



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

NÚMEROS FRACCIONARIOS PROPUESTA DIDÁCTICA PARA 1ºESO

Alumno/a: Castillo Muñoz, Inés

Tutor/a: Prof. D. Valentina Cueva López
Dpto: Departamento de Estadística e
Investigación operativa

ÍNDICE

1. Resumen y palabras clave
2. Introducción
3. Fundamentación epistemológica
 - 3.1 Antecedentes y estado de la cuestión
 - 3.2 Fundamentación epistemológica: Los números racionales
 - 3.2.1 Introducción
 - 3.2.2 Construcción de los números racionales
 - 3.2.3 El grupo aditivo de los números racionales
 - 3.2.4 Multiplicación de los números racionales
 - 3.2.5 Inmersión de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$
 - 3.2.6 El cuerpo de los números racionales
 - 3.2.7 Conjuntos y sucesiones en cuerpos totalmente ordenados
 - 3.2.8 Incompletitud de $\mathbb{Q}$
 - 3.2.9 Relación con el currículo
 - 3.2.10 Bibliografía
 - 3.3 Fundamentación curricular
 - 3.3.1 Ajuste de contenidos al currículo de la normativa
 - 3.3.2 Análisis de los contenidos en los textos escolares
 - 3.3.3 Conclusiones
4. Proyección didáctica. “Números fraccionarios”
 - 4.1 Legislación educativa. Etapa, ciclo y nivel educativo
 - 4.2 Contextualización del centro y del aula
 - 4.3 Objetivos
 - 4.3.1 Objetivos generales de etapa
 - 4.3.2 Objetivos específicos de área
 - 4.3.3 Objetivos de la unidad didáctica
 - 4.4 Competencias clave
 - 4.5 Contenidos
 - 4.6 Metodología
 - 4.7 Actividades y recursos
 - 4.8 Atención a la diversidad
 - 4.9 Temporalización, sesiones y actividades
 - 4.10 Evaluación

- 5. Conclusiones
- 6. Referencias bibliográficas
- 7. Anexos

1. Resumen

El presente Trabajo Final de Máster tiene como objetivo plasmar las competencias adquiridas en el máster de profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. El tema escogido juega un papel fundamental en el desarrollo de las competencias matemáticas en el primer ciclo de la educación secundaria: Las fracciones. Estará enfocado al alumnado de 1º de ESO. Partiendo de una investigación consistente en tres líneas de análisis: didáctica, epistemológica y curricular de la que se extraerán conclusiones y aspectos a tener en cuenta, se elaborará una unidad didáctica en la que se propondrá una metodología de enseñanza del tema elegido para el nivel educativo mencionado. Se contextualizará el centro para el que se propone la unidad, así como el alumnado al que va dirigida. Del trabajo se extraerán unas conclusiones que constituirán la aportación investigadora del mismo.

Palabras clave: matemáticas, enseñanza, educación secundaria, fracciones, unidad didáctica.

Abstract

This Final Master's Project aims to capture the skills acquired in the Master's Degree in Secondary Education. The chosen theme, on which the project will be based, is one that plays a fundamental role in the development of mathematical skills in the first cycle of secondary education: Fractions. It will be focused on 1st ESO students.

Starting from an investigation consisting of three lines of analysis: didactic, epistemological and curricular from which conclusions and aspects will be taken into account, a didactic unit will be elaborated in which a teaching methodology of the topic chosen for the educational level mentioned. The public high school for which the unit is proposed will be contextualized, as well as the students to whom it is addressed. Some conclusions will be drawn from the work that will constitute its research contribution.

Key words: maths, learning, secondary education, fractions, didactic unit.

2. Introducción

El recorrido a través del Máster de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de idiomas, que me encuentro cursando en la Universidad de Jaén, culmina con la realización de este trabajo, el cual supone una recopilación de los contenidos teóricos y prácticos, adquiridos en las asignaturas superadas a través de la elaboración, en primer lugar de una fundamentación, tanto didáctica como epistemológica, sobre un tema elegido del currículo vigente en la legislación educativa y, en segundo lugar, una propuesta didáctica completa que constituye una unidad didáctica completa en la que se incorporarán las conclusiones obtenidas de esta primera parte de fundamentación.

La adquisición del concepto de número racional, la comprensión de su definición desde el punto de vista teórico y la noción de su utilidad práctica constituye en la mayoría de casos una dificultad en el alumnado en el proceso de aprendizaje, ya que supone un cambio en la concepción que se tiene de número y de orden de los mismos. En el nivel de 1º de ESO, una parte de los alumnos arrastran estas dificultades, por lo que, los principales objetivos de este trabajo son:

- Proponer una serie de medidas que permitan afrontar estas situaciones al comienzo de la educación secundaria.
- Investigar por medio de artículos y textos publicados, relacionados con el aprendizaje de fracciones, cuáles son las principales dificultades y causas de que algunos alumnos no consigan superar la adquisición de estos conceptos.
- Elaborar una planificación de una unidad didáctica en la que se recojan una serie de tareas prácticas en las que se profundice en la comprensión de los conceptos en los que se detecten dificultades de aprendizaje.
- Detectar posibles errores en las metodologías y las evaluaciones que se aplican actualmente para saber proponer otras mejoradas.
- Focalizar la enseñanza de números racionales teniendo en cuenta las tres definiciones teóricas del concepto de fracción.
- Favorecer la adquisición correcta de estos conceptos a través del trabajo colaborativo entre los alumnos y el profesor.
- Tener siempre en consideración la heterogeneidad del grupo al que se dirige la unidad didáctica propuesta.

Para obtener dichos objetivos se desarrolla el presente trabajo en dos apartados principalmente. La primera parte de fundamentación consta de tres apartados. El primero de ellos consiste en una fundamentación didáctica, en la que se analizan dos documentos de investigación que tratan sobre la enseñanza del tema elegido para el trabajo final de máster, las dificultades del aprendizaje de estos contenidos y un análisis

sobre la metodología empleada por el profesorado actualmente. El segundo apartado consiste en una fundamentación epistemológica basada en una exposición teórica del conjunto de números racionales utilizando como referencia contenidos del temario de oposiciones para el cuerpo de profesores de educación secundaria obligatoria, en este caso, el tema de números racionales. Por último, el tercer apartado consiste en analizar los contenidos de dos libros de texto actualmente empleados en la enseñanza a modo de comparación en cuanto a la manera de exponer los contenidos y las actividades y tareas planteadas y si se corresponde con el currículo.

La segunda parte, como se ha mencionado anteriormente, consiste en la elaboración de una unidad didáctica a modo de propuesta sobre la unidad de fracciones dentro del nivel educativo de 1º de ESO. En ésta se desarrollarán los objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación de la misma, así como una temporalización y desarrollo de las actividades propuestas en la unidad.

3. Fundamentación epistemológica

3.1 Antecedentes y estado de la cuestión

El aprendizaje de los números racionales, el conocimiento de su significado y la comprensión de que constituyen un concepto más complejo que el de los números naturales y enteros, supone un punto de inflexión en el proceso de adquisición de competencias relacionadas de la enseñanza de Matemáticas del primer ciclo de la educación secundaria obligatoria, ESO. Para poder detectar qué errores se producen en el proceso de aprendizaje, analizar sus causas y elaborar posibles soluciones, en este apartado se analizarán dos documentos de investigación.

El primero de ellos es el monográfico: *“Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación”* de José María Gairín, incluido en la revista educativa: *“Contextos educativos”*, Monográfico 4: *“Desarrollo cognitivo y educación”* de 2001. Se ha elegido este artículo ya que, aunque esté enfocado en analizar los conocimientos sobre el concepto de número racional en estudiantes de magisterio, resultan muy interesantes las reflexiones que expone sobre cómo se enseña este concepto en la primera etapa de la educación secundaria, con metodologías enfocadas en procedimientos alejados en muchas ocasiones de la aplicación práctica de los mismos y de su concepto teórico. En él también se exponen ideas muy elocuentes e intuitivas sobre nuevas técnicas a la hora de abordar esta enseñanza, intentando poner solución a las dificultades que encuentra el alumnado. Todas estas cuestiones resultan muy interesantes en la elaboración del presente trabajo, tanto a la hora de fundamentar la problemática detectada, como en el diseño de la unidad didáctica que se propone en la segunda parte del mismo. En segundo lugar, se analizarán y comentarán algunos apartados que resultan interesantes para este trabajo de la tesis doctoral de la Universidad de Zaragoza: *“Enseñanza del número*

racional positivo en educación primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente” de Rafael Escolano Vizcarra de 2019. Los apartados analizados son los denominados como: I.2 Causas del problema, I.3.4. La enseñanza actual del número racional positivo es altamente criticable, I.3.5. La enseñanza sustentada en la relación parte-todo crea obstáculos didácticos, I.7.3. Presencia de modelos de aprendizaje en la práctica docente, I.8. Sistemas de representación, II.10. Resultados del análisis fenomenológico histórico, II.12. Análisis fenomenológico didáctico del número racional positivo, II.13. Análisis fenomenológico didáctico de la fracción, II.15. Resultados del análisis fenomenológico didáctico, II.16. Conclusiones del estudio de los significados del número racional y V.10. Comparación entre la práctica docente habitual y la que se propone. Esta tesis trata de una manera, evidentemente muy extensa y amplia, la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de los números racionales de los escolares, el análisis de estas dificultades cuestionando las elecciones didácticas que se hacen por parte de nuestro Sistema Educativo y la propuesta de enseñanzas alternativas. Si bien es cierto que la tesis está enfocada en el aprendizaje de los números racionales en la etapa de educación primaria, al estar dirigida la unidad didáctica propuesta en el nivel educativo de 1º de ESO, resulta muy útil el análisis de los mencionados apartados para poder diagnosticar las causas de la dificultad del aprendizaje de estos conceptos ya que en su mayoría están vinculados y tienen su origen en la etapa escolar.

Para comenzar por una reflexión general que evidencia la existencia de un problema en el aprendizaje de los números racionales, vemos cómo José María Gairín expresa en su monográfico antes mencionado que “existen resultados de investigaciones recientes han puesto de manifiesto que muchos problemas de comprensión sobre números racionales no se superan durante el periodo de la educación secundaria obligatoria”. Este hecho constituye uno de los puntos de partida del desarrollo de este trabajo ya que se observa la problemática que ocurre en la enseñanza y el aprendizaje de este conjunto de números en general en toda la etapa educativa y concretamente en educación secundaria, donde se observan las carencias procedentes de la etapa escolar y la necesidad de analizar las causas para poder llegar a conclusiones que nos sean útiles para mejorar la calidad de la didáctica de estos contenidos.

Si analizamos numerosos libros de texto y metodologías de la mayoría de centros, está muy extendida la estrategia del aprendizaje de los números racionales considerada como un proceso instructivo. Las relaciones entre números decimales y fraccionarios se establecen, desde la etapa escolar y después en la etapa de educación secundaria, con un mero carácter procedimental y no partiendo y profundizando en su concepto matemático. Esto significa que estamos priorizando enseñar con un procedimiento, generando hábitos a veces desligados, tanto de la utilidad de lo que

se aprende, como del rigor matemático propio de estos contenidos. Este proceso se aplica, no sólo en la introducción de los números racionales en el último ciclo de la educación primaria, si no que se continúa en la etapa secundaria.

Este hecho se hace evidente si enseñamos e introducimos la idea de números racionales sin partir de su concepto matemático explicado por Feferman y citado por Gairín en su artículo: “El cuerpo ordenado de los números racionales, resultado de la simetrización para la ley producto del dominio de integridad de los números enteros, se presenta en los textos de matemáticas como un conocimiento explícito y bien delimitado, formalmente estructurado, coherente en su fundamentación lógica y necesario para dar solución a determinados problemas numéricos, geométricos y algebraicos”.

También es importante poner en contexto la historia y el origen de la construcción del conjunto de números racionales ya que la formal que conocemos hoy en día recopila unos 7.000 años de historia y, como refleja el libro “Histoire de fractions, fractions d’histoire” de Paul Benoit, Karine Chemla, and Jim Ritter de 1992, constituye un proceso dialéctico de ensayos, interpretaciones, errores, desarrollos conceptuales y formalizaciones que han llevado a la configuración actual del concepto matemático de Número Racional. Teniendo en cuenta esto, observamos que este conjunto está definido con una evidente complejidad que no podemos obviar y que “comprende una multiplicidad de fenómenos, problemas y situaciones de la vida real que se modelizan mediante este campo numérico” (Freudenthal, 1983; Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Rico y otros, 1984).

Es preciso enfatizar que el aprendizaje de números racionales tiene un carácter complejo, tanto en la comprensión de sus conceptos, como en sus propiedades, relaciones y las operaciones entre ellos. (Carpenter et al., 1993).

Todo ello nos hace entender que introducir en el aula este nuevo conjunto de números que se debe aprender tiene una dimensión más compleja de lo que se refleja en la metodología comúnmente utilizada y que se debe también enfatizar la aplicación práctica de este concepto al igual que se hace de una manera mucho más extendida y normalizada con los números naturales. Por ello, en el primer curso de educación secundaria es preciso identificar los métodos resolutivos que el alumnado ha adquirido en la educación primaria para poder corregir, si es preciso, la metodología del aprendizaje del concepto matemático de número racional y enfocarla, como hemos visto, teniendo en cuenta sus propiedades de orden, la relación entre sus elementos y su aplicación práctica.

Otro aspecto que observamos en la didáctica de los números racionales es que es necesario intensificar la idea de conectar conceptualmente la expresión fraccionaria y decimal, (Sowder, 1995); enfatizando en el aprendizaje de que éstas tienen el mismo

significado y conseguir, mediante demostraciones numéricas planteadas en tareas de clase, que se comprenda que tienen una estructura numérica muy similar. Así se consigue evitar que se continúe con el desarrollo de procesos mecánicos desvinculados de la concepción del cuerpo Q y sus formas de representación y relación, que pueden estar heredados de la etapa escolar.

Para conseguir que las ideas sobre números racionales estén conectadas parece muy interesante relacionarlas con un entorno inmediato, observable, para poder desarrollar y descubrir la aplicación de los conceptos adquiridos. Así, conseguiremos un aprendizaje efectivo. Es por ello necesario analizar e investigar, como indica José María Gairín en el monográfico, las funciones cognitivas relacionadas con los conceptos de los conjuntos numéricos y también con los procesos y relaciones que existen entre sus elementos. Continuando con esta idea, el conocimiento adquirido se fortalecerá si se plantean situaciones problemáticas que le resulten interesantes al alumnado ya que se consigue un mejor razonamiento y pensamiento si acercamos la mente del alumnado a los objetos cercanos al entorno ellos mismos que perciben y le son familiares. Así que, será más efectivo el aprendizaje si conseguimos que estos conceptos matemáticos, con un carácter más abstracto, tengan relación con elementos tangibles que identifique el alumnado con más cercanía. Castro, E. (2013). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales: estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada] <http://hdl.handle.net/10481/25009>

José María Gairín también considera que las situaciones que se planteen deben tener lógica para los estudiantes y que no potencien la mecanización a la hora de su aplicación. Para que esto se produzca, es necesario que se plantee un aprendizaje intencionado, también para que se entienda como un proceso en que los estudiantes participan de forma activa, responsabilizándose del mismo: percibiendo sus errores, favoreciendo el diálogo. Hay que favorecer que acepten que la comprensión de los Números Racionales exige de un esfuerzo personal importante y de un tiempo amplio para la acomodar los nuevos conocimientos a los que ya tenían. (Sowder et al, 1993).

Podemos observar en este monográfico una idea muy interesante sobre cómo llevar a cabo estas acciones ya que defiende el planteamiento de la metodología poniendo por encima el trabajo personal del alumnado y concibiendo el aula “como espacio natural para la construcción del conocimiento”. Esto se puede conseguir potenciando el trabajo cooperativo entre los estudiantes, haciendo que entre todos deduzcan ideas y propuestas de resolución de tareas.

Por otro lado, Gairín considera que la metodología para la adquisición de conocimiento debe basarse en un modelo que puede entenderse como “réplica a pequeña escala de un determinado sistema”.

Un modelo se debe concebir como un objeto, una noción física, concreta, que se puede tocar y observar o un concepto basado en nociones del entorno físico que se relacionan entre sí. Como se contempla en el artículo, el uso de modelos favorece la construcción del conocimiento matemático favoreciendo que el alumnado incorpore sensorialmente a su propio conocimiento conexiones de carácter matemático a través de la interpretación de elementos físicos que pueden ayudar a resolver problemas o deducir ideas de los sistemas de representación.

Ahora abordamos el análisis de algunos apartados de la tesis doctoral: “Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente” de Rafael Escolano Vizcarra, 2019, la cual ayuda a identificar las causas de los problemas en el alumnado a la hora de adquirir el conocimiento matemático de los números racionales en la etapa de primaria ya que éstos estarán presentes e influirán en los conceptos que adquieren en el primer ciclo de educación secundaria.

El aprendizaje de los números racionales consiste en un proceso en el que se deben adquirir nuevos significados variados, símbolos específicos, nuevas operaciones. Supone también, como explica Rafael Escolano: “un aprendizaje de una estructura algebraica diferente: la estructura de grupo multiplicativo, darle significado al inverso de un número”. Es decir, introducir la idea de un elemento operador e incorporar la expresión del inverso del conjunto de números que conocían: los números naturales.

Una idea de gran importancia a la hora de abordar la didáctica de este conjunto de número es conseguir que el aprendizaje de estos contenidos sea eficaz si interiorizamos como docentes que este proceso supone una reorganización de las ideas que los estudiantes han ido incorporando sobre el concepto de número, conforme han aprendido los números naturales y, además, como han adquirido una introducción de los números racionales en la etapa de primaria.

Rafael explica en su tesis que los números racionales suponen para el alumnado tener que incorporar conceptos nuevos como la densidad respecto del orden y adaptarlos a las ideas que ya tenían adquiridas. Esto significa que cognitivamente deben entender la idea de número como dos conceptos distintos: números naturales y números racionales.

Esto supone incorporar nuevas magnitudes mensurables, saber interpretarlas y utilizar unos números que son expresiones de cantidades de una cierta magnitud. Es por ello que la mayoría de los problemas de comprensión que existen en este proceso deben solucionarse teniendo en cuenta que su estructura topológica y algebraica es compleja y, que su significado aúna su construcción formal y las formas de expresión de los elementos que lo componen.

