despertar la motivación y participación del alumnado y conseguir aumentar las “ganas de aprender”, así como favorecer la adquisición de conocimientos duraderos (Oliva, 2016).

Esta metodología la implementaremos con la realización de un Kahoot al finalizar algunas de las sesiones. Un Kahoot es un cuestionario, a modo de juego, que puede crear el docente. En él, se realizan preguntas con varias posibles soluciones. Lo divertido de este cuestionario es que premia, aparte de que se conteste de forma correcta, la rapidez y, al finalizarlo, aparecen los cinco alumnos que más rápido y de forma correcta han contestado.

La utilización de este juego sirve para motivar al alumnado a prestar atención durante las explicaciones para así conseguir contestar más rápidamente. Podemos utilizar las clasificaciones que se vayan obteniendo en estos Kahoots como parte de la evaluación de la participación en clase.

Otra actividad lúdica muy amena para el alumnado es el “Trivial de la Probabilidad” (Alba, Caballero, Castillo, Martínez, Olmo, Oya, y Ruiz, 2020), desarrollado por un grupo de profesoras de la Universidad de Jaén, que puede descargarse gratuitamente en este enlace: https://www.ujaen.es/servicios/ucc/sites/servicio_ucc/files/uploads/node_evento/2020-04/Taller%20de%20probabilidad.pdf.

Otra metodología que también se va a implementar será la metodología basada en la investigación (IBL). Es una forma de enseñar matemáticas en la que el alumnado utiliza la investigación y la experimentación. En esta metodología se pueden utilizar muchos tipos de actividades como la modelización matemática, búsqueda de recursos e ideas, análisis de documentos, experimentación, etc. (García-García, Quesada-Armenteros, Romero y Abril, 2019).

Esta metodología se llevará a cabo con alguna actividad de tipo IBL, en la que el alumnado, dividido en grupos pequeños, van a intentar resolver un problema inicial propuesto por el profesor, de forma colaborativa, y al finalizar la clase, cada grupo expone el resultado obtenido, por lo que también favorece la expresión oral.

En la medida de lo posible, se trabajará con problemas de la vida real para que los alumnos se motiven en su resolución y sean capaces de aplicar los conocimientos adquiridos en su vida cotidiana.

En definitiva, se quiere llevar a cabo una metodología motivadora, interactiva y activa, en la que el alumnado esté constantemente implicado en el transcurso de la clase, participando, ofreciendo su opinión, y sobre todo, que despierte su motivación e interés por la asignatura.

4.8. Actividades y recursos

En esta sección se van a describir las diferentes actividades que el alumnado realizará durante el desarrollo de esta unidad didáctica. Se han escogido actividades que les permitirán, comprender e interiorizar los contenidos de esta unidad y que son acordes con su nivel académico.

Los recursos que se van a utilizar para el desarrollo de esta unidad didáctica son:

- Libros de texto de la editorial Anaya y SM Savia.
- Cuaderno del alumnado.
- Pizarra, proyector, ordenadores, tablets, calculadoras.
- Internet, Youtube, Active Maths.
- Aula habitual.
- Recursos para la actividad-juego 12: una moneda, un dado, dos urnas con bolas.
- Recursos para la actividad-juego 23: tarjetas de preguntas (Figuras 4.11 y 4.12), fotocopia del tablero (Figura 4.13), un dado, una ficha para cada equipo, tres “quesitos” (rojo, azul y amarillo) por cada equipo (sirven caramelos, piezas de colores, lápices de colores), una baraja de cartas, bolas de colores (también sirven piezas de colores tipo Lego, bloques de madera de colores, etc.) y caramelos de distintos sabores (sugus, lacasitos, gominolas).

En el Anexo I, se encuentran las actividades que se van a llevar a cabo durante el desarrollo de la unidad didáctica.

4.9. Atención a la diversidad

Según el decreto 111/2016, de 14 de junio, para la etapa de la ESO, se debe de establecer un conjunto de actuaciones y estrategias que estén dirigidas a paliar las distintas capacidades que presenta el alumnado, así como los diferentes estilos de aprendizaje que presenten. Estas estrategias permiten facilitar al alumnado la adquisición de las competencias clave, así como el logro de los objetivos de la etapa.

Según el RD 1105/2014, de 26 de diciembre, el alumnado que requiere una atención educativa diferente a la ordinaria sería por:

- Necesidades educativas especiales. Es el alumnado que necesita determinados apoyos o atenciones educativas específicas debido a que presenta diferentes grados de capacidades.
- Transtorno por Déficit de Atención (TDA) y Transtorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH). Es el alumnado que tiene problemas a la hora de leer, escribir, deletrear, aún sin tener discapacidad intelectual, problemas emocionales o desventajas educativas.

- Altas capacidades intelectuales. Es el alumnado que aprende con mayor rapidez y poco esfuerzo, muestran un alto grado de inteligencia.
- Integración tardía al sistema educativo. Es el alumnado que, por ejemplo, viene de otro país y tiene problemas con el idioma.
- Condiciones personales o historia personal. Es el alumnado que presenta problemas de salud, adopción, tutela o internamiento, medidas judiciales, desventaja socioeducativa, o son deportistas de élite, entre otros.

Dependiendo de cada una de las necesidades que tenga el alumnado que forme la clase, el profesor deberá adaptar alguna de las actividades que se propongan y, en algunos casos, también se utilizará el refuerzo individual.

La mayoría de actividades que se han propuesto en la unidad pueden realizarse por todo el estudiantado.

En el caso de tener un alumno con dificultades de aprendizaje o cuyo ritmo de aprendizaje sea inferior al resto de la clase, se le podrán explicar los conceptos y las actividades de forma más lenta o explicarle la teoría con dibujos y ejemplos resueltos.

En el caso de tener un alumno de altas capacidades, le podemos añadir algún apartado más a algunos ejercicios, o hacerle preguntas de tipo reflexivo, para que desarrollen su capacidad al máximo.

Lo importante es, por un lado, que todo el alumnado consiga el desarrollo de las competencias clave y, por otro, que en ningún momento se sientan diferentes por el hecho de no tener el mismo ritmo para aprender que la mayoría de la clase. Por ello, es el profesorado el que tiene que adaptarse para que su aprendizaje sea óptimo.

4.10. Temporalización

En esta sección se va a desarrollar la temporalización de esta unidad didáctica. Los contenidos correspondientes a esta unidad se van a impartir en 10 sesiones de 55 minutos cada una. Como las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas se imparten durante cuatro horas a la semana, esta temporalización ocupará aproximadamente dos semanas y media de la programación de la asignatura.

A continuación, se va a explicar de forma detallada cada sesión, indicando los contenidos, las actividades, los objetivos que se van a cumplir, los criterios de evaluación, los recursos y la metodología que se lleva a cabo en cada una de las sesiones.

Sesión 1

Desarrollo: La clase comenzará con la actividad 1, una breve introducción sobre la historia de la teoría de probabilidad y del azar motivada por el siguiente vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=nvr8YPOdp5g> (8 min). A continuación se les mandará la realización de la actividad 2, un trabajo para que busquen información sobre los orígenes de la probabilidad y sus aplicaciones en la vida real, para exponerlo un día en clase, concretamente en la Sesión 7 (5 min).

Después se explicarán los tipos de sucesos, las operaciones y las relaciones que hay entre ellos, poniendo ejemplos esclarecedores (20 min).

En el resto de tiempo que queda, se realizará la actividad 3. El alumnado podrá salir de forma voluntaria a realizar cada uno de los apartados (17 min).

Por último, se realizará el Kahoot 1, sobre los contenidos vistos (5 min).

Contenidos: CU.1 y CT.1

Recursos: Pizarra, proyector y tablet.

Objetivos: Ob.6 y Ob.7.

Metodología: Expositiva durante la explicación de los contenidos, motivadora en el momento de ver el vídeo y gamificación al realizar el Kahoot. Metodología activa en el momento de la realización de la actividad 3.

Actividades para casa: -

Evaluación: CE.1.1, CE.1.8 y CE.1.2.

Sesión 2

Desarrollo: Comenzaremos la sesión con la explicación del concepto de probabilidad y nombraremos sus propiedades (10 min). A continuación haremos la actividad 4, primero cada alumno en su cuaderno y después expondremos los resultados en conjunto, participando toda la clase (20 min).

Se explicarán los conceptos de sucesos equiprobables y regla de Laplace mediante la actividad 5 (20 min).

Se realizará el Kahoot 2 de repaso (5 min).

Contenidos: CU.2, CU.3, CT.1. y CT.2.

Recursos: Pizarra y tablet.

Objetivos: Ob.1.

Metodología: Expositiva durante la explicación de los contenidos, motivadora, interactiva y activa cuando se realice y se debatan los resultados de la actividad 4 en grupo. Gamificación en la realización del Kahoot.

Actividades para casa: Actividad 6.

Evaluación: CE.1.1, CE.1.6, CE.1.8, CE.5.1 y CE.5.2.

Sesión 3

Desarrollo: Comenzamos la clase corrigiendo la actividad para casa de la sesión anterior y posibles dudas que puedan surgir. El alumnado sale de forma voluntaria a la pizarra a resolverlo (15 min).

A continuación, se explicará la probabilidad en experiencias compuestas, es decir, los conceptos de sucesos dependientes, independientes, las extracciones con y sin reemplazamiento y la composición de sucesos independientes. Para esta explicación, el profesor utilizará las actividades 7 y 8 (15 min).

Se propone la actividad 9 para que el alumnado la realice en clase y luego de forma voluntaria se corrija en la pizarra (15 min).

Realizamos el Kahoot 3 para afianzar los contenidos (5 min).

Contenidos: CU.4, CU.5 y CT.1.

Recursos: Pizarra y tablet.

Objetivos: Ob.2.

Metodología: Metodología expositiva durante la explicación de los contenidos, activa en la realización y corrección del ejercicio 9 y gamificación en la realización del Kahoot.

Actividades para casa: Actividad 10.

Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8 y CE.5.2.

Sesión 4

Desarrollo: La clase comenzará con la resolución de la actividad mandada para casa del día anterior. El alumnado, de forma voluntaria, saldrá a la pizarra a resolverla (15 min).

A continuación el profesor explicará la composición de experimentos de sucesos dependientes, la probabilidad condicionada y su regla de multiplicación realizando la actividad 11 (20 min).

Propondrá la realización de la actividad 12, en la que el alumnado trabaja en grupos de 3-4 personas. El material didáctico que se va a utilizar es una moneda, un dado y dos urnas de bolas por cada grupo. La finalidad de esta actividad es que interioricen los contenidos explicados en esta sesión de forma motivadora y entretenida (20 min).

Contenidos: CU.6, CT.1 y CT.2.

Recursos: Pizarra. 1 moneda, 1 dado, 2 urnas con bolas para cada grupo.

Objetivos: Ob.4.

Metodología: Expositiva en la explicación de los contenidos, interactiva, motivadora y colaborativa en la realización de la actividad 12, considerada de tipo IBL.

Actividades para casa: Actividad 13.

Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.7, CE.1.8, CE.5.2 y CE.5.3.

Sesión 5

Desarrollo: La clase comenzará con la corrección de la actividad que el alumnado tenía que realizar en casa, y será corregida por ellos de manera voluntaria (15 min).

A continuación, el profesor explicará los diagramas de árbol y las tablas de contingencia a partir de los ejercicios 14 y 15 (30 min).

El profesor les enseñará la página de Active Maths para mostrarles los applets (actividades 16 y 17), que hay disponibles en su página <http://www.active-maths.co.uk/whiteboard/3prob/index.html> sobre diagramas de árbol y más recursos que se pueden encontrar relacionados con la probabilidad (10 min).

Contenidos: CU.7, CU.8 y CT.5

Recursos: Pizarra, proyector.

Objetivos: Ob.3 y Ob.6.

Metodología: Expositiva en la explicación de los contenidos y en la utilización de herramientas TIC con Active Maths.

Actividades para casa: Actividades 18 y 19.

Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8 y CE.5.2.

Sesión 6

Desarrollo: La clase comenzará con la corrección de las actividades 18 y 19, por parte del alumnado, que en la sesión anterior se mandó para casa (20 min).

A continuación, se explicará el Teorema de la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes, realizando el docente el ejercicio 20 (20 min).

Después el alumnado, para reforzar lo explicado por el profesor, realizará el ejercicio 21 y saldrá de forma voluntaria a corregirlo (15 min).

Contenidos: CU.9.

Recursos: Pizarra.

Objetivos: Ob.8.

Metodología: Expositiva durante la explicación por parte del docente de los

nuevos conceptos y activa en la realización y corrección de los ejercicios.

Actividades para casa: -

Evaluación: CE.1.1, CE.1.2 y CE.1.8.

Sesión 7

Desarrollo: El alumnado expondrá en grupo los trabajos que se asignaron en la primera sesión, sobre los orígenes de la probabilidad y sobre posibles aplicaciones que la probabilidad tiene en la actualidad.

Cada grupo dispondrá de 5 minutos.

Contenidos: Todos (cada grupo puede enfocarlo de manera diferente).

Recursos: Pizarra, proyector, portátil.

Objetivos: Ob.5 y Ob.7.

Metodología: Expositiva, interactiva y activa cuando cada grupo de alumnos expone su trabajo.

Actividades para casa: -

Evaluación: CE.1.8, CE.1.12 y CE.5.3.

Sesión 8

Desarrollo:

Esta sesión tiene como objetivo mostrar al alumnado que la probabilidad no solo se utiliza en el juego y el azar, sino que está presente en muchos ámbitos de la vida cotidiana. Se realizará la actividad 22 a lo largo de todo el desarrollo de esta sesión.

El objetivo de esta clase es que descubran por ellos solos la importancia que tiene la probabilidad, por ejemplo, en el ámbito de la sanidad, y sobre todo también que aprendan que a veces se tienen intuiciones incorrectas sobre una probabilidad condicionada, y esto nos puede llevar a tomar decisiones incorrectas en muchas situaciones de la vida cotidiana como es la interpretación de un diagnóstico médico (55 min).

Contenidos: CU.4, CU.6, CU.7, CT.1, CT.2, CT.3, CT.4 y CT.5.

Recursos: Pizarra, proyector, portátiles, calculadoras.

Objetivos: Ob.1, Ob.4, Ob.6, y Ob.7.

Metodología: Metodología interactiva y colaborativa en la realización de la actividad 22. Aquí se fomenta el aprendizaje y enseñanza basada en la investigación (IBL). Se trata de una metodología contextualizada.

Actividades para casa: -

Evaluación: CE.1.1, CE.1.6, CE.1.7, CE.1.8, CE.5.1 y CE.5.2.

Sesión 9

Desarrollo: Esta sesión se dividirá en dos partes. En la primera parte de la clase se desarrollará la actividad 23 (30 min), y la segunda parte la clase, como es la sesión anterior al examen, se dedicará a resolver posibles dudas y a realizar aquellas actividades que el alumnado haya intentado resolver de forma autónoma y hayan presentado alguna dificultad (25 min).

Contenidos: Entran todos los contenidos del Bloque de Estadística y Probabilidad.

Recursos: Para el juego: fotocopia del tablero (Figura 4.13), tarjetas de preguntas (Figuras 4.11 y 4.12), un dado, una ficha para cada equipo, tres “quesitos” (rojo, azul y amarillo) por cada equipo (sirven caramelos, piezas de colores, lápices de colores), una baraja de cartas, bolas de colores (también sirven piezas de colores tipo Lego, bloques de madera de colores, etc.) y caramelos de distintos sabores (sugus, lacasitos, gominolas).

Para la segunda parte de la clase: pizarra.

Objetivos: Ob.2, Ob.3, Ob.4 y Ob.5.

Metodología: Metodología interactiva, colaborativa y muy amena con la realización del juego. Expositiva, interactiva y participativa cuando se resuelven las dudas del alumnado.

Actividades para casa: -

Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.5.1, CE.5.2 y CE.5.3.

Sesión 10

Desarrollo: En esta sesión se realizará el examen del tema. Incluirá 5 ejercicios (actividades 24-28), que son similares a los que se han ido realizando a lo largo de las sesiones (60 min).

Contenidos: CU.1, CU.2, CU.5, CU.6, CU.7, CU.8, CT.1 y CT.2.

Recursos: Fotocopia del examen.

Objetivos: Ob.2, Ob.3 y Ob.4.

Metodología: Autónoma.

Actividades para casa: -

Evaluación: CE.1.1, CE.1.2, CE.1.8, CE.5.1 y CE.5.2.

4.11. Evaluación

En esta sección se va a plantear el sistema de evaluación que se va a utilizar para evaluar el aprendizaje del alumnado, así como los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que se van a tener en cuenta en esta unidad didáctica.

4.11.1. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

Según el Artículo 2 del RD 1105/2014, los criterios de evaluación *“son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura”* (p.172).

También define los estándares de aprendizaje evaluables como *“especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables”* (p.172).

Las Tablas [4.1](#) y [4.2](#) muestran, respectivamente, los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, de los Bloques 1 y 5, que se recogen en el RD 1105/2014 y en la Orden de 14 de julio de 2016 y que son acordes a los contenidos, objetivos y competencias de esta unidad didáctica.