Otra idea que refuerza la necesidad de incorporar esta dimensión compleja y un significado más amplio de los números racionales en el aula es que la enseñanza actual del número racional está sustentada, exclusivamente, sobre el significado de relación parte-todo. Morcote & Flores. (2001). *Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores de secundaria un caso: las fracciones*. Más adelante, en la fundamentación curricular, veremos esto reflejado en libros de texto, aunque es cierto que algunos no se ciñen sólo a este significado. Si bien, es importante destacar que el hecho de que esto se produzca genera limitaciones en el aprendizaje de los números racionales. Como explica Escolano Vizcarra, Freudhental ya en 1983 afirmaba que:

“No cabe duda de que la didáctica de la fracción está caracterizada por una unificación de tendencias. En general, los números naturales son acercados desde una variedad de caminos. Si miramos a las fracciones, se supone que los alumnos avanzan tanto en cuanto estén satisfechos con una aproximación de la realidad. En mi opinión, esta asunción incorrecta es la razón por la que funcionan las fracciones mucho peor que los números naturales y porqué mucha gente nunca aprende fracciones”.

Por otro lado, es importante mencionar que en esta tesis de Escolano Vizcarra se explican algunos conceptos equivocados extendidos en los alumnos que resultan interesantes en este trabajo ya que, como hemos mencionado anteriormente, pueden ser errores conceptuales adquiridos en la etapa de primaria y pueden seguir ocasionando errores en el aprendizaje de los contenidos de números racionales del currículo de 1º de E.S.O.:

1) La primera idea es que la fracción está formada por dos números naturales. Entienden la configuración del número fraccionario como una expresión fija de dos números. Esto genera la idea equivocada de separar el número decimal de la fracción como dos tipos de números y no como dos expresiones distintas de un mismo número racional.

2) Otro concepto erróneo es que adoptan la idea de que las conexiones y operaciones básicas entre los números racionales se conciben igual que en los números naturales. “Los alumnos extienden los significados y técnicas del número natural a una nueva situación en la que, desde sus creencias, los entes numéricos no cambian de sentido: el orden de los números racionales es igual que el de los naturales, la multiplicación de racionales es una suma reiterada, el resultado del producto de dos números racionales es mayor que cualquiera de los factores, etc.” (Kerslake, 1986; Mack, 1990; Nunes y Bryant, 1996).

Es interesante incluir en este comentario, el análisis fenomenológico histórico del conjunto de números racionales positivos que, en la tesis de Escolano Vizcarra, concluye:

“Identificamos cinco significados del número racional positivo: medida, cociente partitivo, razón, operador y cociente indicado. Los tres primeros significados surgen para resolver problemas asociados a necesidades humanas y sociales, mientras que los dos últimos tienen su origen en el desarrollo interno de las matemáticas.”

A continuación se muestra la siguiente tabla en la que se relacionan cada uno de los significados con la acción práctica del mismo y su origen:

	<i>Significado</i>	<i>Acción</i>	<i>Naturaleza de la acción</i>
<i>asociados al problema de la medida</i>	<i>Medida directa</i>	Medir	Medida de una magnitud, con objetos tangibles
	<i>Cociente partitivo</i>	Reparto igualitario y medir	Repartir, de forma igualitaria, una cantidad de magnitud continua. La acción puede ser física, gráfica o mental
	<i>Razón</i>	Medir una cantidad con la unidad de otra magnitud	Idea mental, sin soporte físico, para construir la razón o magnitud intensiva, si se verifica la condición de proporcionalidad
<i>evolución de las matemáticas</i>	<i>Operador</i>	uso funcional: operación simbólica uso descriptivo: como razón	Acción mental con objetos matemáticos contextualizados o formales
	<i>Cociente indicado</i>	Operación simbólica: ecuación algebraica	Acción mental con objetos matemáticos formales

Figura 1: Escolano Vizcarra, Rafael. (2019). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente*. [Tesis de doctorado, Universidad de Zaragoza]. <https://zaquan.unizar.es/record/84666>

De esta tabla y de los cinco significados explicados concluimos que todos han de tenerse en cuenta a la hora de abordar la enseñanza de los números racionales y basar la metodología con tareas que los aborden. Sin embargo en la enseñanza actual de los números racionales, algunos de estos significados no se incluyen o no se enfatizan en la metodología empleada y, por consiguiente, no se muestran las utilidades prácticas de los mismos.

Como concluye Rafael Escolano en este apartado de su tesis: “Tradicionalmente, el significado de razón se ha presentado y se sigue presentando en lecciones posteriores a la enseñanza de la fracción, desvinculado de ésta y asociado al concepto de proporcionalidad”. Además, en prácticamente ningún material editorial se introducen los números decimales utilizando por ejemplo el significado de cociente partitivo y, como hemos visto anteriormente, es escasa la idea de relacionar números decimales con fraccionarios.

Escolano y Gairín coinciden en observar que, en general, está muy extendida la

idea de basar el aprendizaje de las fracciones en el significado de parte-todo, quedando en un lugar bastante secundario otros conceptos muy importantes que pueden relacionar expresiones y operaciones más adelante entre números racionales, como este significado de “cociente-partitivo” y “cociente indicado”.

Otro aspecto importante a tener en cuenta es que existen libros de texto que incorporan la acción de medir y lo relacionan con la representación de números fraccionarios en la recta real, hecho que Rafael Escolano explica diciendo que: “siguen pautas similares a las de autores reconocidos en el ámbito de la investigación en Educación Matemática, como Behr, Kieren o Lamon”.

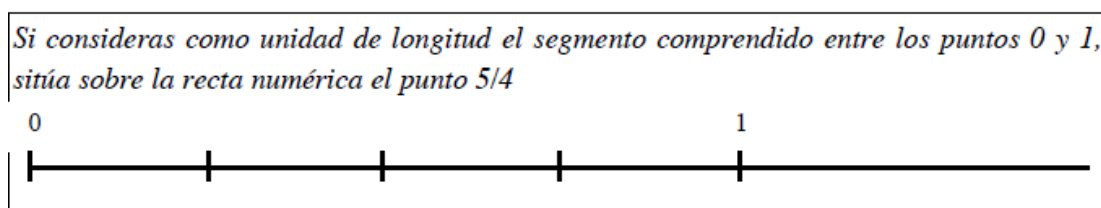


Figura 2: Escolano Vizcarra, Rafael. (2019). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente*. [Tesis de doctorado, Universidad de Zaragoza]. <https://zaquan.unizar.es/record/84666>

Sin embargo, se debe tener en cuenta que en muchas ocasiones se debe asegurar que se comprenda la idea de utilizar las fracciones como instrumento para medir partes enteras y partes fraccionarias asociando esta acción por ejemplo al concepto de fracciones impropias. Una forma de conseguir emplear esta acción de medir y que se comprenda su significado se deben proponer tareas y actividades en las que se midan magnitudes continuas con objetos que los alumnos puedan manipular o elementos que formen parte de su realidad cotidiana. Una vez más, se recurre al entorno físico y a la manipulación de elementos cercanos para afianzar conceptos matemáticos.

También hay que tener en cuenta que el hecho de utilizar la recta real como ayuda en la enseñanza de números no significa que sea un método infalible para la comprensión de la medida de cantidades dadas por números racionales.

En la tesis analizada se explican una serie de las ideas que resultan de gran interés a la hora de proponer metodologías de enseñanza de los números racionales:

- En la ordenación del temario el concepto de fracción debe situarse antes de los números decimales ya que si lo analizamos fenomenológicamente su concepto es anterior. En educación secundaria es preciso hacer una revisión sobre esto para asegurar el aprendizaje y el razonamiento del concepto de cociente partitivo ya adoptado en primaria.

- Si se analiza el uso del número racional desde el punto de vista histórico, éste se origina por la necesidad de medir cantidades de valor no natural. Es importante que

esto se refleje en el desarrollo de los contenidos de las unidades.

- El docente debe tener conciencia de que el aprendizaje de los números fraccionarios tiene algunas dificultades de comprensión para los estudiantes, a pesar de parecer un contenido con poca complejidad a priori. Se debe realizar un diagnóstico exhaustivo del nivel de comprensión en el que se encuentra éste después de la etapa de primaria, mediante evaluaciones iniciales y tareas de repaso que otorguen al docente una imagen clara de la situación del alumnado al comenzar la etapa secundaria y poder abordar los contenidos siguientes.

Por último, para concluir el análisis de ciertos apartados de la tesis de Escolano Vizcarra y del monográfico de José María Gairín, mencionaré algunos aspectos que serán de utilidad en este trabajo y que se extraen de esta investigación didáctica.

El primero de ellos es que se debe tener conciencia de la dimensión compleja, la concepción formal y topológica que tiene el conjunto de números racionales a la hora de abordar la enseñanza de los mismos, en concreto, si nos centramos en el primer ciclo de educación secundaria, la complejidad que supone asegurar la correcta comprensión de los mismos solventando posibles carencias anteriores. Por ello, se deben incluir en su aprendizaje, como hemos visto, los diferentes significados de las fracciones además de su relación con su expresión decimal para no fomentar la idea errónea de hacer creer que son dos tipos de números.

Otro aspecto fundamental para conseguir un aprendizaje eficaz es fomentar la relación de los conceptos que se pretenden enseñar con el entorno físico que rodea al alumnado, buscando relacionar los significados y conexiones numéricas con objetos de la vida cotidiana y de su medio cercano. Así, el estudiante hará suyos los problemas y tareas planteados y se incrementará su motivación e interés. Además, esto se puede complementar haciendo que el trabajo en el aula sea colaborativo y participativo ya que como se ha comentado, esto favorece la adquisición de conceptos.

3.2 Desarrollo del tema: Los números racionales.

3.2.1 Introducción

Desde el punto de vista teórico, la introducción de los números racionales responde al problema de resolver la ecuación $(a \cdot x = b)$ con $(a \neq 0)$ y $(b \in \mathbb{Z})$, que entre números enteros sólo tiene solución en el caso particular de que a sea un divisor de b . En este tema vamos a construir un conjunto que denominaremos $\mathbb{Q}$, el de los números racionales, en el que la ecuación $ax = b$, $a \neq 0$, siempre tendrá solución.

La construcción de $\mathbb{Q}$ se realiza a partir de $\mathbb{Z}$ de forma parecida a como se construye el conjunto $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$. Si $\mathbb{Z}^*$ es el conjunto de los enteros no nulos, sobre el conjunto producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ se define una cierta relación de equivalencia R . El conjunto cociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / R$ es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. La suma y el

producto de números racionales se definen a través de sus representantes. El orden en Q se define también de esta forma. El conjunto Z de los números enteros resulta ser isomorfo con un subconjunto de Q .

Sin embargo, desde el punto de vista histórico, los conjuntos numéricos y la teoría de conjuntos en general, son inventos del siglo XIX y XX, cuando el nivel de descubrimientos y nuevas teorías es tal, que se plantea como imprescindible el racionalizar, ordenar y sistematizar las bases teóricas de toda la matemática: el campo numérico. En realidad, la utilidad práctica del número racional es, en primer lugar la medida, ya que expresa una fracción de unidad, o una proporción entre dos magnitudes. Desde este punto de vista, de vienen utilizando las fracciones y los números decimales desde la antigüedad: los egipcios usaban fracciones unitarias (de numerador 1) para expresar partes incompletas de la unidad y los babilonios trabajaron con toda soltura con números decimales en su sistema de numeración sexagesimal. Sin embargo, ninguno de ellos hacía planteamientos teóricos.

Más adelante, aunque los griegos inventaron la matemática teórica y se dedicaron de lleno a la geometría, no superaron la categoría de lo que para nosotros es el número natural. Aun así, operaron con fracciones y fueron autores de una magnífica teoría de las proporciones, pero para ellos una fracción no era una categoría nueva de número sino dos números naturales que expresaban una relación entre dos magnitudes de la misma especie. Con el ocaso griego y romano, se comienza a trabajar con todo tipo de números, que surgen de la resolución de ecuaciones, sin ninguna preocupación teórica. Y así se continuó hasta la aparición de los números complejos en el Renacimiento.

Debido al enorme desarrollo del Análisis, el Álgebra y la Geometría en los siglos XVII y XVIII, surge la necesidad, como hemos dicho al principio, de delimitar claramente los conceptos teóricos básicos. No es hasta el siglo XIX cuando se comienza a discernir claramente entre las categorías de números y sus propiedades algebraicas.

3.2.2 Construcción de los números racionales

DEFINICIÓN 1

Consideramos $Z_0 = Z - \{0\}$ como el conjunto de todos los números enteros salvo el 0. Definimos $Z \times Z_0 = \{(a, b); a \in Z, b \in Z_0\}$ como el conjunto de las fracciones. Así, una fracción es un par (a, b) de números enteros tal que $b \neq 0$.

Al número " a " lo llamamos numerador y al " b ", denominador. La fracción la representamos como $\frac{a}{b}$.

Para comprender mejor el concepto de conjunto cociente pasamos a definir el concepto de relación de equivalencia.

Una relación R en el conjunto, por ejemplo X se dice de equivalencia cuando verifica las propiedades siguientes, cualesquiera que sean los elementos $x, y, z \in X$:

- 1) Reflexiva xRx
- 2) Simétrica: Si $xRy \rightarrow yRx$
- 3) Transitiva: Si xRy e $yRz \rightarrow xRz$

El conjunto que denominamos x^* de todos los elementos de X relacionados con uno dado x , que en virtud de 1) no puede ser vacío, se llama la clase de equivalencia determinada por x . Decir que dos elementos x_1 y x_2 pertenecen a la clase de equivalencia x^* es lo mismo que decir que x_1Rx_2

En el conjunto ZxZ_0 definimos la relación dada por: $\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d}$ si $a \cdot d = b \cdot c$

Veamos que $\approx$ es una relación de equivalencia.

Reflexiva: $\forall \frac{a}{b} \in ZxZ_0$ se verifica que $\frac{a}{b} \approx \frac{a}{b}$ pues $a \cdot b = b \cdot a$

Simétrica: $\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d}$ si $a \cdot d = b \cdot c$ si $c \cdot b = a \cdot d$ si $\frac{c}{d} \approx \frac{a}{b}$

Transitiva: Si $\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d} \approx \frac{e}{f} \rightarrow a \cdot d = c \cdot b$ y $c \cdot f = d \cdot b \rightarrow a \cdot d \cdot f =$

$$c \cdot b \cdot f \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \\ \frac{c}{d} \approx \frac{e}{f} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot d = b \cdot c \\ c \cdot f = d \cdot e \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot f = b \cdot d \cdot e \rightarrow a \cdot f = b \cdot e \rightarrow \frac{a}{b} \approx \frac{e}{f}$$

Luego $\approx$ es una relación de equivalencia. Esto nos permite definir al conjunto cociente.

DEFINICIÓN 2

Al conjunto cociente $\frac{ZxZ_0}{R}$ le llamaremos conjunto de los números racionales y le denotaremos por Q .

Se llama número racional a cada una de las clases de equivalencia definidas entre los elementos del conjunto $Z \times Z_0$

Cada número racional se puede simbolizar en la forma $\left[\frac{a}{b}\right]$ siendo $\frac{a}{b}$ un representante de dicho número racional. Los representantes suelen llamarse fracciones, con lo cual puede decirse que un número racional es una clase de equivalencia de fracciones.

Veamos algunas propiedades inmediatas de la definición de número racional.

PROPOSICIÓN 1

$$\text{Si } h \neq 0 \in Z \rightarrow \frac{a}{b} \approx \frac{a \cdot h}{b \cdot h}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$a \cdot b \cdot h = b \cdot a \cdot h \text{ y } b \cdot h \neq 0 \rightarrow \frac{a}{b} \approx \frac{a \cdot h}{b \cdot h}$$

CONSECUENCIAS

1. Todo número racional tiene representantes con denominador positivo

$$\text{Sea } \frac{a}{b}; b \in Z_0^- \rightarrow \frac{a}{b} \approx \frac{a}{b} \approx \frac{a \cdot (-1)}{b \cdot (-1)} \approx \frac{a'}{b'}; b' \in Z_0^+$$

2. Dados dos números racionales siempre tienen representantes con el mismo denominador positivo.

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representantes de dos números racionales;

$$m. c. m. (b, d) = m \rightarrow \begin{cases} m = b \cdot b' \\ m = d \cdot d' \end{cases} \text{ y } m. c. d. (b', d') = 1$$

$$\text{Luego } \begin{cases} \frac{a}{b} \approx \frac{a \cdot b'}{b \cdot b'} \approx \frac{a_1}{m} \\ \frac{c}{d} \approx \frac{c \cdot d'}{d \cdot d'} \approx \frac{c_1}{m} \end{cases}$$

$$(a_1 = a \cdot b' \in Z)$$

$$(c_1 = c \cdot d' \in Z)$$

Por lo tanto, hemos encontrado dos representantes de dichos números racionales que tienen el mismo denominador m , siendo sus numeradores números enteros por la propiedad de la operación interna del producto en $\mathbb{Z}$.

Esto equivale en el lenguaje matemático tradicional a decir que, dados dos números racionales, siempre es posible encontrar representantes de los mismos que tienen el mismo denominador (reducir a común denominador).

3. Dados dos números racionales cualesquiera, siempre es posible encontrar representantes con el mismo denominador positivos.

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representantes de dos números racionales;

$$m.c.m.(a, c) = m \rightarrow \begin{cases} m = a \cdot a' \\ m = c \cdot c' \end{cases} \text{ y } m.c.d.(a', c') = 1$$

$$\text{Luego } \begin{cases} \frac{a}{b} \approx \frac{a \cdot a'}{b \cdot a'} \approx \frac{m}{b_1} \\ \frac{c}{d} \approx \frac{c \cdot c'}{d \cdot c'} \approx \frac{m}{d_1} \end{cases}$$

$$(b_1 = b \cdot a' \in \mathbb{Z}_0)$$

$$(d_1 = d \cdot c' \in \mathbb{Z}_0)$$

4. Todo número racional α tiene un representante $\frac{a}{b}$ tal que $m.c.d.(a, b) = 1$ o sea, el numerador y el denominador son primos entre sí.

Sea $\frac{a_1}{b_1}$ representante de un número racional;

$$d = m.c.d.(a_1, b_1) \rightarrow \begin{cases} a_1 = a \cdot d \\ b_1 = b \cdot d \end{cases}; m.c.d.(a, b) = 1$$

$$\text{Luego, } \frac{a_1}{b_1} \approx \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \approx \frac{a}{b} \text{ c.q.d.}$$

DEFINICIÓN 3

A este representante se le llama fracción irreducible y se adopta por representante canónico de un número racional, a su representante que sea fracción irreducible con denominador positivo.