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
CE.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	1.1.1 Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
CE.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
CE.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. CMCT, CAA, CSC, SIEP.	1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
CE.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. CMCT, CAA.	1.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
EC.1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. CMCT.	1.8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 1.8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 1.8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.
CE.1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción. CCL, CMCT, CD, CAA.	1.12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, vídeo, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.

Tabla 4.1: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje. Bloque 1. RD 1105/2014 (pp.395-396)

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
CE.5.1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas. CMCT, CAA, SIEP.	5.1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos. 5.1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. 5.1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
CE.5.2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias. CMCT, CAA.	5.2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias. 5.2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol 5.2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada. 5.2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar o las tablas de contingencia. sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas.
CE.5.3. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación. CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIEP.	5.3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, cuantificar y analizar situaciones relacionadas con el azar.

Tabla 4.2: Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje. Bloque 5. RD 1105/2014 (P.398)

4.11.2. Sistema de evaluación

De conformidad con lo dispuesto en el Artículo 14 del Decreto 111/2016, de 14 de junio, la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado será continua, formativa, integradora y diferenciada según las distintas materias del currículo.

Hacer una evaluación continua ayuda al profesorado a realizar un seguimiento del progreso que experimenta el alumnado y así poder solventar las posibles dificultades que le puedan surgir.

En esta unidad didáctica, los instrumentos y herramientas que se van a utilizar para evaluar al alumnado son los siguientes:

- **Actitud, asistencia y participación (10 %).** Se valorará positivamente que el alumnado asista puntual y regularmente a clase. También que adopte una actitud positiva y participativa en el aula, y que no influya negativamente en el aprendizaje del resto de compañeros. Para que la evaluación de esta parte sea objetiva, se utilizará la rúbrica reflejada en la Tabla [4.3](#).
- **Actividades (20 %).** En esta parte se evaluará que el alumnado realice las actividades que el profesor mande, su correcta realización y su corrección por parte del alumnado. También se tendrá en cuenta la puntuación que obtengan en la realización de los cuestionarios con Kahoot. Para que la evaluación sea objetiva se va a utilizar la rúbrica reflejada en la Tabla [4.4](#).
- **Trabajo y exposición (10 %).** Aquí lo que se va a evaluar es el trabajo y la exposición que haga el alumnado en grupos. La nota del trabajo será la misma para todo el grupo pero la de la exposición dependerá de como la defiende cada alumno. Para que la evaluación de esta parte sea objetiva se utilizará la rúbrica reflejada en la Tabla [4.5](#).
- **Examen (60 %).** Al finalizar este tema, se realizará el examen final que se ha propuesto con los ejercicios 24-28, con la puntuación especificada en las mismas. La nota final del examen se ponderará con un peso del 60 %.

Rúbrica de actitud, participación y asistencia

En esta rúbrica (Tabla 4.3), se tendrá en cuenta la siguiente puntuación: “Siempre=3”, “A menudo=2”, “A veces=1” y “Nunca=0”.

Evaluación	Siempre	A menudo	A veces	Nunca	Total
Mantiene una actitud positiva en clase.					
Asiste a clase.					
Participa en clase.					
Se presta como voluntario para salir a la pizarra a resolver ejercicios.					
Interrumpe la clase o las explicaciones del profesorado.					
Participa en las discusiones que se producen en clase.					
Fomenta un clima agradable en clase.					
Ayuda a sus compañeros cuando lo necesitan con las actividades.					
Perjudica el aprendizaje de sus compañeros.					
Tiene interés por la asignatura.					

Tabla 4.3: Rúbrica de evaluación de la actitud, participación y asistencia. (Elaboración propia)

Rúbrica de actividades y cuestionarios

En esta rúbrica (Tabla 4.4), se tendrá en cuenta la siguiente puntuación: “Siempre=3”, “A menudo=2”, “A veces=1” y “Nunca=0”.

Evaluación	Siempre	A menudo	A veces	Nunca	Total
Realiza todas las actividades que el profesor propone para casa.					
Presenta actitud positiva cuando hay que realizar actividades en clase.					
Pregunta dudas que le surgen sobre las actividades.					
Obtiene buena puntuación en los Kahoots que se han realizado.					
Corrige los errores que comete en la realización de las actividades.					
Es capaz de resolver las actividades de forma autónoma.					
Realiza las actividades sin necesidad de recibir indicaciones.					

Tabla 4.4: Rúbrica de actividades y cuestionarios. (Elaboración propia)

Rúbrica del trabajo y exposición

En esta rúbrica (Tabla 4.5), se tendrá en cuenta la siguiente puntuación: “Muy bien=3”, “Bien=2”, “Regular=1” y “Mal=0”.

Evaluación	Muy bien	Bien	Regular	Mal	Total
Estructura del trabajo.					
Contenidos del trabajo.					
Exposición del trabajo.					
Tipo de vocabulario empleado en la exposición del trabajo.					
Presentación del trabajo.					
En la exposición del trabajo, ha transmitido la información que contenía su trabajo.					
Utilización de recursos TIC.					
Escritura del trabajo.					

Tabla 4.5: Rúbrica trabajos y exposiciones. (Elaboración propia)

Rúbrica del examen final

- **Ejercicio 1** (Actividad 24): 2 puntos

Apartado a) 1 punto.

Apartado b) 1 punto. Cada uno de los tipos de sucesos 0.20 puntos.

- **Ejercicio 2** (Actividad 25): 2 puntos

Apartado a) 0.5 puntos.

Apartado b) 1 punto. Cada caso 0.25 puntos.

Apartado c) 0.5 puntos.

- **Ejercicio 3** (Actividad 26): 2 puntos

Cada uno de los apartados vale 0.33 puntos.

- **Ejercicio 4** (Actividad 27): 2 puntos

Cada apartado 0.5 puntos.

- **Ejercicio 5** (Actividad 28): 2 puntos

Determinar el suceso 0.5 puntos. Aplicar la fórmula del complementario 0.5 puntos y saber calcularlo 1 punto.

Conclusiones

La realización de este TFM me ha servido para conocer muchos aspectos que desconocía de la labor docente. En cuanto a los objetivos que se propusieron al principio de este trabajo, creo que, en general, los he conseguido cumplir.

En la realización de la fundamentación curricular, me he dado cuenta de que el libro de texto solo se debería de utilizar como un instrumento de ayuda durante la impartición de las clases, ya que los contenidos, el nivel de profundidad de los mismos o el tipo de actividades varían, en general, según la editorial.

Con el desarrollo de la fundamentación epistemológica, he aprendido a expresar con rigor matemático un tema de oposiciones y, además, me ha servido para ver el fundamento matemático sobre el que luego va a realizarse la proyección didáctica.

Durante la fundamentación didáctica, he descubierto algunos de los errores que se cometen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad, la importancia que tiene el uso de los recursos TIC y las ventajas del aprendizaje basado en proyectos.

He conseguido familiarizarme con la normativa que regula el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, algo desconocido para mí, debido a que el plan de estudios de mi titulación (Grado en Matemáticas por la Universidad de Granada) no contiene ninguna asignatura relacionada con la didáctica de las Matemáticas.

Por último, he conseguido realizar una unidad didáctica, y con ella, he aprendido la difícil labor que tiene el docente, ya que para que se lleve a cabo una buena enseñanza, debe planificar todo el temario en unidades didácticas, y esto es bastante complicado ya que hay que tener en cuenta que tanto los contenidos, objetivos, competencias, metodología y evaluación estén relacionados y sean acordes.

En definitiva, me he dado cuenta que la enseñanza de las Matemáticas requiere una sólida formación en Didáctica, que capacite a los docentes para adaptar los contenidos, la metodología y las actividades al nivel académico del alumnado hacia el que van dirigidos.

Bibliografía

- [1] Alba, M.V., Caballero, R., Castillo, S., Martínez, A.M., Olmo, M.J., Oya, A. y Ruiz, N. (2020). *El “Trivial” de la Probabilidad*. Recuperado de https://www.ujaen.es/servicios/ucc/sites/servicio_ucc/files/uploads/node_evento/2020-04/Taller%20de%20probabilidad.pdf (última consulta: 09/06/2020).
- [2] Alcaide Guindo, F., Hernández Gómez, J., Moreno Warleta, M., Serrano Marugán, E., Donaire Moreno, J.J. y Pérez, A. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4 ESO*. SM Savia. Madrid: Ediciones SM.
- [3] Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.
- [4] Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.
- [5] Belfiori, L. (2014). Enseñanza de estadística con recursos TIC. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. ISBN: 978-84-7666-210-6. Artículo 531.
- [6] Beltrán-Pellicer, P. (2017). *Modelado e impresión 3D como recurso didáctico en el aprendizaje de la probabilidad*. Épsilon: Revista de Educación Matemática. 2017, Vol. 34, nº 95, 99-106.
- [7] Beltrán-Pellicer, P., Begué, N. y Roldán López de Hierro, A.F. (2020). *Experiencias y recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad*. Investigación en Entornos Tecnológicos en Educación Matemática. Nº. 1, pp. 15–22.
- [8] Borovkov, A. (2013). *Probability Theory*. Editorial Springer, doi: 10.1007/978-1-4471-5201-9.