5. Todas las fracciones de la clase α son de la forma $\frac{p \cdot a}{p \cdot b}$, siendo $\frac{a}{b}$ fracción irreducible de dicha clase y p un entero cualquiera de $\mathbb{Z}^*$

Sea $\frac{a_1}{b_1}$ un representante cualquiera de la clase α ; entonces $\frac{a_1}{b_1} R \frac{a}{b}$, es decir,

$$a_1 \cdot b = b_1 \cdot a$$

Pero a es primo con b y divide a $a_1 \cdot b$, por lo que debe dividir a a_1 (Teorema de Euclides).

LEMA DE EUCLIDES

TEOREMA 1

“Si p es un número primo y divide al producto de dos enteros positivos $(a \cdot b)$ entonces el número primo divide al menos a uno de los números”.

DEMOSTRACIÓN

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tales que $a|b \cdot c$ y $(a, b) = 1$. Entonces $a|c$.

Puesto que $(a, b) = 1$, entonces se tiene que $1 = a \cdot x + b \cdot y$, para enteros x, y . Multiplicando tal igualdad por c se tiene

$$c = a(c \cdot x) + (b \cdot c)y$$

Y como $a|a$ y $a|bc$ se sigue que $a|a(cx) + (bc)y = c$

Una consecuencia del lema de Euclides se obtiene para el caso en que un número primo divide a un producto de enteros.

Por lo tanto, se tiene que $a_1 = p \cdot a$ y $b_1 = p \cdot b$, de donde $\frac{a_1}{b_1} = \frac{p \cdot a}{p \cdot b}$

PROPOSICIÓN 2

Las fracciones del tipo $\frac{a}{b}, b \in \mathbb{Q}$, forman una clase de equivalencia, o sea, un número racional.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, $\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ y como $b \neq 0 \rightarrow a = 0$ pues $\mathbb{Z}$ es dominio de integridad.

Veamos, para ampliar esta demostración, qué es un dominio de integridad.

DEFINICIÓN

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un elemento $a \in A, a \neq 0$ se dice que es un divisor de cero siempre que exista otro elemento $b \neq 0$ del anillo tal que $ab = 0$, o bien $ba = 0$.

Si un anillo no posee divisores de cero, se llama anillo íntegro o anillo de integridad. Un anillo de integridad, conmutativo y unitario, se dice que es un dominio de integridad.

Ejemplo. Claramente los anillos usuales $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son dominios de integridad, al ser conmutativos, unitarios, y en cada caso de la igualdad $ab = 0$, se deduce $a = 0$ o $b = 0$. Es decir, no contienen divisores de 0.

NOTA

El conjunto de todas las fracciones de denominador $\neq 0$ y numerador nulo es el número racional que llamaremos 0.

PROPOSICIÓN 3

Las fracciones de la forma $\frac{b}{b}, b \in \mathbb{Q}$, constituyen una clase de equivalencia, o sea, un número racional.

DEMOSTRACIÓN

$$\frac{b}{b} \approx \frac{a}{c} \leftrightarrow b \cdot c = b \cdot a \leftrightarrow a = c$$

NOTA

El conjunto de todas las fracciones de numerador igual al denominador constituye el número racional que llamaremos 1.

3.2.3 El grupo aditivo de los números racionales.

DEFINICIÓN 4. SUMA DE NÚMEROS RACIONALES.

Sean α y $\beta \in \mathbb{Q}$, de representantes $\frac{a}{a'}$ y $\frac{b}{b'}$, respectivamente, i.e. $\alpha = \left[\frac{a}{a'}\right]$ y $\beta = \left[\frac{b}{b'}\right] \forall a' y b' \neq 0$. Definimos la adición en $\mathbb{Q}$ como una operación interna de la forma siguiente:

$$+: Q \times Q \rightarrow Q$$

$$(\alpha + \beta) \rightarrow \alpha + \beta = \left[\frac{a}{a'} \right] + \left[\frac{b}{b'} \right] = \left[\frac{a \cdot b' + a' \cdot b}{a' \cdot b'} \right]$$

PROPOSICIÓN 4

La adición en Q es independiente de los representantes elegidos.

DEMOSTRACIÓN

$$\text{Por hipótesis } \begin{cases} \frac{a}{a'} \approx \frac{a_1}{a_1'} \rightarrow a \cdot a_1' = a' \cdot a_1 \\ \frac{b}{b'} \approx \frac{b_1}{b_1'} \rightarrow b \cdot b_1' = b' \cdot b_1 \end{cases} \quad \text{Tenemos que:}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{a_1}{a_1'} \right] + \left[\frac{b_1}{b_1'} \right] &= \left[\frac{a_1 \cdot b_1' + b_1 \cdot a_1'}{a_1' \cdot b_1'} \right] = (\text{mult. y divid. por } a' \cdot b') \\ &= \left[\frac{a' \cdot b' \cdot a_1 \cdot b_1' + a' \cdot b' \cdot b_1 \cdot a_1'}{a' \cdot b' \cdot a_1' \cdot b_1'} \right] \\ &= \left[\frac{a \cdot a_1' \cdot b' \cdot b_1' + a' \cdot a_1' \cdot b \cdot b_1'}{a' \cdot b'} \right] = (\text{simplificando}) \\ &= \left[\frac{a \cdot b' + a' \cdot b}{a' \cdot b'} \right] = \left[\frac{a}{a'} \right] + \left[\frac{b}{b'} \right] c. q. d. \end{aligned}$$

Así podemos decir que el número obtenido a partir de $\alpha + \beta$, no depende de los representantes elegidos en α y β . A este número se le llama suma de α con β (en este orden) y se denota por $\alpha + \beta$, y a la operación de atribuir a cada dos números racionales, su suma, se le llama adición de números racionales.

NOTA

En virtud de esto, siempre podemos operar con representantes de las clases de igual denominador: $\left[\frac{a}{d} \right] + \left[\frac{b}{d} \right] = \left[\frac{a \cdot d + b \cdot d}{d \cdot d} \right]$ (Si aplicamos la proposición 1 y simplificamos el numerador y denominador por c , la fracción que nos queda es $= \left[\frac{a+b}{d} \right]$

Por lo tanto podemos afirmar que para sumar fracciones que tienen el mismo denominador basta con sumar los numeradores y dejar ese denominador y que la adición de números racionales tiene las mismas propiedades que la adición de enteros, que son las que caracterizan a los grupos conmutativos.

1. La suma es la ley de composición interna: Por definición de la aplicación

$$\forall \alpha, \beta \in Q \rightarrow \alpha + \beta \in Q$$

2. Conmutativa: Sean $\alpha, \beta \in Q$. Veamos que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

$$\text{Si } \alpha = \left[\frac{a}{d} \right], \beta = \left[\frac{b}{d} \right] \rightarrow \alpha + \beta = \left[\frac{a}{d} \right] + \left[\frac{b}{d} \right] = \left[\frac{a+b}{d} \right] = \left[\frac{b+a}{d} \right] = \left[\frac{b}{d} \right] + \left[\frac{a}{d} \right] = \beta + \alpha$$

3. Asociativa. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in Q$ entonces $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

Se demuestra fácilmente de forma análoga a la demostración anterior y basándonos en la asociatividad de Z .

$$\text{Si } \alpha = \left[\frac{a}{d} \right], \beta = \left[\frac{b}{d} \right], \gamma = \left[\frac{c}{d} \right] \Rightarrow \alpha + (\beta + \gamma) = \left[\frac{a}{d} \right] + \left(\left[\frac{b}{d} \right] + \left[\frac{c}{d} \right] \right) = \left[\frac{a}{d} \right] + \left[\frac{b+c}{d} \right] = \left[\frac{a+(b+c)}{d} \right] = \left[\frac{(a+b)+c}{d} \right] = \left[\frac{a+b}{d} \right] + \left[\frac{c}{d} \right] = \left(\left[\frac{a}{d} \right] + \left[\frac{b}{d} \right] \right) + \left[\frac{c}{d} \right] = (\alpha + \beta) + \gamma$$

4. Existe elemento neutro: $\forall \alpha = \left[\frac{a}{a'} \right] \in Q \exists \lambda = \left[\frac{x}{x'} \right] \in Q \text{ t.q. } \alpha + \lambda = \lambda + \alpha$

Veamos que ese elemento existe. Debe cumplir: $\left[\frac{a}{a'} \right] + \left[\frac{x}{x'} \right] = \left[\frac{a}{a'} \right] = \left[\frac{x}{x'} \right] + \left[\frac{a}{a'} \right]$ (como se verifica la propiedad conmutativa, basta verificar una igualdad).

$$\left[\frac{a \cdot x' + a' \cdot x}{a' \cdot x'} \right] = \left[\frac{a}{a'} \right] \text{ sii } a' \cdot (a \cdot x' + a' \cdot x) = a \cdot a' \cdot x' \text{ sii } a \cdot x' + a' \cdot x =$$

$$a \cdot x' \text{ sii } a' \cdot x = 0. \text{ Pero como } a' \neq 0 \text{ entonces } x = 0 \text{ y así } \lambda = \left[\frac{0}{x'} \right] = 0.$$

5. Elemento simétrico (opuesto). Sea $\alpha = \left[\frac{a}{a'} \right] \in Q$, veamos que existe un elemento al que denotamos $-\alpha = \left[\frac{x}{x'} \right] \in Q$ t.q. $\alpha + (-\alpha) = 0 = (-\alpha) + \alpha$. Se debe cumplir que $\left[\frac{a}{a'} \right] + \left[\frac{x}{x'} \right] = \left[\frac{0}{m} \right]$ (con m cualquier entero no nulo) $\rightarrow \left[\frac{a \cdot x' + a' \cdot x}{a' \cdot x'} \right] = \left[\frac{0}{m} \right] \rightarrow m \cdot (a \cdot x' + a' \cdot x) = 0 \xrightarrow{m \neq 0} a \cdot x' + a' \cdot x = 0$. Esta ecuación se satisface para $x = -a$ y $x' = a'$ luego $-\alpha = \left[\frac{-a}{a'} \right]$, y lo representamos por $\left[-\frac{a}{a'} \right]$.

NOTA

Por todo esto, resulta que el conjunto Q de los números racionales es un grupo aditivo abeliano. Se representa por $(Q, +)$. Vamos a definir el concepto de grupo aditivo abeliano:

Un grupo abeliano, también llamado grupo conmutativo, es un grupo en el que el resultado de aplicar la operación de grupo a dos elementos del mismo no depende del orden en el que están escritos. Es decir, la operación de grupo es conmutativa.

Un grupo abeliano es un conjunto, A , junto con una operación $\cdot$ que combina dos elementos cualesquiera a y b de A para formar otro elemento de A , denotado $a \cdot b$. El símbolo $\cdot$ es un marcador de posición general para una operación determinada concretamente. Para calificar como grupo abeliano, el conjunto y la operación, $(A, \cdot)$, debe satisfacer cinco requisitos conocidos como axiomas de grupo abeliano:

1) Cierre

$$\forall a, b \in A \rightarrow a \cdot b \in A$$

2) Asociatividad

$$\forall a, b \text{ y } c \in A \rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3) Elemento de identidad

$$\exists e \in A / \forall a \in A \rightarrow e \cdot a = a \cdot e = a$$

4) Elemento inverso

$$\forall a \in A \exists b \in A / a \cdot b = b \cdot a = e, \text{ donde } e \text{ es el elemento de identidad.}$$

5) Conmutatividad

$$\forall a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a$$

Un grupo abeliano es aditivo cuando se describe utilizando el símbolo $+$ para su operación binaria.

Entonces, dados dos números racionales α y β , por ser $\mathbb{Q}$ un grupo aditivo, la ecuación $\alpha + x = \beta$ admite solución en $\mathbb{Q}$, pues sumando a los dos miembros de la ecuación el racional $(-\alpha)$, opuesto de α , resulta:

$$(-\alpha) + \alpha + x = (-\alpha) + \beta$$

$$\text{O sea: } x = (-\alpha) + \beta = \beta + (-\alpha)$$

El número $\delta = \beta + (-\alpha)$ se llama diferencia entre β y α y se representa por

$$\beta - \alpha. \text{ Es decir: } \beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$$

Fácilmente se deduce que la sustracción en $\mathbb{Q}$ es una operación interna, pero al igual que sucede con la sustracción de números enteros, no verifica la propiedad conmutativa. En términos de aplicación se puede definir:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(\beta, \alpha) \rightarrow \beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$$

3.2.4 Multiplicación de números racionales.

DEFINICIÓN 5

Sean $\alpha = \left[\frac{a}{a'} \right]$ y $\beta = \left[\frac{b}{b'} \right] \in \mathbb{Q}$. Definimos el producto de números racionales como una operación interna de atribuir a cada par de números racionales su producto y está definida como sigue:

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(\alpha \cdot \beta) \rightarrow \alpha \cdot \beta = \left[\frac{a}{a'} \right] \cdot \left[\frac{b}{b'} \right] = \left[\frac{a \cdot b}{a' \cdot b'} \right]$$

PROPOSICIÓN 5

El producto no depende de los representantes elegidos.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\begin{cases} \frac{a}{a'} \approx \frac{a_1}{a'_1} \rightarrow a \cdot a'_1 = a' \cdot a_1 \\ \frac{b}{b'} \approx \frac{b_1}{b'_1} \rightarrow b \cdot b'_1 = b' \cdot b_1 \end{cases}$ entonces: $\left[\frac{a_1}{a'_1} \right] \cdot \left[\frac{b_1}{b'_1} \right] = \left[\frac{a_1 \cdot b_1}{a'_1 \cdot b'_1} \right] =$ (multiplicando y dividiendo por $a \cdot b$) $= \left[\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot a \cdot b}{a'_1 \cdot b'_1 \cdot a \cdot b} \right] = \left[\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot a \cdot b}{a' \cdot a_1 \cdot b' \cdot b_1} \right] = \left[\frac{a \cdot b}{a' \cdot b'} \right] = \left[\frac{a}{a'} \right] \cdot \left[\frac{b}{b'} \right]$ luego tenemos:

$$\left[\frac{a_1}{a'_1} \right] \cdot \left[\frac{b_1}{b'_1} \right] = \left[\frac{a}{a'} \right] \cdot \left[\frac{b}{b'} \right]$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN EN $\mathbb{Q}$

Análogamente a las propiedades de la suma se demuestran las siguientes propiedades del producto en $\mathbb{Q}$.

1. El producto es ley de composición interna. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tiene que $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q}$.

Esto es evidente por la propia definición del producto al ser el denominador distinto de cero y tener la propiedad uniforme de no depender dicha definición de las fracciones escogidas.

2. Propiedad asociativa

Sean $\alpha = \left[\frac{a}{b}\right], \beta = \left[\frac{a'}{b'}\right]$ y $\gamma = \left[\frac{a''}{b''}\right] \in Q$

Veamos que $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

En efecto ya que:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= \left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left(\left[\frac{a'}{b'}\right] \cdot \left[\frac{a''}{b''}\right]\right) = \left[\frac{a \cdot (a' \cdot a'')}{b \cdot (b' \cdot b'')}\right] = \left[\frac{(a \cdot a') \cdot a''}{(b \cdot b') \cdot b''}\right] \\ &= \left[\frac{a \cdot a'}{b \cdot b'}\right] \cdot \left[\frac{a''}{b''}\right] = \left(\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{a'}{b'}\right]\right) \cdot \left[\frac{a''}{b''}\right] = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \end{aligned}$$

3. Propiedad conmutativa

Sean $\alpha = \left[\frac{a}{b}\right], \beta = \left[\frac{a'}{b'}\right] \in Q$

Veamos que $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \rightarrow \alpha \cdot \beta = \left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{a'}{b'}\right] = \left[\frac{a \cdot a'}{b \cdot b'}\right] = \left[\frac{a' \cdot a}{b' \cdot b}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right] \cdot \left[\frac{a}{b}\right]$

$$= \beta \cdot \alpha$$

4. Elemento neutro o unidad

$\forall \alpha = \left[\frac{a}{b}\right] \in Q \exists u = \left[\frac{u}{v}\right] \in Q$ t.q. $\alpha \cdot u = u \cdot \alpha = \alpha$

Se debe cumplir que $\alpha \cdot u = \left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{u}{v}\right] = \left[\frac{a \cdot u}{b \cdot v}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]$

Para que esto ocurra se verificará que $a \cdot u \cdot b = b \cdot v \cdot a \rightarrow u = v$

Así el elemento neutro del producto será la clase de fracciones que tienen el numerador y el denominador igual $u = \left[\frac{u}{u}\right] = \left[\frac{1}{1}\right]$ y que según la proposición 3 es el número racional uno.

5. Elemento simétrico o inverso.

$$\forall \alpha = \left[\frac{a}{b} \right] \in Q \exists \alpha^{-1} = \left[\frac{a'}{b'} \right] \in Q \alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$$

Por verificarse la propiedad conmutativa, bastará probar su existencia por un lado.

$$\text{Si } \exists \rightarrow \alpha^{-1}, \alpha \cdot \alpha^{-1} = \left[\frac{a}{b} \right] \cdot \left[\frac{a'}{b'} \right] = \left[\frac{a \cdot a'}{b \cdot b'} \right] = \left[\frac{1}{1} \right] \rightarrow a \cdot a' = b \cdot b' \rightarrow a' = b; b' = a$$

Así, el simétrico o inverso de un número racional $\alpha = \left[\frac{a}{b} \right]$ es $\alpha^{-1} = \left[\frac{b}{a} \right]$ sii $a \neq 0$

NOTA

El conjunto $Q^* = Q_0 = Q - \{0\}$ con la operación “.” tiene estructura de grupo abeliano y lo denotamos por $(Q^*, \cdot)$. Pero $(Q, \cdot)$ es semigrupo conmutativo con elemento unidad.

6. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición

$$\begin{aligned} \text{Sean } \alpha = \left[\frac{a}{b} \right], \beta = \left[\frac{a'}{b'} \right], \gamma = \left[\frac{a''}{b''} \right] \in Q, \text{ veamos que: } \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \rightarrow \\ : \quad \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \left[\frac{a}{b} \right] \cdot \left(\left[\frac{a'}{b'} \right] + \left[\frac{a''}{b''} \right] \right) = \left[\frac{a}{b} \right] \cdot \left[\frac{a' \cdot b'' + b' \cdot a''}{b' \cdot b''} \right] = \left[\frac{a \cdot (a' \cdot b'' + b' \cdot a'')}{b \cdot b' \cdot b''} \right] = \\ &= \left[\frac{a \cdot a' \cdot b'' + a \cdot b' \cdot a''}{b \cdot b' \cdot b''} \right] = \left[\frac{a \cdot a' \cdot b''}{b \cdot b' \cdot b''} \right] + \left[\frac{a \cdot b' \cdot a''}{b \cdot b' \cdot b''} \right] = \left[\frac{a \cdot a'}{b \cdot b'} \right] + \left[\frac{a \cdot a''}{b \cdot b''} \right] = \left[\frac{a}{b} \right] \cdot \left[\frac{a'}{b'} \right] + \left[\frac{a}{b} \right] \cdot \\ &\left[\frac{a''}{b''} \right] = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \end{aligned}$$

En Q se verifica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de números racionales y con todas las propiedades de la suma y el producto de los números racionales tenemos que $(Q, +, \cdot)$ es Cuerpo Conmutativo.

3.2.5 Inmersión de Z en Q

El conjunto de los números racionales contiene un subconjunto que es isomorfo algebraicamente y en cuanto al orden, al conjunto de los números enteros, es decir, que existe un isomorfismo entre $(Z, +, \cdot, \leq)$ y un subconjunto Q^* de Q , formado por las clases $\left\{ \left[\frac{n}{1} \right] \in Q^* / n \in Z \right\}$, tal que podemos establecer una aplicación biyectiva.

Primeramente, definamos el concepto de aplicación biyectiva:

Diremos que una aplicación $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si:

$$\forall a, a' \in A f(a) = f(a') \rightarrow a = a'$$

Diremos que una aplicación $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva (suprayectiva) si $f(A)=B$. Diremos que una aplicación $f: A \rightarrow B$ es biyectiva si f es inyectiva y sobreyectiva.

La aplicación biyectiva que, como hemos explicado anteriormente, podemos establecer está definida por:

$$f: Z \rightarrow Q^*$$

$f(n) \rightarrow \{n/1\}/f(n+m) = f(n) + f(m)$ y $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ y además conserve las estructuras de orden. Este conjunto $Q^* = Q - \{0\}$.

Esta aplicación posee las propiedades siguientes:

1) La aplicación f es inyectiva ya que si $m \neq n \rightarrow f(m) \neq f(n)$, al ser distintas las clases $\left\{\frac{m}{1}\right\}$ y $\left\{\frac{n}{1}\right\}$ si m es distinto de n .

$$2) f(m+n) = \left\{\frac{m+n}{1}\right\} = \left\{\frac{m}{1}\right\} + \left\{\frac{n}{1}\right\} = f(m) + f(n) \text{ y}$$

$$f(m \cdot n) = \left\{\frac{m \cdot n}{1}\right\} = \left\{\frac{m}{1}\right\} \cdot \left\{\frac{n}{1}\right\} = f(m) \cdot f(n)$$

Antes de continuar con el desarrollo de esta propiedad vamos a definir el concepto de homomorfismo de anillos:

DEFINICIÓN

Se dice que una aplicación entre dos anillos $\phi: A \rightarrow B$ es un homomorfismo si se cumplen las siguientes condiciones:

1) Se preservan las sumas: $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$.

2) Se preserve la identidad: $\phi(1_A) = 1_B$

3) Se preservan los productos: $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$.

Así pues la aplicación f así definida es un homomorfismo de anillos. Si definimos la suma de un entero con un racional mediante la fórmula $n + \alpha = f(n) + \alpha$ y, análogamente el producto $n\alpha = f(n)\alpha$, las propiedades de f permiten ver fácilmente que las leyes de la adición y la multiplicación de números se conservan aquí.

3) Conserva las estructuras de orden ya que si $m < n$ en Z , $f(m) < f(n)$ en Q^* .

Si $m < n$, entonces $\left\{\frac{m}{1}\right\} < \left\{\frac{n}{1}\right\} \rightarrow f(m) < f(n)$.

El que f sea homomorfismo prueba que su imagen $f(Z) = \left\{\frac{n}{1} : n \in Z\right\}$ es un subanillo de Q ; el que además f inyectivo demuestra que los anillos Z e $f(Z)$ son isomorfos. Se identifica así el número racional $\frac{n}{1}$ con el número entero n y gracias a dicha identificación se considera a Q como una ampliación de Z , $Z \subset Q$. Al homomorfismo inyectivo f se le suele llamar *inmersión de Z en Q* .

Si consideramos que N se puede identificar con Z^+ , lo que se traduce en que $N \subset Z$, podemos escribir $N \subset Z \subset Q$.

3.2.6 El cuerpo de los números racionales

3.2.6.1 El cuerpo ordenado de los números racionales

Vamos a establecer en Q una relación de orden total compatible con las operaciones definidas en $Z \subset Q$.

DEFINICIÓN

Sea $\alpha = \left[\frac{a}{b}\right] \in Q$, diremos que α es racional positivo si $a \cdot b \in Z^+$. En otro caso y si $\alpha \neq 0$ diremos que es racional negativo. Denotaremos por Q^+ y Q^- respectivamente los conjuntos de los racionales positivos y negativos.

PROPOSICIÓN 6

Esta definición no depende de los representantes elegidos.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\alpha \in Q^+$ y sean dos representantes $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$. Si $\alpha \in Q^+ \rightarrow a \cdot b \in Z^+$ y como $\frac{a}{b} \approx \frac{a'}{b'} \rightarrow a \cdot b' = a' \cdot b$ luego $a' \cdot b \cdot (b \cdot b') \rightarrow a \cdot b \cdot b'^2 = a' \cdot b' \cdot b^2 \rightarrow$

$a' \cdot b' \in Z^+$ análogamente si $\alpha \in Q^-$.

PROPOSICIÓN 7

Sea $\alpha \in Q^+$ el subconjunto de Q formado por los racionales positivos. Entonces:

a) $0 \notin Q^+$

- b) $\forall \alpha \in Q$, se verifica una de las propiedades: $\alpha \in Q^+$, $\alpha = 0$ o $-\alpha \in Q^+$.
- c) Dados dos racionales $\alpha, \beta \in Q^+$, tanto su suma como su producto pertenecen a Q^+ .

Demostraremos las tres propiedades:

- a) Si $0 = \left[\frac{0}{1} \right]$ evidentemente $0 \cdot 1 = 0$, con lo que no cumple ser mayor que cero.
- b) Sea $\alpha = \left[\frac{a}{b} \right]$ un elemento de Q . Por ser Z ordenador y poseer la propiedad de tricotomía se verifican una de las tres condiciones: $a \cdot b > 0$, o $a \cdot b = 0$, o $a \cdot b < 0$.

Si $a \cdot b > 0$, entonces $\alpha \in Q^+$.

Si $a \cdot b = 0$, como $b \neq 0$, obligatoriamente $a = 0$ y $\alpha = \left[\frac{0}{b} \right] = \left[\frac{0}{1} \right] = 0$ (número racional cero, según la proposición 2).

Si $a \cdot b < 0$ entonces $-a \cdot b > 0$, con lo que $-\alpha \in Q^+$. A estos números se les llaman racionales negativos y su conjunto se denota por Q^- .

- c) Sean $\alpha = \left[\frac{a}{b} \right]$ y $\beta = \left[\frac{a'}{b'} \right]$ dos números racionales pertenecientes a Q^+ , por lo que se verifica que $a \cdot b > 0$ y $a' \cdot b' > 0$.

Si realizamos su suma tendremos $\alpha + \beta = \left[\frac{a \cdot b' + b \cdot a'}{b \cdot b'} \right]$

Para que pertenezca a Q^+ , debe cumplirse $(a \cdot b' + b \cdot a') \cdot b \cdot b' > 0$.

Realizando operaciones tendremos $a \cdot b' \cdot b \cdot b' + a' \cdot b \cdot b' = a \cdot b \cdot (b')^2 + b^2 \cdot a' \cdot b' > 0$

Esto es evidente ya que $a \cdot b > 0$, $(b')^2 > 0$ y $a' \cdot b' > 0$ y la suma y producto de números enteros positivos es positivo.

Si realizamos su producto $\alpha \cdot \beta = \left[\frac{a \cdot a'}{b \cdot b'} \right]$.

Para que sea racional positivo debe cumplirse que $a \cdot a' \cdot b' > 0$. Si aplicamos la conmutatividad en Z , tendremos que debe cumplirse $a \cdot b \cdot a' \cdot b' > 0$ algo que evidentemente se cumple al ser $a \cdot b > 0$ y $a' \cdot b' > 0$.

Podemos pues afirmar que dado un número racional α es racional positivo, o cero o racional negativo. Así, $Q = Q^+ \cup \{0\} \cup Q^-$.

3.2.6.1.1 Relación de orden en el cuerpo de los números racionales.

Dados dos números racionales α y β , definimos la relación $\leq$ (menor o igual) y decimos que $\alpha \leq \beta$ (α es menor o igual que β) si $\beta - \alpha \geq 0$. Si se cumple que $\alpha \leq \beta$, podemos decir que $\beta \geq \alpha$ (β es mayor o igual que α). Se define también la relación $<$ (menor) y se dice que $\alpha < \beta$ (α es menor que β) si $\beta - \alpha > 0$. Veremos que así definida la relación $\leq$ es una relación de orden al cumplir las propiedades:

- Reflexiva:

Para todo número racional α se verifica que $\alpha \leq \alpha$. Evidente ya que $\alpha - \alpha = 0$.

- Antisimétrica

Para todo par de números racionales α y β que cumplan $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, entonces $\alpha = \beta$.

En efecto si $\alpha \leq \beta$ se verifica que $\beta - \alpha \geq 0$ y si $\beta \leq \alpha$, entonces $\alpha - \beta \geq 0$.

Si sumamos tenemos que $(\beta - \alpha) + (\alpha - \beta) = 0$.

Así, el opuesto de $(\beta - \alpha)$ es $(\alpha - \beta)$, luego si estos números no fueran cero, uno pertenecería a los racionales positivos y otro a los racionales negativos, lo que contradice la hipótesis.

Así, $\alpha - \beta = 0 \rightarrow \alpha = \beta$.

- Transitiva

Dados tres números racionales α, β y γ , que verifiquen $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$, entonces se cumplirá que $\alpha \leq \gamma$.

Por ser $\alpha \leq \beta$ se verifica $\beta - \alpha \geq 0$ y si $\beta \leq \gamma$, entonces $\gamma - \beta \geq 0$.

Si sumamos ambas desigualdades, tendremos

$$(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) \geq 0 \rightarrow \beta - \alpha + \gamma - \beta \geq 0 \rightarrow \gamma - \alpha \geq 0 \rightarrow \alpha \leq \gamma$$

La relación $\leq$ así definida es, además, de orden total, pues todos los números racionales son comparables por dicha relación. En consecuencia, Q con la relación $\leq$ es un conjunto totalmente ordenado y podemos representarlo mediante una cadena, que además es un retículo (conjunto ordenado tal que para cualquier par de elementos x e y pertenecientes al mismo, siempre existe el supremo y el ínfimo del conjunto $\{x, y\}$).

3.2.6.1.2 Propiedades de la ordenación en Q .

1) La relación de orden $\leq$ es compatible con la suma.

Si $\alpha \leq \beta$, cualquiera que sea γ , se cumple que $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

En efecto si $\alpha \leq \beta$ se cumple que $\beta - \alpha \geq 0$. Si se cumpliera que $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, tendría que ocurrir que:

$(\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) \geq 0 \rightarrow \beta + \gamma - \alpha - \gamma \geq 0 \rightarrow \beta - \alpha \geq 0$ cosa que evidentemente se cumple.

La compatibilidad de la relación de orden $\leq$ con la suma podemos generalizarla de la siguiente forma. Si $\alpha \leq \beta$ y $\gamma \leq \delta$, entonces $\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$.

En efecto, si $\alpha \leq \beta$ y le aplicamos la primera propiedad con γ , tendremos que $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. Análogamente si $\gamma \leq \delta$ y le aplicamos la primera propiedad con β , tendremos que $\beta + \gamma \leq \beta + \delta$.

Si aplicamos la propiedad transitiva de la relación $\leq$, tendremos que $\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$ que es a lo que queríamos llegar.

Por tanto, $(Q, +, \leq)$ es un grupo aditivo ordenado. Se denomina grupo aditivo ordenado de los racionales.

2) La relación de orden $\leq$ no es siempre compatible con el producto. (Sólo se conserva si se multiplica por un número racional positivo).

Si $\alpha \leq \beta$, se verificará que $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ si $\gamma \in Q^+$ y $\alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \gamma$ si $\gamma \in Q^-$

Demostraremos la primera e indicaremos cómo hacer la segunda. Para ello utilizaremos los representantes de los números racionales con el mismo denominador y positivo.

Si $\alpha = \left[\frac{a}{d}\right], \beta = \left[\frac{b}{d}\right]$ y $\gamma = \left[\frac{c}{d}\right]$ tendremos:

Por ser $\alpha \leq \beta$ se verifica $\beta - \alpha \geq 0 \rightarrow \left[\frac{b}{d}\right] - \left[\frac{a}{d}\right] = \left[\frac{b-a}{d}\right] \geq 0$. Así pues $d \cdot (b - a) \geq 0$ y al ser $d > 0$, obligatoriamente $(b - a) \geq 0$.

Queremos ver ahora que $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ siendo $\gamma \in Q^+$, con lo que $c > 0$.

Para que ello ocurra debe cumplirse que $\left[\frac{b}{d}\right] \cdot \left[\frac{c}{d}\right] - \left[\frac{a}{d}\right] \cdot \left[\frac{c}{d}\right] \geq 0$.

Si operamos, tendremos $\left[\frac{b \cdot c}{d^2}\right] - \left[\frac{a \cdot c}{d^2}\right] = \left[\frac{b \cdot c - a \cdot c}{d^2}\right] = \left[\frac{c \cdot (b-a)}{d^2}\right] \geq 0$, con lo que debe cumplirse que $c \cdot (b - a) \cdot d^2 \geq 0$ que resulta evidente al ser $c > 0, d^2 > 0$ y $(b - a) \geq 0$.

La demostración de la segunda fase se hace de forma análoga tomando $c < 0$.

- 3) **En Q se verifica la propiedad arquimediana**, es decir, si $\alpha > 0$ y $\beta \in Q, \exists n \in \mathbb{N} / n \cdot \alpha > \beta$. La notación $n \cdot \alpha$ significa $\left[\frac{n}{1}\right] \cdot \alpha$

En efecto, elijamos en α y β dos fracciones que tengan positivo e igual denominador $\alpha = \left[\frac{a}{d}\right]$ y $\beta = \left[\frac{b}{d}\right]$.

De la hipótesis $\alpha > 0$, deduce entonces que $a > 0$. En virtud de las propiedades de orden en $\mathbb{Z}$ y de la propiedad arquimediana de los números naturales $\exists n \in \mathbb{N} / b < n \cdot a$. Multiplicando por el entero positivo de esta desigualdad, tendremos $b \cdot d < n \cdot a \cdot d$, lo cual expresa que $\left[\frac{b}{d}\right] < \left[\frac{n \cdot a}{d}\right]$.

Como $\left[\frac{b}{d}\right] = \beta$ y $\left[\frac{n \cdot a}{d}\right] = \left[\frac{n}{1}\right] \cdot \left[\frac{a}{d}\right] = n \cdot \alpha$, llegamos a la conclusión de que $\beta < n \cdot \alpha$, o lo que es lo mismo $n \cdot \alpha > \beta$.

- 4) **Densidad del orden**. Si α y β son dos números racionales tales que $\alpha < \beta$, entonces existe otro número racional γ tal que $\alpha < \gamma < \beta$. EN efecto tomemos $\alpha = \left[\frac{a}{d}\right]$ y $\beta = \left[\frac{b}{d}\right]$.

Si tomamos $\gamma = \left[\frac{a+b}{2d}\right]$ que es la semisuma de los representantes de α y β , demostración es trivial.

Una vez determinado γ , podemos aplicar de nuevo el proceso entre γ y β , demostrando así la existencia de otro número racional entre ambos y a la vez entre α y β . Reiterando el proceso se ve que entre dos números racionales existen infinitos números racionales. Por ello, se dice que el orden en $\mathbb{Q}$ es denso. Es una propiedad del orden de $\mathbb{Q}$, que no existe en $\mathbb{N}$ ni en $\mathbb{Z}$, a consecuencia de la cual no puede hablarse del número racional anterior o siguiente a uno dado.

3.2.6.2 Valor absoluto de un número racional

$\forall \alpha > 0 \in \mathbb{Q} \rightarrow$ es número racional positivo

$\forall \alpha < 0 \in \mathbb{Q} \rightarrow$ es número racional negativo. Los números racionales negativos son los opuestos de los positivos. El número 0 no se considera ni positivo ni negativo.

Dado $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \left[\frac{a}{b}\right]$, llamaremos valor absoluto de α , y se denota $|\alpha|$, a la fracción de números naturales $\frac{|a|}{|b|} \rightarrow |\alpha| = \frac{|a|}{|b|}$.

Las propiedades que posee la aplicación valor absoluto son las mismas que verifica el valor absoluto en $\mathbb{Z}$, que son las siguientes:

PROPIEDADES

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

- 1) $|\alpha| \geq 0$ y $|\alpha| = 0$ si $\alpha = 0$
- 2) $\alpha \leq |\alpha|$ y si $\alpha \in \mathbb{Q}^+ \rightarrow \alpha = |\alpha|$ y si $\alpha \in \mathbb{Q}^- \rightarrow -\alpha = |\alpha|$
- 3) $|- \alpha| = |\alpha|$
- 4) $-a \leq \alpha \leq a$ si $|\alpha| \leq a; a \in \mathbb{Q}$
- 5) $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- 6) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

La primera propiedad es evidente por la propia definición de valor absoluto.

Para demostrar la propiedad quinta observemos que se tiene siempre que $\alpha \leq |\alpha|$; en efecto, si $\alpha \geq 0$ esta desigualdad se escribe $\alpha \leq \alpha$, lo que es evidente

por cumplir la propiedad reflexiva; si $\alpha < 0$, la desigualdad se escribe $\alpha \leq -\alpha$, es decir $-\alpha - (-\alpha) \geq 0$, luego $-2\alpha \geq 0$. (Evidente al ser $\alpha < 0$). Sustituyendo α por $-\alpha$, se tiene igualmente cualquiera que sea α , la desigualdad $-\alpha \leq |\alpha|$, o bien $|\alpha| \leq \alpha$.