- [9] Colera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I. y Colera Cañas, R. (2018). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4 ESO*. Madrid: Grupo Anaya, S.A.
- [10] Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de la Probabilidad y sus aplicaciones*. Volumen 1. México: Editorial Limusa-Wiley, S.A.
- [11] Gallardo, S., Cañadas, M. C., Martínez-Santaolalla, M. J. y Molina, M. (2007). Jugando con la probabilidad. En Flores, Pablo; Roa, Rafael; Pozuelo, R. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: estadística y azar* (pp. 200-207). Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1604/1/JugandoProbabilidad.pdf>.
- [12] García-García, F. J.; Quesada-Armenteros, A.; Romero Ariza, M. y Abril Gallego, A. M. (2019). Promover la indagación en matemáticas y ciencias: desarrollo profesional docente en primaria y secundaria. *Educación XX1*, 22(2), 335-359, doi: 10.5944/educXX1.23513
- [13] García-Ligero Ramírez, M.J., Hermoso Carazo, A., Maldonado Jurado, J.A., Román Román, P. y Torres Ruiz, F. *Curso de Probabilidad*. Recuperado de <https://www.ugr.es/~cdpye/CursoProbabilidad/> (última consulta: 26/05/2020).
- [14] Lipe, L. (2014). *Probabilidad: una propuesta didáctica para 4º de ESO Opción A*. (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Zaragoza. Recuperado de: <https://zaguan.unizar.es/record/14872/files/TAZ-TFM-2014-179.pdf> (última visita: 27/05/2020).
- [15] Mateos-Aparicio Morales, G. (1985). *Teoría subjetiva de la probabilidad: fundamentos, evolución y determinación de probabilidades*, 129-131. Madrid: (Tesis doctoral).
- [16] Mateos-Aparicio Morales, G. (2002). *Historia de la probabilidad (desde sus orígenes a Laplace) y su relación con la historia de la teoría de la decisión. Historia de la probabilidad y la estadística*, 1-18. Madrid:A.H.E.P.E.
- [17] Oliva, H.A. (2016). La gamificación como estrategia metodológica en el contexto educativo universitario. *Realidad y reflexión*. ISSN 1992-6510. Artículo 44.
- [18] Rohatgi, V.K. y Ehsanes Saleh, A. K. Md. (2015). *An introduction to probability and statistics*. Tercera edición. New Jersey: Editorial Wiley.

- [19] Sada Allo, M. *Azar y Probabilidad*. Unidad didáctica. Recuperado de: <https://matematicasiesoja.wordpress.com/4o-eso-b/> (última consulta: 20/05/2020).

Sitios Webs

- [20] Active Maths. Recuperado de <http://www.active-maths.co.uk/> (última consulta: 10/05/2020).
- [21] Explica / Inicio-INE. Recuperado de <https://www.ine.es/explica/explica.htm> (última consulta: 4/05/2020).
- [22] Laboratorio básico de azar, probabilidad y combinatoria. Recuperado de https://www.matematicasonline.es/mas_mates/laboratorio/index.html (última consulta: 28/05/2020).

Vídeo

- [23] Herrera. (2017). Historia de la probabilidad. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=nvr8YPOdp5g> (última consulta: 26/05/2020).

Legislación y normativas

- [24] España. Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, de 28 de junio de 2016, nº 122.
- [25] España. Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 26 de diciembre de 2007, nº 252.
- [26] España. Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, de 10 de diciembre de 2013, nº 295.
- [27] España. Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, de 28 de julio de 2016, nº 144.
- [28] España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3 de enero de 2015, nº 3.

[29] I.E.S. Fernando III (2019). Plan de Centro, 2019/2020. Martos (Jaén).

ANEXO I

En este Anexo se van a desarrollar las actividades que se van a utilizar en la unidad didáctica.

Actividad 1

Esta actividad consiste en la visualización del vídeo “Historia de la Probabilidad”, en el que se hace un pequeño resumen del origen de la probabilidad y de los matemáticos más importantes que contribuyeron en su formalización como teoría matemática. Con este vídeo, que ha sido recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=nvr8YPOdp5g>, se pretende aumentar la motivación del alumnado y que tengan interés por el tema.

Actividad 2

Esta actividad consiste en un trabajo que se realizará en grupos de dos. El alumnado deberá buscar información sobre los orígenes de la probabilidad, la regla de Laplace y las aplicaciones que tiene esta rama de las matemáticas en la vida real. A cada grupo se le especificará un tema concreto, es decir, depende de los grupos que haya en la clase. Unos se encargarán del origen, otros de la regla de Laplace, y los que queden, a cada uno se le especificará que busquen una aplicación en concreto, para que no sean todos los trabajos iguales.

Tienen libertad en la forma de exponerlo, pueden utilizar presentaciones, vídeo, pizarra, etc.

Expondrán este trabajo en una sesión. Cada grupo dispondrá de 5 minutos.

Actividad 3

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Lanzamos tres veces una moneda.

a) Indica el espacio muestral de este experimento:

$$\Omega = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), \dots\}.$$

b) Describe los siguientes sucesos:

A = “en la primera tirada salió cara”

B = “en las tres tiradas salieron al menos dos caras”

c) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

d) Describe un suceso que sea incompatible con A y con B . ¿Será incompatible con $A \cup B$?

Actividad 4

Esta actividad ha sido obtenida de: <https://matematicasiesoja.wordpress.com/4o-eso-b/>. (Sada Allo, *Azar y Probabilidad*).

Servirá para poner en práctica los contenidos que ha explicado el profesor en esta sesión.

Se va a realizar una previsión del tiempo para el próximo 6 de Julio en Jaén:

1) Utiliza una de las siguientes expresiones:

- | | |
|------------------------|----------------------------------|
| * Es seguro | * Es poco probable |
| * Es difícil | * Es muy probable |
| * Es probable | * Es casi imposible |
| * Es imposible | * Lo más probable es |
| * Es casi seguro | * Hay pocas posibilidades |
| * Es bastante probable | * Hay muy pocas posibilidades de |

Para describir cada una de las posibilidades que se citan:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| - Que llueva | - Temperatura entre 25° y 30° |
| - Que el día sea cálido y soleado | - Temperatura mayor que 30° |
| - Que el cielo esté nublado | - Temperatura menor que 5° |
| - Que nieva | - Que haga viento |

2) Ordena las frases que has construido según la confianza que tienes de que ocurran.

Ponemos en común entre toda la clase lo que cada alumno ha contestado.

3) Asigna a cada uno de los sucesos anteriores una probabilidad entre 0 y 1

El 0 sería el valor correspondiente a la palabra “imposible”, el 1 a “seguro” y 0’5 correspondería a “es tan probable que ocurra como que no ocurra”.

Para asignar una probabilidad a cada suceso, intenta adivinar cuántas veces ha ocurrido en los últimos 10 años. Por ejemplo, si piensas que el 6 de Julio llueve, por término medio, en tres ocasiones cada 10 años, daremos el valor $3/10 = 0'3$ al suceso citado.

Volveremos a poner en común los resultados del alumnado. Hemos utilizado una situación de la vida ordinaria (el pronóstico del tiempo) como pretexto para la asignación de probabilidades (primero cualitativa y luego cuantitativamente) como grado de creencia.

Actividad 5

(Editorial SM Savia, Alcaide-Guindo et al., 2016).

Esta actividad la utilizará el profesor para explicar el concepto de sucesos equiprobables y la Regla de Laplace.

Se lanzan dos dados de distinto color, uno azul y otro verde. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de ambos dados sea 7? (Véase la Figura 4.1).

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Figura 4.1: Ejercicio Regla de Laplace (elaboración propia).

Actividad 6

(Editorial SM Savia, Alcaide-Guindo et al., 2016)

Esta actividad la realizará el alumnado en casa para afianzar los contenidos dados en clase. Es una actividad similar a la realizada por el profesor.