Considerando las dos desigualdades, tendremos $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ y $-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|$

Sumando ambas desigualdades, llegamos a $-|\alpha| - |\beta| \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$

Si $\alpha + \beta \geq 0$ se tiene que $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$

Si $\alpha + \beta \leq 0$, se tiene $|\alpha + \beta| = -\alpha - \beta \leq -(-|\alpha| - |\beta|) = |\alpha| + |\beta|$

Así pues en ambos casos hemos llegado a que $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Para la demostración de la propiedad 6, consideremos tres casos:

- a) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, $\alpha \cdot \beta > 0$ y tendremos $|\alpha \cdot \beta| = \alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|$
- b) Si $\alpha < 0$ y $\beta > 0$, $\alpha \cdot \beta < 0$ y tendremos $|\alpha \cdot \beta| = -\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|$
- c) Si $\alpha < 0$ y $\beta < 0$, $\alpha \cdot \beta > 0$ y tendremos $|\alpha \cdot \beta| = \alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta) = |\alpha| \cdot |\beta|$

3.2.6.3 Expresión de los números racionales

Vamos a ver en este punto otra forma de representar los números racionales.

Sea $\alpha \in \mathbb{Q}$ y sea $\frac{a}{b}$ su representante canónico.

Como $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ consideramos la división euclídea de a entre b .

Así, $\exists c_0 \in \mathbb{Z}: a = bc_0 + r_0$ con $0 \leq r_0 < b$.

Entonces:

- Si $r_0 = 0$ representaremos α por c_0 que corresponde con su representación entera.

- Si $r_0 \neq 0$ repetimos el proceso con $10r_0$. Tendremos $10r_0 = bc_1 + r_1$ con $0 \leq r_1 < b$.

Si $r_1 = 0$ representaremos α por c_0, c_1 . Si $r_1 \neq 0$ reiteramos el proceso con $10r_1$.

Puede ocurrir que:

- $\exists n \in \mathbb{N}^*: r_n = 0$ en cuyo caso la representación decimal de α se define como a cadena $c_0, c_1 c_2 \dots c_m$ siendo m el primer entero positivo tal que $r_m = 0$. Diremos entonces que α es un número decimal exacto.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*: r_n \neq 0$ en cuyo caso tendremos que por r_i enteros con $0 < r_i < b \forall i \in \mathbb{N}$ deberán existir $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$ tales que $r_i = r_j$. Pero entonces $c_{i+1} = c_{j+1}$ y $r_{i+1} = r_{j+1}$ y aparece así una sucesión de cocientes que se repite una y otra vez.

Sean $n = \min\{i \in \mathbb{N}: \exists j \neq i / r_i = r_j\}$ y $l = \min\{i \in \mathbb{N}: i > n, r_i = r_n\} - n$.

Distinguimos dos casos:

$n = 0$, entonces la representación de α se define:

- Si $l = 1$, como la cadena infinita $c_0, c_1 c_1 \dots$ que se abrevia $c_0, \widehat{c_1}$
- Si $l > 1$, como la cadena infinita $c_0, c_1 c_2 \dots c_l c_1 c_2 \dots c_l \dots$ que se abrevia en la forma $c_0, c_1 \widehat{c_2 \dots c_l}$

En ambos casos α recibe el nombre de *número decimal periódico puro* y a la representación bajo el símbolo $\widehat{}$ se le llama *periodo*, cuya longitud es l .

$n > 0$, entonces la representación de α se define:

- Si $l = 1$, como la cadena infinita $c_0, c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1} c_{n+1} c_{n+1} \dots$ que se abrevia en la forma $c_0, c_1 c_2 \dots c_n \widehat{c_{n+1}}$
- Si $l > 1$, como la cadena infinita

$c_0, c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1} c_{n+2} \dots c_{n+l} c_{n+1} c_{n+2} \dots c_{n+l} \dots$ que se abrevia en la forma $c_0, c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1} \widehat{c_{n+2} \dots c_{n+l}}$

En ambos casos α recibe el nombre de *número decimal periódico mixto*. A la cadena $c_1 c_2 \dots c_n$ se le llama *anteperiodo* y la representación bajo el símbolo $\widehat{}$ se le llama *periodo*, cuya longitud es l .

3.2.7 Conjuntos y sucesiones en cuerpos totalmente ordenados

En este apartado se desarrollan definiciones básicas relativas a conjuntos y sucesiones en cuerpos totalmente ordenados.

3.2.7.1 Conjuntos acotados

Sea K un cuerpo totalmente ordenado, es decir, un cuerpo conmutativo sobre el que se ha definido un orden total compatible con la suma y el producto de K y sea S un subconjunto no vacío de K . (Nota: en este apartado se utiliza la abreviatura “resp.” para referirnos al término: respectivamente).

Se dice que S está acotado superiormente (resp. acotado inferiormente) si existe algún $k \in K/x \leq k$ (resp. $x \geq k$) $\forall x \in S$. A k se le llama cota superior (resp. cota inferior) del conjunto S . Se dice que un conjunto es acotado si lo es superior e inferiormente, esto es, si existen $k, k' \in K/k \leq x \leq k' \forall x \in S$.

Si el conjunto S es acotado superiormente, se dice que $\alpha \in K$ es el supremo de S y se expresa como $\alpha = \sup S$, si α es la menor de las cotas superiores de S , en caso de que exista. Si además, $\alpha \in S \rightarrow \alpha$ es el mayor elemento de S y se le llama máximo de S . Para un conjunto S acotado inferiormente, se dice que $\beta \in K$ es el ínfimo de S y se representa como $\beta = \inf S$, si β es la mayor de las cotas inferiores de S , siempre que exista. Si $\beta \in S$, entonces β es el menor elemento de S y se le llama mínimo de S .

3.2.7.2 Sucesiones monótonas acotadas y convergentes

Sea K un cuerpo totalmente ordenado y (x_n) una sucesión de elementos de K , esto es, una aplicación $f: N \rightarrow K$ que a cada natural n le asigna un elemento $x_n = f(n) \in K$. Se dice que:

- 1) (x_n) es monótona creciente (resp. monótona decreciente) si ocurre que $x_{n+1} \geq x_n$ (resp. $x_{n+1} \leq x_n$) para cada $n \in N$.
- 2) (x_n) es acotada superiormente (resp. acotada inferiormente) si lo es el conjunto $\{x_n: n \in N\}$, es decir, si existe algún $k \in K/x_n \leq k$ (resp. $x_n \geq k$) $\forall n \in N$. Se dirá que (x_n) es acotada cuando lo sea superior e inferiormente, esto es, cuando el conjunto $\{x_n: n \in N\}$ sea acotado.
- 3) (x_n) es convergente en K y su límite es $l \in K$, si para cada $\varepsilon \in K: \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0$ sea $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$. Se escribe entonces indistintamente $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l, \lim x_n = l$ o también, $x_n \rightarrow l$.

3.2.8 Incompletitud de $\mathbb{Q}$

Ya los griegos detectaron la insuficiencia de los números racionales para medir magnitudes. En particular observaron que fijado un número primo p no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea p .

Destacamos ahora algunas de las carencias fundamentales que se resumen diciendo que $\mathbb{Q}$ es incompleto.

1) Hay longitudes que no son expresables mediante números racionales: La medida de magnitudes en general plantea problemas para cuya solución los números racionales resultan insuficientes. Como ejemplo podemos plantear el problema de determinar el número x que mide la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado la unidad. Según el teorema de Pitágoras, dicho número es solución de la ecuación $x^2 = 2$

Si x fuese racional, sería $x = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{N}$ y $m.c.d.(p, q) = 1$. En tal caso, $p^2 = 2q^2$, por lo que el número primo 2 es divisor de p^2 y, por tanto, de p , de modo que será $p = 2c$ y entonces $4c^2 = 2q^2$, es decir, $2c^2 = q^2$ y por idéntica razón a la anterior, 2 es divisor de q , lo que está en contradicción con ser $m.c.d.(p, q) = 1$. Así, la ecuación anterior no tiene solución en $\mathbb{Q}$.

2) Existen conjuntos de números racionales no vacíos y acotados superiormente que no tienen supremo: Considérese el conjunto de números racionales

$$S = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$$

Este conjunto no es vacío y está acotado superiormente, pues si $r \in S$, entonces $r^2 < 2 < 4$ y $r < 2$, de modo que 2 es una cota superior de S . Sin embargo, el conjunto S no tiene supremo en el conjunto de los racionales. Para comprobarlo, supongamos que existiese un número racional $\alpha = \sup S$. Si $\alpha \in S$, sería $\alpha^2 < 2$ y tomando $h \in \mathbb{Q} / 0 < h < \min\left\{\frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1}, 1\right\}$, que existe por ser $\mathbb{Q}$ denso, tendríamos:

$$(\alpha + h)^2 = \alpha^2 + 2h\alpha + h^2 = \alpha^2 + (2\alpha + h)h < \alpha^2 + (2\alpha + 1)h < \alpha^2 + 2 - \alpha^2 = 2$$

lo que nos dice que $\alpha + h \in S$, pero esto no es posible ya que $\alpha + h > \alpha$ y $\alpha = \sup S$. Supongamos entonces que es $\alpha \in \mathbb{Q} - S$. Entonces ha de ser $\alpha^2 \geq 2$ y puesto que ningún número racional tiene su cuadrado igual a 2, deberá ser $\alpha^2 > 2$. Si ahora se toma h racional tal $0 < h < \frac{\alpha^2-2}{2\alpha}$ tendremos:

$$(\alpha - h)^2 = \alpha^2 - 2h\alpha + h^2 > \alpha^2 - (\alpha^2 - 2) + h^2 = 2 + h^2 > 2$$

Como para todo $r \in S$ es $r^2 < (\alpha - h)^2$ y por tanto, $r < \alpha - h$, de suerte que $\alpha - h$ es una cota superior de S , resultado también inadmisibile por ser α el supremo de este conjunto. Se concluye así que el conjunto S no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

- 3) Existen sucesiones de números racionales monótonas y acotadas que no tienen límite racional:** Considérese la sucesión (r_n) de números racionales definida por recurrencia mediante:

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad r_{n+1} = \frac{\frac{1}{2} + r_n}{1 + r_n} \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

Comprobamos que (r_n) es monótona creciente y acotada superiormente y que, en cambio, no tiene límite racional.

- (r_n) es acotada: Probamos por inducción que $0 < r_n < 1$. Esto es inmediato para $n = 1$ y si suponemos que $0 < r_k < 1$, entonces $r_{k+1} = \frac{\frac{1}{2} + r_k}{1 + r_k} > 0$ por ser cociente de dos números positivos y también $r_{k+1} = \frac{\frac{1}{2} + r_k}{1 + r_k} < \frac{1 + r_k}{1 + r_k} = 1$, con la relación también es cierta para $n = k + 1$ y la sucesión es acotada.

- (r_n) es monótona creciente: Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ es:

$$r_{n+1} - r_n = \frac{\frac{1}{2} + r_n}{1 + r_n} - \frac{\frac{1}{2} + r_{n-1}}{1 + r_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}(r_n - r_{n-1})}{(1 + r_n)(1 + r_{n-1})}$$

Y $r_{n+1} - r_n$ tiene el mismo signo que $r_n - r_{n-1}$. Como es $r_2 - r_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} > 0$, resulta que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $r_{n+1} - r_n > 0$, es decir, (r_n) es monótona creciente.

- (r_n) no es convergente en $\mathbb{Q}$: Supongamos, al contrario que lo fuese y que $l \in \mathbb{Q}$ fuese su límite. De las propiedades aritméticas de los límites se deduciría:

$$\lim r_{n+1} = \frac{\frac{1}{2} + \lim(r_n)}{1 + \lim(r_n)}, \text{ es decir, } l = \frac{\frac{1}{2} + l}{1 + l}$$

Esta ecuación es equivalente a la $l^2 = \frac{1}{2}$ que no tiene solución racional, pues si $l \in \mathbb{Q}$ lo fuese, $2l$ sería solución racional de la ecuación $x^2 = 2$, lo que no es posible como se comprobó en 1). Por tanto, la sucesión (r_n) no tiene límite en $\mathbb{Q}$.

3.2.9 Relación con el currículum

Al igual que los restantes temas referentes a los conjuntos numéricos, necesitamos destacar que los contenidos, en sus distintos aspectos, se reparten a lo

largo de la E.S.O., según los distintos niveles y la necesidad de utilizarlos en cada uno de ellos, y según aumenta el nivel de conocimiento del alumnado.

Ya en el quinto curso de primaria se comienzan a introducir los números racionales, el concepto de fracción de la unidad, el alumnado manipula formas u objetos divididos en partes iguales. Después de comprender la utilidad de las fracciones, empiezan a trabajar la relación entre la división y los números decimales.

Durante los cuatro cursos de la E.S.O. se profundizará paulatinamente en el uso fundamental de los números racionales aplicándolos en tres conceptos prácticos concretos: la fracción, el decimal y el porcentaje. Además, paralelamente se destacarán los conceptos teóricos de: operaciones, propiedades y agilización del cálculo. También se considera fundamental que el alumno comprenda la diferencia entre el orden de $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ y el de $\mathbb{Q}$, es decir, la densidad de los racionales y la ausencia del número siguiente a uno dado.

A continuación definimos una posible secuencia más concreta de los contenidos de cada curso:

- 1) Primer curso: Fracción. Partes de un todo. Fracciones mayores que la unidad. Números mixtos. Equivalencia de fracciones. Expresión decimal de una fracción. Reducción a común denominador. Comparación de fracciones.
- 2) Segundo curso: Simplificación de fracciones. Reducción a común denominador. Comparación. Expresión decimal, cálculo con decimales. El signo de las fracciones. Cálculo con fracciones.
- 3) Tercer curso: Cálculo con fracciones. Expresión decimal de una fracción y expresión fraccionaria de un decimal. El número racional. Fracciones y porcentajes.
- 4) Cuarto curso: Repaso de los conceptos anteriores. Propiedades de las operaciones. Los conjuntos numéricos.

3.3 Fundamentación curricular

Este apartado del presente constituye una investigación de carácter curricular, la cual consiste en plasmar una comparación de dos libros de textos elegidos del nivel educativo de primero de educación secundaria de la asignatura de matemáticas con los contenidos del currículo de la normativa. Con ello se podrán detectar carencias o posibles mejoras en la metodología planteada en los mismos y se podrán sacar conclusiones en las que basar la unidad didáctica propuesta.

Legislación estatal

La ley que rige a nivel estatal y que define las bases del sistema educativo es la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

La legislación que se ha utilizado con la que se compararán los libros es:

- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.
- Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado (actualmente vigente).
- Orden de 14 de julio de 2016 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.
- Instrucción Conjunta 1 /2022, de 23 de junio, de la Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa y de la Dirección General de Formación Profesional, por la que se establecen aspectos de organización y funcionamiento para los centros que impartan educación secundaria obligatoria para el curso 2022/2023.

No existen muchos estudios estadísticos que recopilen los libros de texto más utilizados en la comunidad Autónoma de Andalucía. Se han elegido las editoriales de Anaya y Santillana, teniendo en cuenta la siguiente imagen:

Editorial	Curso											
	1º		2º		3º		4ºA		4ºB		Total	
	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi
Anaya	73	28	73	28	76	25	67	18	63	21	352	120
Bruño	22	3	22	3	21	3	9	1	8	1	82	11
Casals	2		3		2		0		0		7	0
Edelvives	4	3	4	3	4	4	1	3	1	4	14	17
Editex	0		0		0		0		1		1	0
Everest	0		1		0		0		0		1	0
Guadiel-Edebé	1	4	2	6	1	4	2	2	2	2	8	18
McGraw Hill	0		0		0		3		3		6	0
Oxford	19	5	21	4	18	5	19	6	20	6	97	26
Santillana	32	11	31	14	33	9	44	4	42	5	182	43
SM	33	39	28	45	33	41	35	31	36	42	165	198
Vicen Vives	1	2	1	1	2	2	1	0	1	0	6	5
Total	187	95	186	104	190	93	181	65	177	81	921	438
No consigna	23	14	24	5	20	16	29	44	33	28		236

CPu = Colegio Público; CPi = Colegio Privado

Figura 3: Número de centros públicos y privados andaluces que utilizan cada editorial por curso. del Pino Ruiz, J. & Estepa Castro, A. (2015). Análisis de libros de texto. Estadística de libros empleados en Andalucía. Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (p. 117-124). Universidad de Granada.

Se ha tomado el criterio de elegir estas editoriales ya que están entre las tres más utilizadas en la comunidad autónoma de Andalucía en el nivel educativo de 1º de ESO. En concreto, se analizarán los de las editoriales de SANTILLANA, Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por Teresa Grence Ruiz. y ANAYA de Colera y Gaztelu (2016).

3.3.1 Ajuste de contenidos al currículo de la normativa

En este apartado se tendrá en cuenta lo recogido en las dos normativas (autonómica y estatal), con respecto a los contenidos básicos del *bloque 2 (Números y álgebra)* que se enseñan en la asignatura de Matemáticas para 1º de ESO. Estos contenidos son:

Normativa estatal: Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo:

- Fracciones en entornos cotidianos.
- Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones.
- Números decimales. Representación, ordenación y operaciones.
- Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones.
- Significados y propiedades de los números en contextos diferentes al del

cálculo: números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.

- Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural.
- Jerarquía de las operaciones. Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales.
- Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.

Normativa autonómica *Orden de 15 de enero de 2021*:

- Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones.
- Números decimales. Representación, ordenación y operaciones.
- Relación entre fracciones y decimales. Jerarquía de las operaciones.
- Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora).
- Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales.
- Constante de proporcionalidad. Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales.

La mayoría de libros editan su contenido basándose en la normativa vigente, aunque ciertas editoriales incluyen contenidos adicionales. Así, el alumnado adquiere tanto objetivos básicos, como otros complementarios. A continuación se muestra el siguiente cuadro donde se comparan los contenidos de los dos ejemplares elegidos.

Tabla 2. CONTENIDOS LIBROS DE MATEMÁTICAS	
ANAYA, Colera y Gaztelu	SANTILLANA, Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por Teresa Grence Ruiz.
UNIDAD: FRACCIONES	
El significado de las fracciones	Fracciones
Fracciones equivalentes	Fracciones equivalentes Comparación de fracciones
Algunas operaciones con fracciones	Suma y resta de fracciones Multiplicación y división de fracciones
UNIDAD: NÚMEROS DECIMALES	
Las órdenes de unidades decimales	Números decimales
Operaciones con números decimales	Aproximación de números decimales
División de números decimales	Multiplicación y división por la unidad seguida de ceros

	Operaciones con números decimales
	Expresión de una fracción como número decimal
	Tipos de números decimales
UNIDAD: PROPORCIONALIDAD	
Relación de proporcionalidad entre magnitudes	Razón y proporción
Problemas de proporcionalidad directa	Magnitudes directamente proporcionales
Porcentajes	Problemas de proporcionalidad directa
Aumentos y disminuciones porcentuales	Porcentajes
	Problemas con porcentajes

Si se hace una comparación de estos libros se puede admitir que ambos son correctos en cuanto a su contenido en el bloque 2 del currículo de la normativa vigente. En los dos se recogen las características, los significados y las operaciones de números racionales.