Se lanzan un dado azul y otro verde y se consideran los sucesos:

- A = “la suma de los puntos es 5”
- B = “sacar los mismos puntos en ambos dados”
- C = “sacar más de 2 en el dado azul”

Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a) A , B y C
- b) $\overline{B}$
- c) $A \cap B$ y $A \cup C$
- d) $\overline{A \cap B}$

Actividad 7

(Editorial SM Savia, Alcaide-Guindo et al., 2016)

Esta actividad la utilizará el profesor para explicar los conceptos de sucesos dependientes, independientes y extracciones con reemplazamiento y sin reemplazamiento.

Se extraen sucesivamente dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un as? ¿Y de que lo sea la segunda? Calcula dichas probabilidades cuando:

- a) Haya devolución de la carta.
- b) No haya devolución de la carta.

Actividad 8

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Esta actividad la realizará el profesor para explicar la composición de sucesos independientes.

Tenemos dos urnas como podemos ver en la Figura 4.2, sacamos una bola de A y una bola de B. Calcular:

- a) Probabilidad de que ambas bolas sean amarillas.
- b) Probabilidad de que obtengamos una bola amarilla de A y una bola azul de B.
- c) Probabilidad de que obtengamos una bola azul de A y una bola amarilla de B.

- d) Probabilidad de que una de las bolas sea amarilla y la otra azul.
- e) Probabilidad de que la segunda bola sea negra.

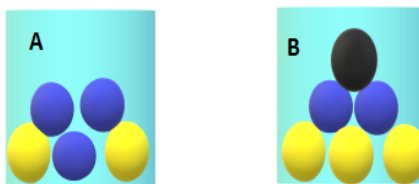


Figura 4.2: Urnas para la actividad de composición de sucesos independientes (elaboración propia.)

Actividad 9

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Esta actividad la realizará el alumnado para reforzar los conceptos de sucesos dependientes e independientes.

Lanzamos dos dados, uno rojo (R) y otro verde (V), ¿se trata de experiencias dependientes o independientes? Calcula las siguientes probabilidades:

- a) Que salga un 3 en (R) y 5 en (V).
- b) Que salga un 5 en (R) y un 3 en (V).
- c) Que salga un 3 y un 5.
- d) Que salga par en (R) y mayor que dos en (V).

Actividad 10

(Editorial SM Savia, Alcaide-Guindo et al., 2016)

Esta actividad la realizará el alumnado en casa. Trata los contenidos sobre la composición de sucesos independientes.

Sacamos una bola de cada una de las urnas (véase la Figura 4.3). Calcula la probabilidad de que:

- a) Ambas bolas sean de color rojo.
- b) Ambas bolas sean de color negro.
- c) Alguna sea verde.



Figura 4.3: Actividad sobre sucesos dependientes e independientes (elaboración propia).

Actividad 11

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Esta actividad la realizará el profesor para explicar la composición de sucesos dependientes, probabilidad condicionada y su regla de multiplicación.

En una bolsa hay 5 bolas de color rosa, 4 bolas de color morado y 1 de color amarillo. Se extraen 3 bolas. Calcula la probabilidad de que:

- a) Las tres bolas extraídas sean rosas.
- b) Las tres bolas extraídas sean moradas.
- c) Cada una de las tres bolas sea rosa o morada.
- d) Una de las tres sea amarilla.

Actividad 12

(Gallardo, Cañadas, Martínez-Santaolalla y Molina, 2007).

Esta actividad-juego se realizará para que el alumnado trabaje con experimentos aleatorios compuestos y refuerce los contenidos aprendidos en la sesión, sobre composición de sucesos dependientes e independientes, así como, para que aprenda a aplicar correctamente la probabilidad condicionada y su regla de multiplicación. La clase se organizará en grupo de 3-4 estudiantes. El material didáctico que se va a utilizar es una moneda, un dado y dos urnas de bolas para cada grupo. Esta actividad va tener varias partes.

Descripción del juego (1ª parte): Pedimos al alumnado que lancen la moneda y anoten el resultado de la cara superior y, a continuación, lancen el dado anotando también el resultado. Al alumnado se le preguntará:

a1) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 2 en el lanzamiento del dado si ha salido cara en la moneda?

a2) ¿Y la probabilidad de que salga 2 en el dado si lo que salió en la moneda fue cruz?

a3) ¿Influye el resultado obtenido en el lanzamiento de la moneda en el resultado obtenido al lanzar el dado?

Descripción del juego (2ª parte): Cada grupo dispone de dos urnas, como la Figura 4.4 que contienen bolas de diferentes colores. Se conoce el contenido de cada una de las urnas, pero no podemos verlo.

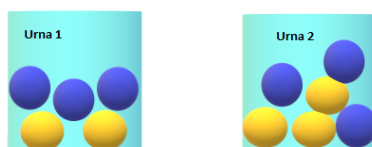


Figura 4.4: Imagen de dos urnas con bolas (elaboración propia).

Les pedimos que lancen la moneda y que anoten el resultado. Si sale cara extraen una bola de la Urna 1, si sale cruz extraen una bola de la Urna 2. Al alumnado se le preguntará:

b1) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de color azul si sabemos que salió cara al lanzar la moneda?

b2) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de color azul si lo que ha salido al lanzar la moneda es una cruz?

b3) ¿Influye el resultado del lanzamiento de la moneda en la probabilidad de obtener bola de un determinado color?

Descripción del juego (3ª parte): Imaginad que en vez de lanzar la moneda lanzamos el dado. Si sale 1, 2, 3 o 4, extraen una bola de la Urna 1 y si sale 5 o 6, la bola es extraída de la Urna 2. Les preguntaremos:

c1) ¿Existe la misma probabilidad de extraer bola de una urna que de la otra?

c2) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de color azul si sabemos que salió un 2?

c3) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de color azul si lo que ha salido ha sido un 6?

El docente deberá de ir pasando por cada grupo para ver sus anotaciones y lo que piensan. Solo les dará pequeñas indicaciones sin decirles la solución a las

preguntas. Cuando todos los grupos hayan acabado, se expondrán las soluciones que hayan ido obteniendo en conjunto y se debatirá con toda la clase.

Actividad 13

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Esta actividad será realizada por el alumnado en casa para repasar la composición de probabilidades.

En una bolsa hay cuatro bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones y se anotan los resultados en orden. Calcula la probabilidad de que el número formado sea 121, suponiendo que la experiencia sea:

- a) Con reemplazamiento.
- b) Sin reemplazamiento.

Actividad 14

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

El profesor utilizará la actividad 13, que se ha corregido en clase para realizar el diagrama de árbol de cada uno de los apartados y así los explica (Figura 4.5).

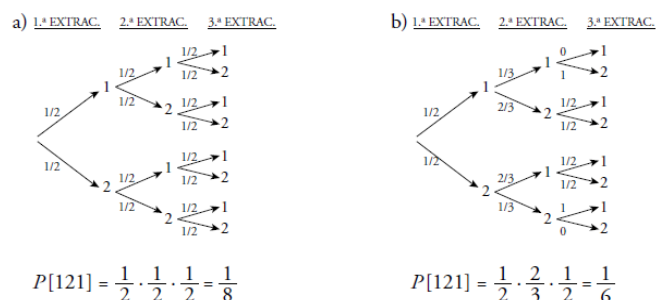


Figura 4.5: Diagrama de árbol, editorial Anaya, (Colera-Jiménez et al., 2018)

Actividad 15

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Esta actividad la utilizará el profesor para explicar las tablas de contingencia.

En una bolsa colocaremos 40 bolas huecas, y dentro de cada una de ellas, hay un papel que pone sí o no según esta tabla (Figura 4.6):

				TOTAL
sí	15	4	1	20
NO	5	4	11	20
TOTAL	20	8	12	40

Figura 4.6: Tabla de contingencia, editorial Anaya, (Colera-Jiménez et al., 2018).

- Describe los sucesos sí, no, bola roja, bola roja/sí, sí/bola roja y calcular sus probabilidades.
- Hemos sacado una bola roja. ¿Qué probabilidad hay de que haya un sí en su interior? ¿Y si la bola es azul?
- Se ha sacado una bola y dentro pone sí. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja? ¿Y verde? ¿Y azul?

Actividad 16

Este applet (Figura 4.7), obtenido de <http://www.active-maths.co.uk/whiteboard/3prob/index.html> se utilizará para explicar los diagramas de árbol.