Vemos que los contenidos se corresponden con los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje (descritos en el apartado 5.10) evaluables del bloque 2 de la legislación vigente. Estos son los objetivos básicos que los estudiantes deben adquirir y los contenidos que se van a evaluar.

Sin embargo, en ninguno de los dos están presentes los siguientes contenidos:

- Significado y las propiedades de los números en contextos diferentes al del cálculo: números triangulares, cuadrados...
- Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural. Operaciones.

Si analizamos por separado cada libro, en el caso de ANAYA, en general los contenidos se corresponden a los mínimos recogidos en la normativa. Por ejemplo, no incluye la comparación entre números fraccionarios, la aproximación de números decimales. Un concepto matemático muy interesante para que el aprendizaje de fracciones tenga mayor rigor es el de razón, que tampoco lo incluye el libro de ANAYA.

En general, el libro de Santillana incluye más contenidos de los recogidos en la normativa.

Las unidades son amplias y, además de proporcionar la enseñanza de procedimientos para realizar las operaciones entre números, explican conceptos matemáticos que ayudan en gran medida a comprender el significado de los números

racionales, su representación y su utilidad, evitando así fundamentar la enseñanza en interiorizar procesos mecánicos.

3.3.2 Análisis de los contenidos en los textos escolares.

En este apartado se analizan más en profundidad y más detalladamente los contenidos de los dos libros seleccionados. Como ya se ha mencionado, el libro de Santillana tiene unos contenidos más completos comparándolo con el de la editorial ANAYA. Veamos a continuación como están estructurados estos contenidos, que metodología utilizan, vamos a comparar en qué orden se encuentran y como se han planteado las actividades y tareas de cada uno.

3.3.2.1 Libro editorial ANAYA

Para empezar, es importante destacar que en este libro, primero se desarrolla la unidad de números decimales y después, la de fracciones, tratando ambas expresiones de números racionales de forma independiente.

Al comienzo de cada unidad, se ilustra el tema con una reseña histórica que tiene como objetivo introducir el concepto con un aspecto de su origen histórico, aunque no parece que pueda conseguir que este aspecto conecte mucho con el interés del alumnado o que se comprenda correctamente la importancia de este hecho histórico.



Figura 4: Introducción unidad de fracciones Libro ANAYA

La unidad de fracciones se estructura como vemos en las siguientes imágenes:

1 El significado de las fracciones

UNIDAD 7

Una fracción se puede contemplar como una parte de la unidad, como un operador o como una división. Veamos cada uno de esos conceptos con mayor detalle.

Las fracciones expresan partes de la unidad

Un todo se toma como unidad y se divide en porciones iguales. Una fracción indica una determinada cantidad de esas porciones.

Recuerda

 $\frac{5}{9}$ → NUMERADOR
 $\frac{5}{9}$ → DENOMINADOR
 El numerador indica las partes que se toman. El denominador, las partes en que se divide la unidad.

UNIDAD


$\frac{2}{5}$ → Dos quintos

UNIDAD


$\frac{1}{6}$ → Un sexto

UNIDAD


$\frac{4}{12}$ → Cuatro doceavos

Una fracción puede representar una cantidad menor, igual o mayor que una unidad. Observa:

 $\frac{1}{4} < 1$

 $\frac{4}{4} = 1$

 $\frac{5}{4} > 1$

Las fracciones son operadores

Una fracción es un número que opera a una cantidad y la transforma. Por ejemplo, si el bidón tiene una capacidad de 20 litros:



En el bidón hay $\frac{2}{5}$ de 20 litros. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5} \text{ de } 20 = 20 : 5 = 4 \\ \frac{2}{5} \text{ de } 20 = 4 \cdot 2 = 8 \end{array} \right.$
 $\frac{2}{5}$ de 20 litros = $(20 : 5) \cdot 2 = 8$ litros

En la web

Averigua si has entendido el concepto de fracción.
 Practica con el concepto de fracción.

En la web

Practica con las fracciones como operadores.

Para calcular la **fracción de un número**, se divide el número entre el denominador, y el resultado se multiplica por el numerador.

Figura 5: Concepto de fracción del libro de ANAYA.

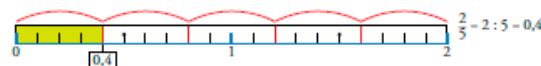
Las fracciones son divisiones indicadas

Observa:

• $\frac{2}{5}$ → La unidad se divide en 5 partes y se toman 2.



• $2 : 5$ → Dividimos dos unidades entre 5.

 $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$

Una fracción equivale al cociente entre el numerador y el denominador.

Figura 6: Concepto de fracción del libro de ANAYA.

Como vemos, los apartados de cada unidad se organizan, primero explicando un concepto, en este caso, el de fracción (de una manera gráfica, tanto con ejemplos que ilustran partes de un todo, como utilizando su representación en la recta real, la cual, ya conocen de los cursos anteriores) y después, desarrollando actividades relacionados con lo explicado. Se observa una procedimiento tradicional, basando el concepto en la definición de “una parte de un todo” y una manera de aplicar lo aprendido de forma procedimental y mecánica.

7.  Obtén la fracción irreducible.

a) $\frac{2}{4}$

b) $\frac{10}{14}$

c) $\frac{5}{15}$

d) $\frac{18}{22}$

e) $\frac{5}{25}$

f) $\frac{6}{27}$

g) $\frac{21}{28}$

h) $\frac{22}{33}$

i) $\frac{30}{45}$

j) $\frac{20}{60}$

k) $\frac{56}{80}$

l) $\frac{165}{330}$

Figura 7: Ejercicio de la unidad de Fracciones del libro ANAYA.

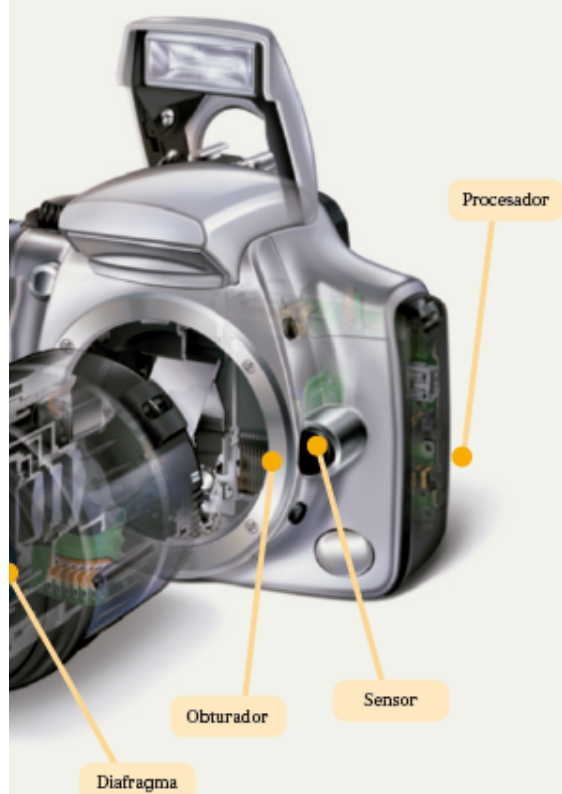
3.3.2.2 Libro Santillana

La primera diferencia con el libro de Anaya es el orden que tienen las unidades. En este caso, la unidad de fracciones se encuentra antes que la de números decimales, y, en esta última se relacionan los dos conceptos.

Este libro también cuenta en cada unidad con una introducción pero, en este caso, ilustrando el concepto con un uso cotidiano, como se muestra en la imagen:

Fracciones

4



SABER

- Fracciones. Fracciones equivalentes
- Comparación de fracciones
- Operaciones con fracciones

SABER HACER

- Expresar una fracción impropia como la suma de un número natural más una fracción propia
- Reducir fracciones a común denominador
- Calcular la fracción irreducible
- Resolver operaciones combinadas con fracciones



? VIDA COTIDIANA

La fotografía

En las primeras cámaras fotográficas, para fotografiar un objeto se necesitaba que estuviera más de 30 minutos totalmente quieto.

En las cámaras actuales esto lo regula la velocidad de obturación. Con velocidades superiores a $1/60$ segundos podemos conseguir congelar el movimiento de los objetos en movimiento. Sin embargo, con velocidades más lentas, inferiores a $1/60$ segundos, conseguimos imágenes movidas.

- Con una velocidad de $1/30$, ¿podré congelar el movimiento de un coche que circula por una calle?



Figura 8: Introducción Unidad de fracciones libro SANTILLANA.

Esta analogía con un objeto que los alumnos consideran familiar, de su entorno físico, resulta más eficaz ya que puede tener mejores resultados si lo que se pretende es enseñar el concepto a través de, primero despertar el interés del docente y llamar su atención haciéndole ver que lo que está aprendiendo tiene una utilidad práctica, y segundo, consiguiendo motivarle a la hora de abordar las tareas.

Una **fracción** es una expresión $\frac{a}{b}$, donde a y b son números naturales llamados **numerador** y **denominador**, respectivamente.

1.1. Interpretación de una fracción

- **Fracción como parte de la unidad.** Su denominador representa el número de partes iguales en que se divide la unidad y su numerador, el número de partes que se toman.
- **Fracción como cociente de dos números.** Para hallar su valor, se divide el numerador entre el denominador.
- **Fracción como operador de un número.** Para calcular su valor, se multiplica el número por el numerador y se divide entre el denominador.



EJEMPLO

1. Expresa estos enunciados mediante una fracción.

- a) En un huerto que está dividido en 9 partes hay 4 sembradas.

La fracción $\frac{4}{9}$ representa la parte sembrada del huerto.

- b) Repartimos 20 € entre 5 personas.

La fracción $\frac{20}{5}$ representa el dinero que le corresponde a cada persona. Su valor es $20 : 5 = 4$ €.

- c) En una oficina, $\frac{2}{5}$ de sus 40 trabajadores llevan gafas.

Actúa como operador $\rightarrow \frac{2}{5}$ de 40 $= \frac{40 \cdot 2}{5} = 16$ llevan gafas.

1.2. Fracciones propias e impropias

Una **fracción** es **propia** si su numerador es menor que su denominador. Es **impropia** si su numerador es mayor que su denominador.

Figura 9: Concepto de fracción libro SANTILLANA

La manera de abordar el tema en este caso parte de tres conceptos relacionados con la idea de fracción:

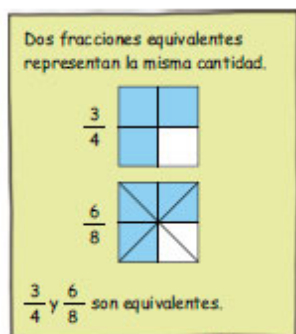
- Como parte de una unidad
- Como cociente de dos números
- Como operador

Y, como vemos, cada concepto se ilustra con un ejemplo en el que se aplica éste de una manera práctica y en el que se comprende de forma inmediata su significado.

2

Fracciones equivalentes

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes**, y se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$.



EJEMPLO

2. Determina si los siguientes pares de fracciones son equivalentes.

- a) $\frac{6}{8}$ y $\frac{3}{4}$ $\frac{6 \cdot 4 = 24}{8 \cdot 3 = 24} \rightarrow 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3 \rightarrow$ Son equivalentes.
- b) $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{7}$ $\frac{2 \cdot 7 = 14}{5 \cdot 4 = 20} \rightarrow 2 \cdot 7 \neq 5 \cdot 4 \rightarrow$ No son equivalentes.

En una fracción, al multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un número distinto de cero, se obtiene otra fracción equivalente.

EJEMPLO

3. Comprueba que $\frac{2}{8}$ es equivalente a la fracción resultante de multiplicar por 3 su numerador y denominador.

Multiplicamos por 3 numerador y denominador:

$$\frac{2}{8} \rightarrow \frac{2 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{6}{24}$$

Comprobamos que las fracciones son equivalentes:

$$2 \cdot 24 = 48 = 8 \cdot 6 \rightarrow \frac{2}{8} \text{ y } \frac{6}{24} \text{ son equivalentes.}$$

2.1. Reducción a común denominador

Reducir a común denominador dos o más fracciones consiste en obtener otras equivalentes con igual denominador.

ACTIVIDADES

10 **PRACTICA.** Indica cuáles son equivalentes.

- a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ c) $\frac{3}{15}$ y $\frac{3}{9}$

11 **APLICA.** Calcula el valor de x para que sean equivalentes.

- a) $\frac{x}{3} = \frac{8}{6}$ b) $\frac{4}{x} = \frac{6}{3}$ c) $\frac{8}{4} = \frac{x}{2}$

12 **REFLEXIONA.** Escribe tres fracciones equivalentes en cada caso.

- a) Un cuarto de hora b) Una semana al mes

13 **REFLEXIONA.** Si el numerador de una fracción lo dividimos por un número, y el denominador lo multiplicamos por el mismo número, ¿son equivalentes las fracciones? Pon un ejemplo.

Figura 10: Concepto de fracciones equivalentes libro SANTILLANA

A diferencia del libro de ANAYA, éste basa la explicación de los conceptos en la demostración del mismo mediante ejemplos que no son tan mecánicos y repetitivos. Buscan más el razonamiento del alumno para intentar conseguir su comprensión haciendo que deduzca ideas y buscando soluciones con las herramientas y la explicación dada. Sin embargo, en la parte de actividades, la mayoría de éstas, al igual que en el libro de ANAYA, buscan la repetición y la aplicación de un procedimiento.

Una idea interesante que contiene este libro es la parte final de cada unidad:



PROYECTO FINAL. Trabajo cooperativo

OBJETIVO: Escribir un artículo para la revista del instituto

Una vez formados los grupos, seguid este proceso:



1.ª Fase.

- Elaborad una lista con temas que se podrían tratar en el artículo.
- Buscad información sobre ellos y evaluad el interés que pueden tener para las personas que lo lean.
- Determinad los posibles enfoques que se pueden dar a cada tema: ecológico, tecnológico, histórico...



2.ª Fase.

- Estimad el espacio que debe ocupar el artículo y determinad si los temas propuestos se adaptan a esta extensión.
- Diseñad el formato del artículo: necesidad de fotografías, ilustraciones, espacio que debe ocupar el texto...



3.ª Fase.

- Poned en común la información y escoged el tema del artículo.
- Buscad fotografías o ilustraciones que aporten claridad al artículo.
- Escribid el artículo, que estará firmado por todo el grupo, añadiendo las fuentes de donde habéis obtenido la información que aparece en el artículo.

Pruebas PISA

El embalse

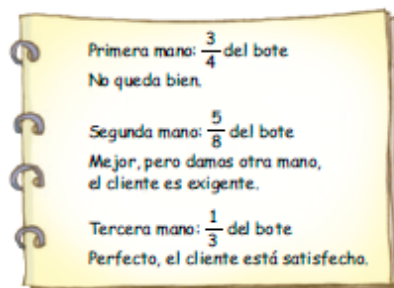
- 114** Para evitar que un embalse se quede vacío, se establece que tiene que estar, como mínimo, a $\frac{1}{12}$ de su capacidad. Cuando el agua está por debajo de este mínimo, se ordenan cortes en el suministro de agua. Si está a $\frac{2}{3}$ de su capacidad, y se reduce $\frac{1}{60}$ por día:



- Después de 30 días, ¿hay que empezar a realizar los cortes en el suministro?
- ¿Para cuántos días habrá agua en el embalse si no llueve durante ese tiempo?

El pintor profesional

- 115** Se quiere pintar de blanco una pared azul oscura. Como el cambio de color es drástico, habrá que dar más de una mano de pintura. El pintor anota las manos de pintura que da y la parte del bote que utiliza.



- ¿Tiene suficiente con un bote de pintura?
- ¿Cuánta pintura ha sobrado en el bote?

Figura 11: Actividades finales de la unidad de Fracciones del libro SANTILLANA

Resulta positivo observar que se propone al final de cada unidad un proyecto colaborativo en el que se trabaje entre varios alumnos los conceptos e ideas aprendidos utilizando también TICs y despertando también el interés del alumnado, observando la aplicación práctica que tiene lo estudiado.

3.3.3 Conclusiones

Como hemos mencionado, si observamos los contenidos de ambos libros y los comparamos con los dispuestos en la normativa estatal y autonómica, los dos libros los contienen, sin embargo observamos ciertas diferencias.

Si bien es cierto que dos contenidos de la normativa no están recogidos en

ninguno de los dos materiales didácticos, el libro de SANTILLANA tiene un contenido más extenso ya que incluye otros adicionales y plantea actividades variadas para intentar evaluar los contenidos con diferentes estrategias, recogiendo una metodología que, en cada caso, se adapta al concepto o idea que se intenta enseñar y se basa en la comprensión de los mismos. Sin embargo, al igual que el libro de ANAYA, utiliza actividades con procedimientos repetitivos priorizando tareas y métodos basados en la resolución mecánica de ejercicios y procesos. También resulta interesante que el libro de SANTILLANA intente en cada unidad, ilustrar los contenidos y conceptos que se intentan enseñar con ejemplos, usos y actividades cotidianas para que el alumno comprenda “para qué sirve” lo que está aprendiendo y se despierte su interés. Además, el hecho de proponer la evaluación de los conceptos con ejercicios propuestos por el informe PISA, nos hace ver que hay cierto interés por adaptar la metodología a algunas de las necesidades que tiene el sistema educativo español, detectadas por un organismo oficial reconocido intentando, a su vez, suplir ciertas carencias relacionadas con el tema que tratamos. En este sentido, el libro de ANAYA ofrece menos propuestas ya que utiliza una metodología menos actualizada.

4. Proyección didáctica

La unidad didáctica que se va desarrollar en la segunda parte del trabajo se titula: “Números racionales: fracciones”. Se trata de la unidad 7 del temario de 1º de la ESO.

4.1 Legislación educativa. Etapa, ciclo y nivel educativo.

La unidad didáctica que se propone se sitúa, en la planificación del bloque 2, inmediatamente después de la unidad de “Números enteros” y, antes de la de “Números decimales”. Ésta se dirige al grupo escolar de 1º de educación secundaria. La unidad constituye un tema esencial para el aprendizaje del conjunto de números racionales y que está muy relacionada con la unidad que le sigue después, que se centra en los números decimales: su significado, operaciones con números decimales y su relación con los números fraccionarios.

Desde el punto de vista práctico, esta unidad resulta de gran utilidad e interés ya que en nuestro entorno físico existen sucesos que están definidos y representados por expresiones fraccionarias. En esta unidad se estudiará el concepto de fracción y como operar con números fraccionarios así como, su relación con ideas y sucesos cotidianos.

Se han tenido en cuenta los contenidos de los bloques recogidos en el Real Decreto 217/2022, en concreto el bloque 2, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria, y de las aportaciones de la Comunidad Autónoma de Andalucía, con la Orden del 15 de enero de 2021 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas y con la Orden de 14 de julio de 2016 en la que se regulan determinados aspectos a la atención a la diversidad y se establece el orden que debe seguir la evaluación del proceso de aprendizaje del alumno. También se ha seguido la Instrucción conjunta 1 /2022, de 23 de junio, de la Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa y de la Dirección General de Formación Profesional, por la que se establecen aspectos de organización y funcionamiento para los centros que impartan Educación Secundaria Obligatoria para el curso 2022/2023.

4.2 Contextualización del centro y del aula

4.2.1 Descripción del centro

La unidad didáctica que se expone va enfocada a un grupo de 1º de la ESO del centro I.E.S. Virgen del Carmen de Jaén.

El perfil del alumnado es muy variado, ya que el centro ofrece muchos tipos de enseñanza. Por la mañana se imparte la docencia de educación secundaria y bachillerato, así como, algunos módulos de grado medio y superior. Por la tarde la

actividad es mucho menor, teniendo lugar la enseñanza de adultos y el resto de módulos. Si bien es cierto que, por las tardes, en el centro tienen lugar muchas actividades culturales, como grupos de teatro, de música, exposiciones, etc., lo que enriquece mucho el ambiente del mismo.

4.2.2 Instalaciones y materiales del centro

El centro consta de un edificio dispuesto en varias alas que crean patios interiores, además de los espacios al aire libre distribuidos alrededor del mismo. Tiene un acceso principal por el que se accede al hall donde se ubica la portería y el acceso al salón de actos. El centro cuenta con 3 plantas comunicadas por dos escaleras generales y multitud distribuidores y pasillos que dan acceso a las diferentes aulas, aseos, salas de profesores, despachos y departamentos.

En cuanto a las instalaciones del instituto, en general son suficientes a pesar de la antigüedad del mismo. Todas las aulas tienen instalación de ordenador y proyector de pantalla además del mobiliario común. Existen aulas de uso común como son: las de informática, biblioteca, laboratorios de biología y tecnología, etc. El centro cuenta con una gran superficie de espacio exterior y posee muchas zonas para actividades deportivas y un amplio gimnasio. Además, por los distribuidores y pasillos se observan exposiciones de materiales y experimentos del departamento de biología así como, numerosos murales, a veces efímeros, que inundan el centro de elementos decorativos con temáticas de actualidad, como el feminismo, las nuevas tecnologías, el arte y la cultura.

4.2.3 Descripción del aula

El espacio del aula está organizado con mesas individuales separadas, (no ancladas al suelo), todas orientadas hacia la mesa del profesor donde se ubica la pizarra y el proyector de ordenador. Las paredes del aula están decoradas con murales que han realizado los alumnos en clase en grupo. Al fondo del aula se encuentran perchas y un armario al lado de la mesa del profesor. En este caso, el aula tiene una zona más alta en el suelo en el espacio de la mesa del profesor y de la pizarra hecha de obra a modo de “tarima”.

En cuanto al material del que se dispone, el aula como se ha comentado anteriormente, una pizarra de tiza y un proyector del ordenador situado en la mesa del profesor. Con éste podemos proyectar cualquier material preparado para la clase (material audiovisual, ejercicios, etc.).

4.3 Objetivos

A continuación se explican los objetivos de la unidad didáctica.

Se van a ir desarrollando desde los más generales a los más concretos. Consultando el Real Decreto 217/2022 tomamos como referencia los objetivos generales de etapa, el cual se establece el currículo básico de la Educación Secundaria

Obligatoria.

Por otro lado, se toma como referencia la Orden de 15 de enero de 2021 para definir los objetivos del área de matemáticas, “por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado”.

Por último, los objetivos específicos de la unidad didáctica de “Fracciones” se expondrán de forma que estén fundamentados en los generales de etapa y los de área. Así mismo, se tendrán en cuenta los utilizados por los autores en los libros de texto y aportando ciertas conclusiones obtenidas en su análisis y en la investigación didáctica realizada al comienzo de este trabajo.

4.3.1 Objetivos generales de etapa

Según el Real Decreto 217/2022: “la Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades que les permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Desarrollar las competencias tecnológicas básicas y avanzar en una reflexión ética sobre su

funcionamiento y utilización

- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado, la empatía y el respeto hacia los seres vivos, especialmente los animales, y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

4.3.2 Objetivos específicos de área

Según la Orden del 15 de enero de 2021, la enseñanza de la materia Matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía contribuirá a desarrollar en el alumnado capacidades que le permitan:

1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e

idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.

3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.
4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.
5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.
6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias, en situaciones reales y en el entorno, susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.
7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.
8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.
9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.
10. Desarrollar destrezas sociales, reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, para fomentar el bienestar personal y grupal y para crear relaciones saludables.

4.3.3 Objetivos de la unidad didáctica

Teniendo en cuenta los objetivos expresados en la normativa vigente y el proceso de investigación realizado en este trabajo, los objetivos de la unidad didáctica propuesta son:

1. Comprender el significado de fracción como número racional y su

diferencia con los números naturales y enteros.

2. Aprender las tres ideas del concepto de fracción: como cociente de dos números, como operador y como expresión de una parte de un todo.
3. Saber representar fracciones en la recta real y, con ello, conocer la magnitud que representan.
4. Estudiar qué son las fracciones equivalentes y como se obtienen. Comprender este concepto gráficamente.
5. Conocer sucesos y objetos de la vida cotidiana que pueden ser representados con fracciones, experimentando con su entorno físico más inmediato.
6. Reducir a común denominador una serie de fracciones y comprender su utilidad: comparación de fracciones y operaciones de suma y resta.
7. Experimentar con Geogebra números fraccionarios de forma interactiva y cooperativa.
8. Calcular multiplicaciones y divisiones de fracciones.
9. Conocer el procedimiento para calcular operaciones combinadas de fracciones.

4.4 Competencias clave

En el Real Decreto 217/2022, se definen las competencias clave como: “las capacidades para aplicar, de forma integrada, los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos”.

El aprendizaje basado en competencias se caracteriza por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral. Por ello, el proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe abordarse desde todas las áreas de conocimiento y por parte de las diversas instancias que conforman la comunidad educativa, tanto en los ámbitos formales como en los no formales e informales (Orden ECD/65, 2015).

A efectos del Real Decreto mencionado, las competencias clave en el Sistema Educativo Español son las siguientes:

- a) Competencia en comunicación lingüística (CCL)
- b) Competencia plurilingüe (CP)
- c) Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)
- d) Competencia digital (CD)

- e) Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)
- f) Competencia ciudadana (CC)
- g) Competencia emprendedora (CE)
- h) Competencia en conciencia y expresiones culturales (CCEC)

Es evidente que en este proyecto didáctico la competencia que más se trabajará es la competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería, (competencia STEM por sus siglas en inglés) entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno de forma comprometida, responsable y sostenible.

La competencia matemática permite desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos.

La competencia en ciencia conlleva la comprensión y explicación del entorno natural y social, utilizando un conjunto de conocimientos y metodologías, incluidas la observación y la experimentación, con el fin de plantear preguntas y extraer conclusiones basadas en pruebas para poder interpretar y transformar el mundo natural y el contexto social.

La competencia en tecnología e ingeniería comprende la aplicación de los conocimientos y metodologías propios de las ciencias para transformar nuestra sociedad de acuerdo con las necesidades o deseos de las personas en un marco de seguridad, responsabilidad y sostenibilidad. (Real Decreto 217/2022).

En la siguiente tabla se relacionan los objetivos de la unidad didáctica con las competencias clave vigentes en la normativa para especificar cuales se trabajan en cada uno de ellos:

Competencias clave	Objetivos de la unidad didáctica
STEM	1,2,3,4,5,6,7,8 y 9
CCL	3,4,6,7,8 y 9
CE	5
CD	7
CPSAA	5 y 7

4.5 Contenidos

Según el Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, los contenidos se definen como “conjunto de conocimientos, habilidades,

destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias”.

En esta unidad didáctica se trabajan los contenidos correspondientes al bloque 2 del currículo de Matemáticas de 1º ESO. A continuación, se explican los contenidos del bloque 2 de la Orden del 15 de enero de 2021 de la Junta de Andalucía.

- Los números naturales. Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad.
- Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos.
- Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales.
- Números negativos. Significado y utilización en contextos reales. Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones. Operaciones con calculadora.
- Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones.
- Números decimales. Representación, ordenación y operaciones. Relación entre fracciones y decimales. Jerarquía de las operaciones.
- Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales.
- Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos. Iniciación al lenguaje algebraico.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Introducción a la resolución de problemas.

Contenidos de la unidad didáctica:

- Concepto de fracción. Fracciones en entornos cotidianos.
- Fracciones propias e impropias
- Fracciones equivalentes. Simplificación
- Ordenación de fracciones
- Representación, ordenación y operaciones combinadas
- Utilización de software para aprendizaje de fracciones

4.6 Metodología

En la unidad didáctica que se expone como propuesta para la enseñanza del tema de Fracciones se van a plantear tres tipos de metodologías.

- a) Metodología expositiva: tradicional, se empleará en algunas partes de las sesiones donde es preciso exponer contenidos teóricos o resolver dudas o conceptos que se necesiten afianzar. En estos momentos se intentara no focalizar la atención solo en el profesor si no provocar la participación del alumnado.
- b) Metodología de trabajo cooperativo: Se distribuirá el aula en grupos de mesas para que se trabajen las tareas y las actividades planteadas en grupos o en parejas. Así como hemos concluido en la investigación didáctica el aprendizaje será más eficaz, se fomentara el compañerismo y se intentara despertar el interés y la motivación en el alumnado. Como se verá más adelante, te tendrá en cuenta este tipo de actividades de cara a la evaluación final.
- c) Metodología basada en la modelización matemática y en aprendizajes significativos: se acercaran los contenidos a situaciones reales del entorno físico cercano para poder hacer ver al alumnado la aplicación práctica de lo que se aprende por medio de actividades que se desarrollaran de una forma más distendida y otorgándoles un carácter más lúdico.
- d) Metodología TIC: utilización de software específico por ejemplo, “GeoGebra”. Con estos se podrá enfocar el aprendizaje de números fraccionarios de forma más visual e interactiva y resolver actividades con un componente más gráfico.

4.7 Actividades y recursos

En la Orden de 14 de julio de 2016 se indica de forma general que recursos y tareas pueden utilizar en el transcurso de cada uno de los bloques del currículo de la normativa vigente.

En concreto especifica: “Para el bloque dos, Números y Álgebra, conviene manejar con soltura las operaciones básicas con los distintos tipos de números, tanto a través de algoritmos de lápiz y papel como con la calculadora y con la ayuda de software específico.”

Las actividades propuestas, que se desarrollaran más adelante, tendrán estos objetivos:

- Que el docente conozca el nivel inicial del alumnado
- Hacer partícipe al alumno y motivarlo.
- Permitir que el estudiante adquiriera destrezas procedimentales y conceptuales.
- Reforzar el aprendizaje.
- Determinar el grado de consecución de los objetivos.

Los recursos que utilizarán para el desarrollo de la unidad didáctica:

- Libreta del alumno.
- Libro de texto.
- Cajas preparadas con fichas recortables.
- Pizarra tradicional.
- Aula de informática con equipos completos y con el software de Geogebra.
- Aula de clase.
- Espacios exteriores
- Cintas adhesivas.

4.8 Atención a la diversidad

La configuración de una correcta atención a la diversidad se realizará dependiendo del grupo que forme el aula y que necesidades educativas especiales tenga el alumnado. Éste puede según esta reconocido en la normativa vigente:

- Ser de altas capacidades
- Tener dificultades de aprendizaje
- Ser de incorporación tardía
- Tener Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE)
- Tener un Trastorno por Déficit de Atención (TDA)
- Tener un Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH)
- Tener falta de motivación

Será apropiado adecuar a cada necesidad unas estrategias y actividades distintas. Se realizarán adaptaciones curriculares y, en caso de ser necesario, se elaborarán otras nuevas para que se adapten al tipo de alumnado. Es preciso que las tareas planteadas no se diferencien por niveles en el aula para no dejar clara evidencia de una

disgregación, que pueda favorecer la discriminación. Se logrará que todo el grupo consiga obtener los contenidos y competencias y para ello se enfocarán las actividades con distintos grados de dificultad.

Además, es necesario desarrollar actividades de profundización para, si hubiere, alumnos con altas capacidades o un gran interés por la materia, al que se debe dar respuesta. Otro aspecto es que con el trabajo cooperativo, que a continuación veremos, se fomentara el aprendizaje mutuo, lo cual beneficia al conjunto de la clase y la enriquece.

4.9 Temporalización, sesiones y actividades.

En este apartado se detallarán cada una de las sesiones que componen la unidad didáctica. Ésta se desarrollara en un total de 9 sesiones de 50 minutos, por lo que tendrá una duración de dos semanas más una sesión de evaluación ya que en 1º ESO, a la asignatura de Matemáticas, le corresponden 4 horas lectivas semanales. (ANEXO I, Orden de 15 de enero de 2021).

Para ello, se expondrá una descripción de cada una de las sesiones, donde se explicarán las actividades propuestas, como se plantea el trabajo a los alumnos, así como los recursos que se necesitan. La unidad didáctica está diseñada con un hilo conductor que la vertebrando consiguiendo mantener el interés y la motivación del alumnado en lo que aprende y en la utilidad de los contenidos estudiados. Ese hilo conductor consiste en crear una especie de competición durante toda la unidad que consistirá en que en algunas de las actividades que se realicen en clase serán recompensadas con una nota que se le valorará positivamente de cara a la evaluación de la misma. Esta nota se asimilará a puntos de un “concurso”.

En la tabla siguiente se muestra una planificación de las sesiones de la unidad didáctica a modo resumen.

UNIDAD DIDÁCTICA: FRACCIONES				
SESIÓN 1	CONCEPTO DE FRACCIÓN			
	Concurso de repaso UD anterior	EXPLICACIÓN		
	Concurso de preguntas y respuesta rápidas, del tipo sí/no o con una respuesta muy sencilla, de manera que con las sucesivas rondas se van eliminando contrincantes cuando la respuesta no sea correcta. Los turnos se harán de forma aleatoria, y el docente tomará nota de los resultados, los cuales le servirán como evaluación inicial del nivel de la clase.	Explicación del concepto de fracción (expresión) y su diferenciación con respecto a los números naturales y enteros:		
		NUEVO CONCEPTO	PARTE DE UN TODO	RAZON OPERADOR
	Evaluación: Puntos concurso	Fracciones propias e impropias		
				ACTIVIDAD 1.1
				Puzle de números: actividad en grupos con tareas similares a las explicadas
				Práctica de los tres conceptos de fracción y fracciones propias e impropias:

			exposiciones en la pizarra por grupos
SESIÓN 2	FRACCIONES EQUIVALENTES		
	ACTIVIDAD 2.1	EXPLICACIÓN	ACTIVIDAD 2.2
	Tarea individual	Explicación de fracciones equivalentes: definición y cálculo.	En este ejercicio agrupamos la clase por parejas, una vez más con diferente nivel, y por turnos deberán inventarse varios ejercicios sobre los conceptos visto en clase para que los resuelva su pareja.
	Tarea para resolverla de forma individual sobre lo explicado en la sesión anterior		
	Corrección conjunta en clase	Reducir a común denominador (repaso m.c.m.)	Puesta en común
SESIÓN 3	FRACCIONES EQUIVALENTES Y SIMPLIFICACIÓN		
	EXPLICACIÓN		Act. 3.2
	Repaso de fracciones equivalentes y ejemplos	Explicación de procedimiento de simplificación, amplificación y fracciones irreducibles	Esta tarea consiste en agrupar la clase en mesas de trabajo. Cada una de ellas estará formada por alumnos que tengan dificultad en un contenido concreto y otros más avanzados en ese contenido, por ejemplo al ordenar fracciones, calcular fracciones equivalentes, aplicar las definiciones de fracción o simplificación. Cada mesa tendrá una caja con tantas fichas como miembros tenga el grupo, las cuales se las irán pasando para que se resuelvan todas individualmente por turnos. Se podrán ayudar mutuamente.
			Lluvia de ideas con el mismo concepto
SESIÓN 4	COMPARACIÓN DE FRACCIONES Y SUMA Y RESTA		
	Actividad 4.1	EXPLICACIÓN	EXPLICACIÓN
	Esta actividad se desarrollará en el exterior del aula, en el patio o en algún espacio recreativo como el polideportivo del centro o un gimnasio.	Comparación de fracciones de igual denominador	Explicación de suma y resta de fracciones con igual denominador (representación)
		Explicación de la utilidad de reducción a común denominador: comparación de fracciones con distinto denominador	Explicación de suma y resta de fracciones con distinto denominador (reducción a común denominador)
SESIÓN 5	PRACTICA DE SUMA, RESTA Y COMPARACIÓN DE FRACCIONES		
	ACTIVIDAD 5.1	Actividad 5.2	Actividad 5.3
		Tarea individual	Tarea individual

	Puzle de números: actividad en grupos con tareas similares a las explicadas: fracciones equivalentes, simplificación, reducción a común denominador y comparación		
SESIÓN 6	SESIÓN DE REPASO		
	Actividades 6.1-6.4		Actividad 6.5
	Aula de informática: Actividades en grupos para representación en geogebra de ejercicios de repaso de todo lo visto hasta ahora		Tarea individual
SESIÓN 7	MULTIPlicACIÓN Y DIVISIóN DE FRACCIONES		
	EXPLICACIóN	EXPLICACIóN	Actividad 7.1
	Explicación de multiplicación de fracciones (ejemplos)	Explicación de procedimiento para realizar operaciones combinadas con fracciones (suma, resta, multiplicación y división, con y sin parentesis)	En este ejercicio agrupamos la clase por parejas, una vez más con diferente nivel, y por turnos deberán resolver varios ejercicios sobre los conceptos visto en clase y se los corregirán mutuamente.
	Explicación de división de fracciones (ejemplos)	Explicación de varios ejemplos	
			Puesta en común
SESIÓN 8	SESIÓN DE REPASO		
	En esta sesión se propondrán <u>ejercicios de todos los contenidos de la unidad didáctica</u> para resolverlos individualmente o por grupos, de forma similar a la explicada anteriormente. Al final de la clase, se expondrá el <u>recuento de todos los puntos extra</u> que han obtenido los alumnos. Los 2 alumnos que más puntuación tengan serán recompensados el día de la evaluación pudiendo realizar en la prueba escrita un apartado menos (a elegir) que el resto alumnos.		
SESIÓN 9	EVALUACIóN		
	Realización de prueba escrita		

SESIÓN 1: CONCEPTOS DE FRACCIÓN

En esta sesión se hará una introducción sobre la diferencia entre los números naturales y enteros y los nuevos que se van a estudiar, los racionales o fraccionarios.