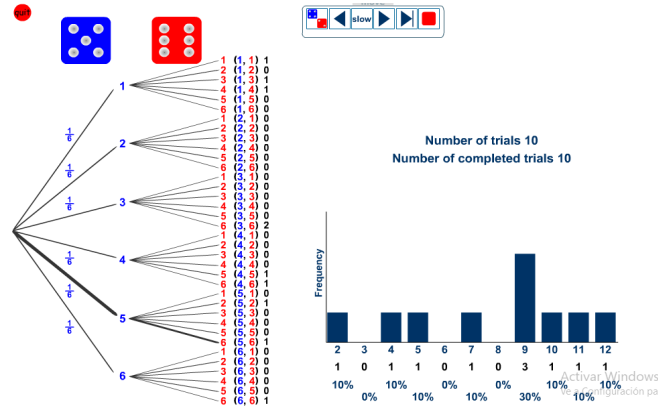


Figura 4.7: Applet de un diagrama de árbol de dos dados, recuperado de <http://www.active-maths.co.uk/whiteboard/3prob/index.html>

Actividad 17

Este applet (Figura 4.8), obtenido de <http://www.active-maths.co.uk/whiteboard/3prob/index.html> se utilizará para explicar los diagramas de árbol.

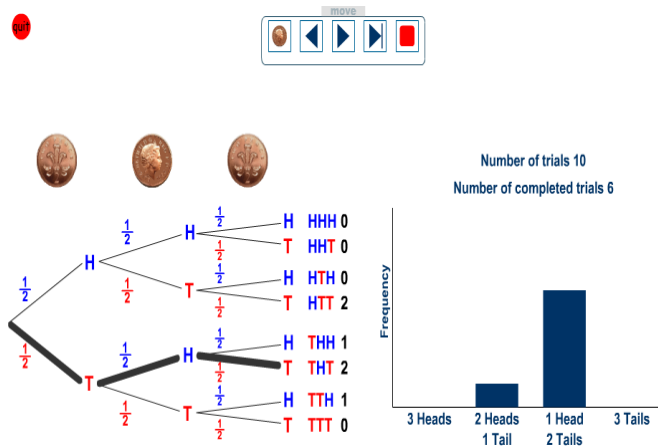


Figura 4.8: Applet de un diagrama de árbol del lanzamiento de tres monedas, recogido de <http://www.active-maths.co.uk/whiteboard/3prob/index.html>

Actividad 18

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Esta actividad deberá realizarla el alumnado en casa para practicar el cálculo de probabilidades condicionadas utilizando tablas de contingencia.

En una oficina hay 300 trabajadores, de los cuales 150 son hombres y 150 mujeres. Sabiendo que 55 hombres y 36 mujeres trabajan con ordenadores de la marca Apple y el resto lo hacen con la marca Lenovo:

- a) Construye una tabla de contingencia con los datos del enunciado.
- b) Si elegimos un trabajador al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y trabaje con un Lenovo.
- c) Calcula también:
 - 1. La probabilidad de que sea mujer y trabaje con un Apple.
 - 2. La probabilidad de que sea mujer sabiendo que trabaja con un Apple.
 - 3. La probabilidad de que trabaje con un Apple sabiendo que es mujer.

Actividad 19

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Esta actividad deberá realizarla el alumnado en casa para practicar el cálculo de probabilidades condicionadas utilizando diagramas de árbol.

En la ciudad de Granada se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es $\frac{4}{5}$.

Pero si hoy está nublado, la probabilidad de que mañana también esté nublado es de $\frac{2}{3}$.

Si hoy es viernes y hace sol, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo también haga sol?

Para resolverlo, completa el diagrama de la Figura 4.9 y razona tu respuesta sobre él:

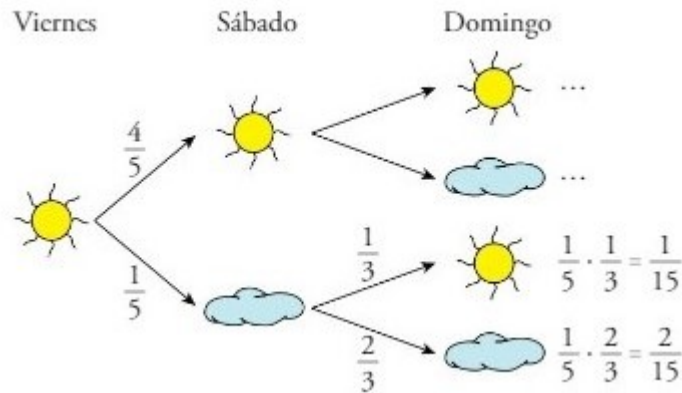


Figura 4.9: Ejercicio para practicar los diagramas de árbol, editorial Anaya, (Colera-Jiménez et al., 2018).

Actividad 20

(Editorial SM Savia, Alcaide-Guindo et al., 2016)

Este ejercicio lo realizará el profesor para explicar el Teorema de la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes.

En una academia se imparten tres asignaturas: Matemáticas, Física y Química.

- En Matemáticas están el 50 % de los inscritos, en Física el 30 % y en Química el 20 %.
- En Matemáticas hay un 55 % de mujeres, en Física un 60 % y en Química, un 45 %.

- a) Se elige al azar una persona inscrita. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre y esté en Física?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- c) Se elige una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrita en Química?
- d) Se elige un hombre al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en Matemáticas?

Actividad 21

(Editorial SM Savia, Alcaide-Guindo et al., 2016)

Este ejercicio lo realizará el alumnado en clase para reforzar el Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

En una ferretería hay 3 cajas de tornillos largos y cortos. La primera caja contiene 20 tornillos, de los cuales 3 son largos, en la segunda hay 16 tornillos, de los cuales 2 son largos, y en la tercera caja hay 10 tornillos, todos cortos.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar un tornillo al azar, éste sea corto?
- b) Se saca un tornillo y es corto. ¿Qué probabilidad hay de que sea de la tercera caja?

Actividad 22

(Batanero y Díaz, 2011)

Esta actividad va a servir para que el alumnado interiorice los conceptos de probabilidad simple, compuesta, condicionada, y el uso de la Regla de Laplace para el cálculo de probabilidades simples y condicionadas aplicadas a casos reales. Por último analizar el Teorema de Bayes como herramienta para transformar probabilidades iniciales en finales.

Se comenzaría preguntando al alumnado qué piensa sobre la importancia que tiene un diagnóstico médico sobre una enfermedad. Después para motivarlos, podemos pedirles que busquen información sobre la aplicación que tiene la probabilidad en un diagnóstico médico.

Una vez que hayan expresado las diversas opiniones que tengan sobre este tema, presentamos la enfermedad, en este caso va a ser la Covid-19, que hoy en día es tan conocido por todos. Comenzaríamos planteando las siguientes preguntas, una vez que ya conocen la enfermedad (si no, les invitaríamos a que buscasen información sobre ella).

- ¿Cuántas personas creéis que están padeciendo este virus? ¿Creéis que son reales los datos que nos dan las noticias?

Una vez que presentan interés sobre la enfermedad y sus pruebas médicas, se les define el concepto de prevalencia, y, a continuación, pediremos al alumnado que busquen la prevalencia de la Covid-19.

- Después le volveríamos a hacer otra pregunta, supongamos que una de cada mil personas contrae la Covid-19, si escogemos una persona al azar en una gran ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el virus?

Para razonar esta respuesta, podemos preguntarles cuáles serían los casos favorables y los casos posibles, recordarán la regla de Laplace. Su respuesta debería de ser $1/1000$. En este caso la prevalencia coincidiría con la probabilidad inicial de contraer el virus. Hay que destacar que esta prevalencia varía en función de la población que se escoja como muestra.

- La próxima pregunta que le podemos hacer sería: ¿cómo podéis saber que las pruebas no cometen errores? ¿Conocéis los conceptos de falso negativo y falso positivo?

Una vez que debatan entre ellos qué pueden significar estos conceptos, les presentamos también los conceptos de sensibilidad y especificidad y se los definimos.

Sensibilidad: $P(+/enferma)$ Falso positivo = $P(+/sana)$

Falso negativo = $P(-/enferma)$ Especificidad = $P(-/sana)$

Debatiremos entre todos, cómo afectaría tener una alta o baja sensibilidad y especificidad, así como falsos positivos y negativos a la hora de un diagnóstico médico.

- La siguiente pregunta que planteamos sería: suponemos que un test sobre la Covid-19 es positivo en 99 de cada 100 personas que lo padecen y también en 2 de cada 100 personas que no lo tienen. ¿Cuál es la proporción de fallos?

Por último, dada una población de 100000 individuos, se motivaría al alumnado a calcular el número total aproximado que darían positivo y negativo. Los resultados de los cálculos que realizarán los estudiantes se muestran en la Figura 4.10:

	Test +	Test -	Total
Padecen Coronavirus	99	1	100
No padecen Coronavirus	1998	97.902	99.900
Total	2097	97.903	100.000

Figura 4.10: Tabla datos Coronavirus, (elaboración propia).

Para acabar se les podría hacer preguntas como, ¿si el test da positivo, cual es la probabilidad de tener Covid-19? Ellos deben de saber interpretar los datos de la tabla, y deberían de responder: $P(Coronavirus/+) = \frac{99}{99+1998} = 0,0472$.

Y aquí se generará un debate, ya que según la probabilidad que se ha obtenido, la fiabilidad de las pruebas médicas sería baja. El alumnado con la ayuda del

docente deberían de llegar a la conclusión de que lo que ha pasado ha sido que el número que hemos elegido de las personas que tienen el virus es pequeño en el total de la población.

Por último, se les propone calcular la probabilidad anterior con ayuda del Teorema de Bayes, sin mirar los datos en la tabla.

Actividad 23

Esta actividad ha sido obtenida de: https://www.ujaen.es/servicios/ucc/sites/servicio_ucc/files/uploads/node_evento/2020-04/Taller%20de%20probabilidad.pdf. (Alba, Caballero, Castillo, Martínez, Olmo, Oya, y Ruiz, 2020).

Al alumnado lo dividiremos en grupos de 4 o 5 estudiantes para formar equipos. Se necesitan los siguientes materiales: tarjetas de preguntas (Figuras 4.11 y 4.12), fotocopia del tablero (Figura 4.13), un dado, una ficha para cada equipo, tres “quesitos” (rojo, azul y amarillo) por cada equipo (sirven caramelos, piezas de colores, lápices de colores), una baraja de cartas, bolas de colores (también sirven piezas de colores tipo Lego, bloques de madera de colores, etc.) y caramelos de distintos sabores (sugus, lacasitos, gominolas).

El tablero que hemos mencionado anteriormente, (Figura 4.13), está compuesto por casillas que forman un triángulo equilátero y tres segmentos que unen su baricentro con cada vértice. Cada casilla lleva el color de un tipo de preguntas (rojo, azul o amarillo), con una casilla especial de cada color en los vértices del triángulo, en la que aparece el dibujo de la categoría correspondiente a ese color. El juego contiene 32 tarjetas con 96 preguntas base. Algunas preguntas son las que aparecen en las Figuras 4.11 y 4.12. Los diferentes equipos comienzan en el centro del tablero. Se lanza el dado en orden y moverán sus fichas, en la dirección que elijan, tantas casillas como indique el dado. Si la ficha cae en una de las casillas marcadas con dados, situadas en el centro de los lados del tablero, volverán a tirar hasta que caigan en una casilla de color. El profesor/a moderará el juego, y es entonces cuando cogerá una tarjeta y hará una pregunta que se corresponda con el color de la casilla a la que la ficha ha ido a parar. Si el equipo la responde correctamente puede tirar el dado de nuevo. Si la casilla es una de las casillas especiales situadas en un vértice, obtiene como premio, un “quesito” del color de la casilla, si es que no la ha conseguido ya. Si la respuesta no es correcta, el turno pasa al siguiente equipo. El juego prosigue hasta que algún equipo obtiene los quesitos de los tres colores y se dirige al centro. Una vez allí, para ganar el juego, debe responder una pregunta final, cuyo color escogen los equipos rivales,

o bien responder las tres preguntas de una tarjeta elegida al azar. Si no responde correctamente, se sigue jugando hasta que algún equipo lo consiga.

Hay tres categorías de las preguntas: probabilidades con caramelos (rojo), probabilidades con dados (azul) y probabilidad con urnas de bolas (amarillo).

▶ ¿Qué probabilidad hay de que al lanzar un dado obtengas más de un 5? ▶ En tu vaso de caramelos, ¿qué colores son equiprobables? ▶ En la urna 1, ¿qué color es un suceso seguro?	▶ Expresa en un cociente la probabilidad de sacar un 1 en el lanzamiento de un dado (vaso con 4 caramelos amarillos) ▶ A Juan le gustan los caramelos amarillos, si coge uno sin mirar, ¿es seguro que se comerá uno amarillo? Verdadero o Falso ▶ En la urna 1, ¿qué color es un suceso imposible?
▶ Si lanzamos una moneda ¿Son los sucesos Cara y Cruz equiprobables? Si/No (vaso con 4 caramelos rojos) ▶ A Juan le gustan los caramelos amarillos, si coge uno sin mirar. Comerse uno amarillo es un suceso: seguro, posible o imposible ▶ En la urna 2, ¿qué color es un suceso seguro?	▶ Si nos dicen que el resultado al lanzar un dado ha sido un número par, ¿cambia la probabilidad de obtener un 2? Si/No ▶ Si dejamos en el vaso solo los caramelos rojos y verdes, ¿qué color crees que será más probable que salga si cogemos uno sin mirar? ▶ En la urna 1, ¿de qué color es más probable que saquemos la bola?
▶ Si nos dicen que el resultado al lanzar un dado ha sido un número impar, ¿cambia la probabilidad de obtener un 1? Si/No ▶ Si dejamos en el vaso solo los caramelos rojos, ¿qué probabilidad tiene sacar un caramelo verde? ▶ Si solo dejamos bolas blancas en la urna 1, ¿cómo se llama el suceso "obtener bola roja"?	▶ Si nos dicen que el resultado al lanzar un dado ha sido un número par, ¿cambia la probabilidad de obtener un 6? Si/No ▶ Si dejamos en el vaso solo los caramelos rojos y amarillos, ¿qué color crees que será menos probable que salga si cogemos uno sin mirar? ▶ En la urna 2, ¿de qué color es menos probable que saquemos la bola?
▶ Lanzamos un dado, ¿que salga un 1 es igual de probable que salga un 6? Si/No (vaso con 2 caramelos rojos y 2 amarillos) ▶ Cogemos un caramelo sin mirar, ¿tienen los dos colores la misma probabilidad de ser elegidos? Si/NO ▶ Introduce en la urna bolas de color rojo y azul de manera que tengan la misma probabilidad.	▶ Lanzamos un dado, ¿que salga un número par es igual de probable que salga un número impar? Si/No ▶ Si te doy tres caramelos, ¿de qué colores pueden ser para que la existencia de un caramelo amarillo sea un suceso imposible? ▶ Introduce en la urna 3 bolas de forma que la existencia de una bola roja sea un suceso seguro

Figura 4.11: Preguntas del “Trivial”, recuperado de https://www.ujaen.es/servicios/ucc/sites/servicio_ucc/files/uploads/node_evento/2020-04/Taller%20de%20probabilidad.pdf.

▶ Lanza el dado 3 veces, si sacas más de un 4 en dos de los lanzamientos, ganas. ▶ En tu vaso de caramelos, ¿cuántos tendrías que comerte para que el naranja sea un suceso seguro? ▶ (Todos juegan) Todos a la vez extraen una bola de la urna. Recupera el turno el que saque una bola verde.	▶ Si consigues sacar un 6 al lanzar el dado dos veces, has ganado. ▶ En tu vaso de caramelos, ¿cuántos tendrías que comerte para que el amarillo sea un suceso imposible? ▶ Introduce 4 bolas en una urna de forma que el color rojo tenga el doble de probabilidad que el azul.
▶ Lanza el dado y si no obtienes un número mayor que 2, pierdes el turno. ▶ Saca dos caramelos del vaso con los ojos cerrados. Si son del mismo color, tira de nuevo, si no, pierdes el turno. ▶ (Todos juegan) Todos a la vez extraen una bola de la urna. Recupera el turno el que saque una bola verde.	▶ Lanza el dado 2 veces, si sacas menos de 7 ganas. ▶ En un vaso vacío, introduce 4 caramelos de forma que el color rojo tenga el doble de probabilidad que el amarillo. ▶ En la urna 1, ¿qué color es el menos probable de todos?
▶ Lanza el dado 2 veces, si sacas un total de 7 ganas. ▶ En un vaso vacío, introduce 4 caramelos de forma que el color rojo y el amarillo sean equiprobables. ▶ Si solo dejamos bolas azules en la urna 1, ¿cómo se llama el suceso “obtener bola roja”?	▶ (Todos juegan) Recupera el turno aquel que al lanzar el dado saque antes un 6. ▶ ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caramelo de naranja de tu vaso antes y después de comértelo? ▶ En una urna con 5 bolas, la probabilidad de sacar una rosa es $\frac{2}{5}$, ¿cuántas bolas que no sean rosas hay en la urna?
▶ Lanza el dado. Dale la vuelta a la carta de la baraja que ocupe esa posición. Si es de copas ganas. ▶ Escoge de la baraja tantas cartas como caramelos tengas en tu vaso. ¿Cuál es la probabilidad del rey? ▶ (Todos juegan) Todos a la vez extraen una bola de la urna con 3 bolas rosas y 1 azul. Recupera el turno el que saque la azul.	▶ Lanza el dado. Dale la vuelta a la carta de la baraja que ocupa esa posición. Si es de oros ve directamente a la esquina azul; si no, pierdes el turno. ▶ ¡Premio! Ve directamente a la esquina roja. ▶ (Todos juegan) De menor a mayor edad cada jugador extrae sin mirar una bola de la urna con 3 bolas rojas y 1 verde. Recupera el turno el que saque la verde.

Figura 4.12: Preguntas del “Trivial”, recuperado de https://www.ujaen.es/servicios/ucc/sites/servicio_ucc/files/uploads/node_evento/2020-04/Taller%20de%20probabilidad.pdf.



Figura 4.13: Tablero del “Trivial”, recuperado de https://www.ujaen.es/servicios/ucc/sites/servicio_ucc/files/uploads/node_evento/2020-04/Taller%20de%20probabilidad.pdf.

Actividad 24

Ejercicio de examen (2 puntos).

En una bolsa hay 8 bolas numeradas del 1 al 8. Extraemos una bola al azar y anotamos su número.

- Escribe el espacio muestral.
- Escribe: un suceso seguro, un suceso posible, un suceso imposible, un suceso muy probable y un suceso poco probable.

Actividad 25

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Ejercicio de examen (2 puntos).

En una bolsa hay cuatro bolas numeradas del 0 al 3. Y disponemos de un dado normal. Extraemos una bola de la bolsa, lanzamos el dado y sumamos los dos resultados obtenidos, Llamaremos z a la suma.

- a) Describe el espacio muestral de este experimento y asigna una probabilidad a cada uno de los resultados posibles.
- b) A es el suceso " $z < 7$ " y B es el suceso " $4 < z < 9$ ". Halla, teniendo en cuenta todos los casos, $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$ y $\overline{A \cup B}$.
- c) Halla las probabilidades de los sucesos: A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$ y $\overline{A \cup B}$.

Actividad 26

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Ejercicio de examen (2 puntos).

Un juego consiste en tirar a canasta desde la línea de personal consecutivamente hasta que se comete un fallo. Se anotan tantos puntos como canastas encestandas. Por ejemplo: acierto-acierto-acierto-fallo son tres puntos.

Para un jugador que habitualmente encesta el 75 % de las personales, calcula la probabilidad de que obtenga:

- a) 0 puntos.
- b) 1 punto.
- c) 2 puntos.
- d) 3 puntos.
- e) menos de 5 puntos.
- f) 6 o más puntos.

Indicación: Ayúdate de un diagrama de árbol para su resolución.

Actividad 27

(Lipe, 2014)

Ejercicio de examen (2 puntos).

Se ha realizado un estudio sobre el cáncer de hígado en una población de 500 personas. Los datos se recogen en la Figura 4.14:

	Beber alcohol	No beber alcohol	Total
Padecer cáncer de hígado	22	27	49
No padecer cáncer de hígado	150	301	451
Total	172	328	500

Figura 4.14: Ejercicio de examen (elaboración propia).

- Resuelve los apartados a) y b) observando la tabla de contingencia.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar beba alcohol pero no tenga cáncer de hígado?
 - b) Entre las personas que tienen cáncer de hígado, ¿cuál es la probabilidad de escoger una persona que no beba alcohol?
- Calcula los apartados c) y d) utilizando el Teorema de la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes.
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona beba alcohol? ¿Y de tener cáncer de hígado? ¿Puedes explicar su significado?
 - d) Entre las personas que beben alcohol, ¿cuál es la probabilidad de escoger una persona que tenga cáncer? ¿Y entre las personas que no beben alcohol?

Actividad 28

(Editorial Anaya, Colera-Jiménez et al., 2018)

Ejercicio de examen (2 puntos).

Unas oposiciones constan de 70 temas. El día del examen se sacan al azar 3 temas y el opositor elige uno de esos tres. Si un opositor solo se estudió 30 temas, ¿cuál es la probabilidad de que salga un tema de los que se sabe?

Indicación: Quizás te convenga calcular la probabilidad de que no salga ninguno de los que se sabe.

A continuación se van a desarrollar tres Kahoots, que se realizarán a lo largo de las sesiones incluidas en la temporalización de la unidad didáctica. Para que el alumnado pueda realizarlos, dispondrán de tablets.

Kahoot 1

Pregunta 1. Señala cuál de los siguientes sucesos es un suceso seguro ante el experimento de lanzar un dado:

- a) Salir múltiplo de 4.
- b) Salir un número primo.
- c) Salir un número natural.
- d) Salir 5.

Pregunta 2. Si el experimento es lanzar un dado y el suceso $A = \{1, 3, 5\}$, ¿cuál es el suceso $\bar{A}$?

- a) $\bar{A} = \{2, 4\}$
- b) $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$
- c) $\bar{A} = \{1, 2, 4, 6\}$
- d) $\bar{A} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Pregunta 3. En el experimento de tirar un dado, los sucesos A = “sacar un número par”, B = “sacar un número impar” y C = “sacar un número mayor que 4”, ¿cuál de los siguientes conjuntos de sucesos tiene más elementos?

- a) $A \cap B$ b) $A \cup C$
- c) $C \cup B$ d) $B \cap C$

Pregunta 4. Si el suceso A = “salir oros” en una baraja de cartas y B = “salir figura”, ¿por qué elementos estará formado $A \cap B$?

- a) “1, 2, 3, Sota y Caballo de oros”
- b) “Sota, Caballo y Rey de oros”
- c) “El palo completo de oros”

Pregunta 5. Si lanzamos una moneda tres veces y consideramos los sucesos A = “sacar más cruces que caras” y B = “sacar un número impar de caras”, es decir, $A = \{XXX, XXC, XCX, CXX\}$ y $B = \{XXC, XCX, CXX, CCC\}$. Determina el suceso $A \cup B$.

- a) $\{XXX, XCX, CXX, CCC\}$
- b) $\{XXC, XCX, CXX\}$
- c) $\{XXX, XXC, XCX, CXX, CCC\}$

Kahoot 2

Pregunta 1. Indica cuál de los siguientes pares de sucesos no son equiprobables.

- a) Sacar oros y sacar bastos al extraer una carta de una baraja.
- b) Sacar un número par y sacar un número mayor de 4 al lanzar un dado
- c) Sacar cara y sacar cruz al lanzar una moneda.
- d) Sacar par y sacar impar al lanzar un dado.

Pregunta 2. En una bolsa hay 45 bolas (15 rojas, 20 verdes y 10 azules). ¿Cuál es la probabilidad de que en la extracción de una bola, ésta sea verde o roja?

- a) $\frac{7}{9}$, b) $\frac{2}{9}$, c) $\frac{1}{3}$ y d) $\frac{2}{3}$

Pregunta 3. Indica cuál sería una afirmación falsa.

- a) La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de sus probabilidades individuales.
- b) La probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos.
- c) Si un suceso elemental tiene probabilidad 1, el experimento es determinista.

d) La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1.

Pregunta 4. Si el pronóstico de lluvia para mañana es de 90 %, ¿qué grado de probabilidad tiene el suceso llover?

- a) Probable c) Imposible
b) Muy probable d) Poco probable

Pregunta 5. Lanzamos un dado con 8 caras, numeradas del 1 al 8. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número primo?

- a) $\frac{1}{8}$, b) $\frac{3}{8}$, c) $\frac{7}{8}$ y d) $\frac{5}{8}$

Kahoot 3

Pregunta 1. ¿Qué nombre reciben dos sucesos si la probabilidad de que uno ocurra depende de que el otro haya ocurrido o no?

- a) Compuestos c) Compatibles
b) Dependientes d) Condicionados

Pregunta 2. El resultado de lanzar una moneda no influye en el resultado de volver a lanzar la misma moneda. ¿Cómo se consideran esos dos sucesos?

- a) Contrarios c) Compuestos
b) Incompatibles d) Independientes

Pregunta 3. Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, extraemos una bola de la bolsa B. ¿Cómo son estos experimentos?

- a) Dependientes
b) Independientes

Pregunta 4. Si se lanza un dado tres veces consecutivas, ¿qué probabilidad hay de que salga tres veces seguidas el número 6?

- a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{3}{18}$, c) $\frac{3}{36}$ y d) $\frac{1}{216}$

Pregunta 5. En una baraja de cartas española se saca una sota de oro, si se extrae una segunda carta, ¿cuál es la probabilidad de que salga una sota, si la primera carta no se ha devuelto?

- a) $\frac{1}{10}$, b) $\frac{3}{39}$, c) $\frac{4}{39}$ y d) $\frac{2}{38}$