Para ello se realizará una actividad, como se explica a continuación, a modo de juego para repasar y afianzar los conceptos previos a esta unidad didáctica.

Actividad 0: Concurso de repaso (20 min).

Esta tarea consiste en elaborar un concurso de preguntas y respuesta rápidas, del tipo sí/no o con una respuesta muy sencilla, de manera que con las sucesivas rondas se van eliminando contrincantes cuando la respuesta no sea correcta. Los turnos se harán de forma aleatoria, y el docente tomará nota de los resultados, los cuales le servirán como evaluación inicial del nivel de la clase.

Algunos ejemplos de preguntas son:

¿Es el número -8, un número entero?

¿Qué número es mayor, el -5 o el -1?

¿Una fracción se puede escribir como un número decimal?

¿Todos los números naturales son enteros?

Cuando acabe el concurso quedarán dos finalistas, los cuales se llevarán un punto por haber conseguido vencer a sus contrincantes.

Explicación/exposición (15 min)

A continuación se llevará a cabo la explicación del primer apartado de la unidad: El concepto de fracción entendida como una expresión que representa:

- Parte de un todo
- Cociente de dos números
- Operador

Se hará hincapié en la diferencia con los números naturales y enteros, representando ejemplos en la recta real.

Se explicarán también las fracciones propias e impropias.

Actividad 1.1: puzle de números (15 min)

Se divide la clase en grupos de trabajo para resolver un puzle de números.

Agrupamos a los alumnos de manera que queden integrados los que están repitiendo, con algún perfil más avanzado y con varios con un nivel más neutro, es decir, combinando alumnos y alumnas con diferentes ritmos de aprendizaje.

Los ejercicios del puzle tratarán sobre lo explicado en clase y serán similares a los ejemplos vistos en la misma.

El grupo que consiga antes resolver el puzle tendrá que exponerlo pero si al corregirlo entre todos, no es correcto, en el que caso en el que hubiera un alumno o alumna que tuviera un punto de la actividad anterior, la perdería, y se pasaría al siguiente grupo que hubiera acabado, por lo que deberán asegurarse de que está correctamente resuelto el ejercicio.

Deberán unir fichas que tengan el mismo significado y serán similares a las siguientes:

Un huerto está dividido en 8 partes
y se siembran 4 de ellas.



Expresión $\frac{4}{8}$

Repartimos 256 bocadillos
entre 64 personas, ¿Cuántos
bocadillos le corresponden
a cada persona?

4

En una clase de Matemáticas $\frac{4}{5}$
de sus 20 alumnos saben
hacer los ejercicios

16

Expresa la fracción impropia $\frac{22}{4}$
como la suma de un número natural y una fracción propia

$5 + \frac{2}{4}$

Se plantearán varios tipos de ejercicios de los tres conceptos de fracción: Parte-todo, cociente y operador y fracciones propias e impropias. Exposición de soluciones por grupos en la pizarra del aula.

SESIÓN 2: FRACCIONES EQUIVALENTES

Actividad 2.1 (15 min)

Esta actividad consiste en resolver individualmente una serie de ejercicios para repasar lo visto anteriormente. Después se realizará una corrección conjunta contando con la participación de los alumnos. Estos ejercicios serán de este tipo:

Sandra quiere leer un libro de 420 páginas. Esta semana ha leído tres séptimas partes del libro.

- 1) ¿Cuántas páginas ha leído hasta ahora?
- 2) ¿Qué fracción del total le queda por leer?

Figura 12: Elaboración propia.

Calcula.

a) $\frac{5}{9}$ de 36

b) La quinta parte de 80.

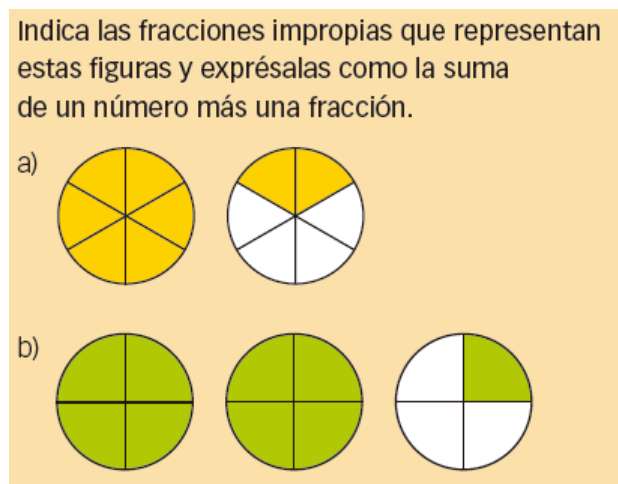
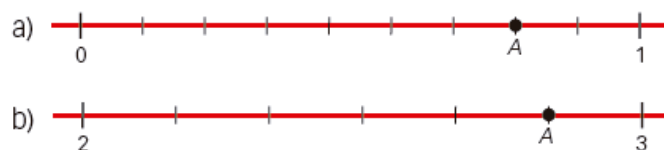


Figura 13: Ejercicio del libro de SANTILLANA 1º ESO de matemáticas

Indica la fracción que representa la letra A en cada caso.



Explicación (15 min)

Se explicará el concepto de fracciones equivalentes. Cómo se calcula una fracción

equivalente a otra. Además, se explicará para qué sirve que dos fracciones tengan el mismo denominador y cómo se hallaría. (Repaso de mínimo común múltiplo). Se resolverán algunos ejemplos.

Actividad 2.2 (20min)

En este ejercicio agrupamos la clase por parejas, una vez más con diferente nivel, y por turnos deberán inventarse varios ejercicios sobre los conceptos visto en clase (parecidos a los resueltos en las actividades y en la pizarra) para que los resuelva su pareja. Después habrá una puesta en común para corregir los ejercicios de cada pareja. La pareja que más ejercicios haya resuelto ganará un punto extra.

SESIÓN 3: FRACCIONES EQUIVALENTES Y SIMPLIFICACIÓN

Explicación (10 min)

Se realizará una explicación de repaso en la pizarra de las fracciones equivalentes con varios ejemplos que se resolverán conjuntamente con los alumnos. Se explicará también qué significa simplificar fracciones y cómo hallamos fracciones irreducibles. Se resolverán varios ejemplos.

Actividad 3.1 (30 min)

Esta tarea consiste en agrupar la clase en mesas de trabajo. Cada una de ellas estará formada por alumnos que tengan dificultad en un contenido concreto y otros más avanzados en ese contenido, por ejemplo al ordenar fracciones, calcular fracciones equivalentes, aplicar las definiciones de fracción o simplificación. Cada mesa tendrá una caja con tantas fichas como miembros tenga el grupo, las cuales se las irán pasando para que se resuelvan todas individualmente por turnos. Se podrán ayudar mutuamente.

Ficha 1: “Agrupa las siguientes fracciones en pares de equivalentes”:

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{15}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{6}$$

$$\frac{6}{10}$$

$$\frac{3}{5}$$

Ficha 2: “Calcula el valor de x para que sean equivalentes”:

$$\frac{x}{3} = \frac{8}{6}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{x}{2}$$

Puedes consultar una sola vez una de estas fichas:

$$x = 4$$

$$x = 2$$

$$x = 4$$

Ficha 3: “Resuelve: Reduce a común denominador”:

$$a) \frac{7}{2} y \frac{3}{4}$$

$$b) \frac{5}{8} y \frac{9}{6}$$

$$c) \frac{12}{96} y \frac{9}{144}$$

Fichas 4: “Completa los huecos que faltan”:

$$a) \frac{4}{\quad} = \frac{8}{\quad} = \frac{40}{\quad}$$

$$b) \frac{90}{120} = \frac{15}{\quad} = \frac{\quad}{12}$$

Ficha 5: “Une cada fracción con su irreducible”:

$$\frac{9}{10}$$

$$\frac{20}{12}$$

$$\frac{18}{20}$$

$$\frac{8}{10}$$

$$\frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{21}{28}$$

El alumno que más fichas resuelva correctamente obtendrá un punto extra.

Actividad 3.2 (10 min)

Para finalizar la sesión, se expondrá en el proyector imágenes o videos de objetos o sucesos de la vida cotidiana que pueden representarse con fracciones, fracciones equivalentes, etc. También se propondrá una lluvia de ideas para poner otros ejemplos parecidos. Estos son algunos ejemplos sobre los que se propone reflexionar:

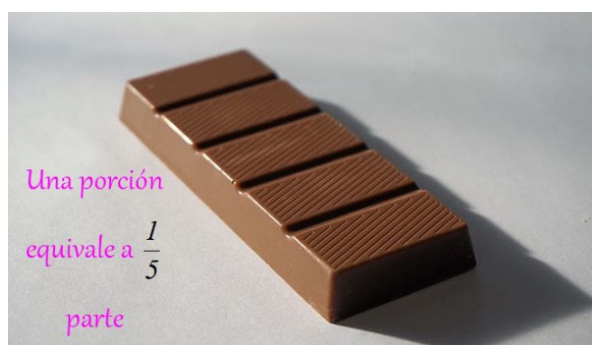


Figura 14: Ejemplo de fracción con objeto cotidiano. Fuente: www.lifeder.com

Cotidianamente se emplean los números fraccionarios para expresar intervalos de tiempo tales como $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ de hora, o incluso un poco mayores: 1 hora y $\frac{1}{4}$ y así sucesivamente.

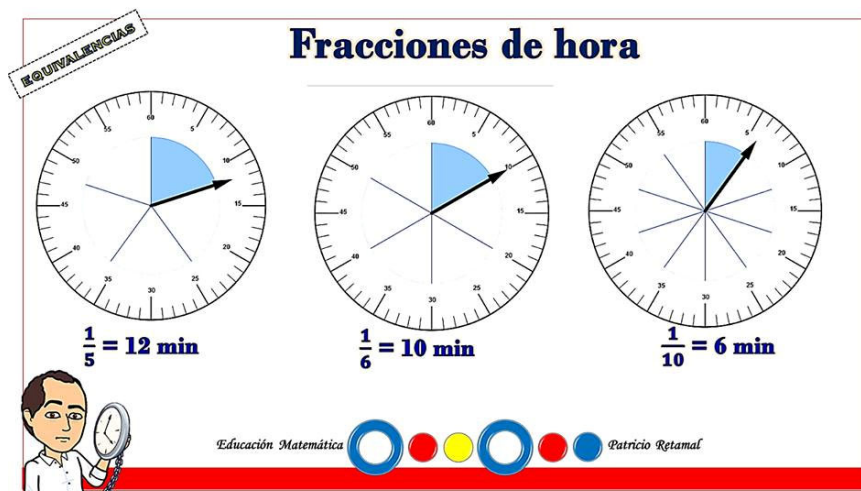


Figura 15: Ejemplo de hora en un reloj. Fuente: Retamal Lizana. “Fracciones de hora... ¿para qué?” www.rmm.cl

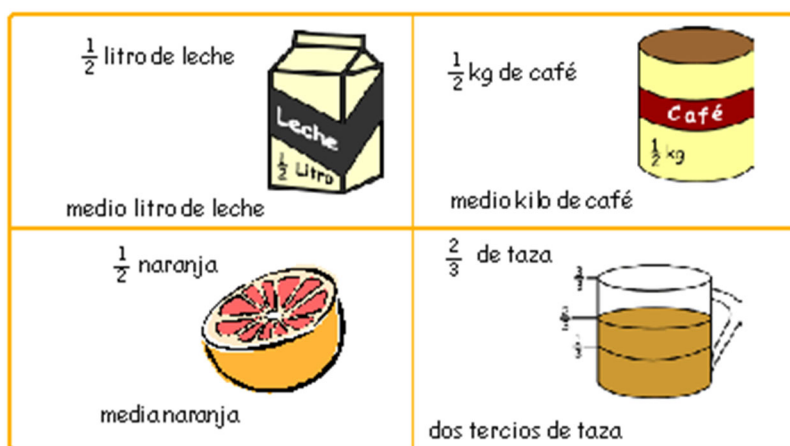


Figura 16: Cruz Ferrer, M. “Quiero saber para qué sirven las fracciones en la vida cotidiana”. www.conociendolasfracciones.wordpress.com

Esta última parte de la sesión servirá para afianzar, tanto conceptos ya adquiridos en la educación primaria y evaluar si se han adquirido correctamente, como para incluir la aplicación práctica de los números fraccionarios, acercándolos a objetos cotidianos y tangibles.

SESIÓN 4: COMPARACIÓN DE FRACCIONES. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Actividad 4.1 (25 min)

Esta actividad se desarrollará en el exterior del aula, en el patio o en algún espacio recreativo como el polideportivo del centro o un gimnasio.

En ella se utilizarán los materiales y objetos que nos rodean, que construyen el espacio para interpretar los contenidos aprendidos en clase.

Se trabajará por grupos con materiales físicos como cintas de colores adhesivas que servirán para señalar elementos fraccionarios, proporciones que están en nuestro

entorno y nos sirven para aprender la utilidad de lo que estudiamos. Después de poner varios ejemplos, se recompensará al grupo que proponga un ejemplo similar de aplicación de los conceptos aprendidos. Las ilustraciones 3 y 4 de los anexos son ejemplos que pueden servir de ideas que pueden proponer los alumnos y alumnas: figuras geométricas en las que se divide una fachada, una solería de baldosas, barandillas, peldaños, etc.

Explicación (25 min)

Se explicará la utilidad de reducir a común denominador varias fracciones:

- Compararlas y ordenarlas
- Sumar y restar

Se expondrán varios ejemplos de operaciones en la pizarra.

SESIÓN 5: PRÁCTICA DE SUMA, RESTA Y COMPARACIÓN DE FRACCIONES

Actividad 5.1: Puzzle de números (25 min)

Se divide la clase en grupos de trabajo para resolver un puzzle de números.

Agrupamos a los alumnos de manera que queden integrados los que están repitiendo, con algún perfil más avanzado y con varios con un nivel más neutro, es decir, combinando alumnos y alumnas con diferentes ritmos de aprendizaje.

Los ejercicios del puzzle tratarán sobre lo explicado en clase y serán similares a los ejemplos vistos en la misma.

El grupo que consiga antes resolver el puzzle tendrá que exponerlo pero si al corregirlo entre todos, no es correcto, en el que caso en el que hubiera un alumno o alumna que tuviera un punto de la actividad anterior, la perdería, y se pasaría al siguiente grupo que hubiera acabado, por lo que deberán asegurarse de que está correctamente resuelto el ejercicio.

Deberán unir fichas con los resultados correspondientes, éstas serán similares a las siguientes:

$$\frac{4}{8} = \frac{32}{64}$$

$$\frac{5}{6} < \frac{7}{8}$$

$$\frac{5}{9} + \frac{7}{12} = \frac{41}{36}$$

Actividad 5.2 y 5.3: Actividades individuales (25 min)

Se propondrán ejercicios similares a los siguientes para resolverlos individualmente en clase.

Actividad 5.2 (Elaboración propia)

Ordena de menor a mayor:

$$\frac{5}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}$$

Escribe una fracción comprendida entre estas fracciones y dibuja un esquema que lo justifique similar al de la figura:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &< \dots < \frac{4}{5} \\ \frac{5}{8} &< \dots < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} &< \dots < \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Figura 17: Imagen de ejemplo. Elaboración propia.

Actividad 5.3 (Elaboración propia)

Realiza las siguientes operaciones:

$$\frac{3}{5} + \frac{6}{5}$$

$$\frac{9}{8} + \frac{5}{8} - 3$$

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

El profesor se pasará por las mesas para resolver dudas o resolverá cuestiones generales en la pizarra si hay un problema generalizado en algún punto de la resolución de los ejercicios.

SESIÓN 6: SESIÓN DE REPASO

La sesión se dividirá en dos partes, teniendo lugar, la primera de ellas en el aula e

informática. Esta primera parte consistirá en utilizar el software de Geogebra para practicar los ejercicios visto en clase (duración 40 min). Se dividirá al alumnado por grupos de tres personas. Cada grupo primero irá practicando y resolviendo cada uno de los siguientes archivos de Geogebra:

6.1. Con este, primero, harán un repaso del concepto de fracción:

<https://www.geogebra.org/m/dEV5qYNY#material/mBNOZHCR>

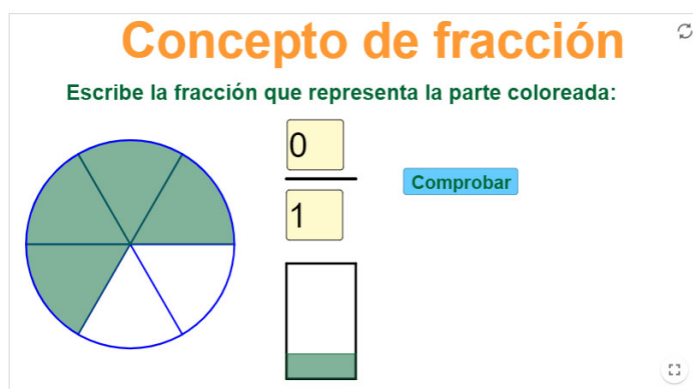


Figura 18: Fuente: www.geogebra.com (Fernandez, A. y Triviño, P.)

6.2. Con el siguiente podrán practicar moviendo los deslizadores y observando cómo cambia la expresión si vamos modificando éstos:

<https://www.geogebra.org/m/gvzW6bxs>

Mueve los deslizadores superiores para representar la suma de la fracción deseada.

Mueve el deslizador inferior para comprobar el resultado final.

Marca la casilla Fracciones equivalentes para visualizar el resultado.

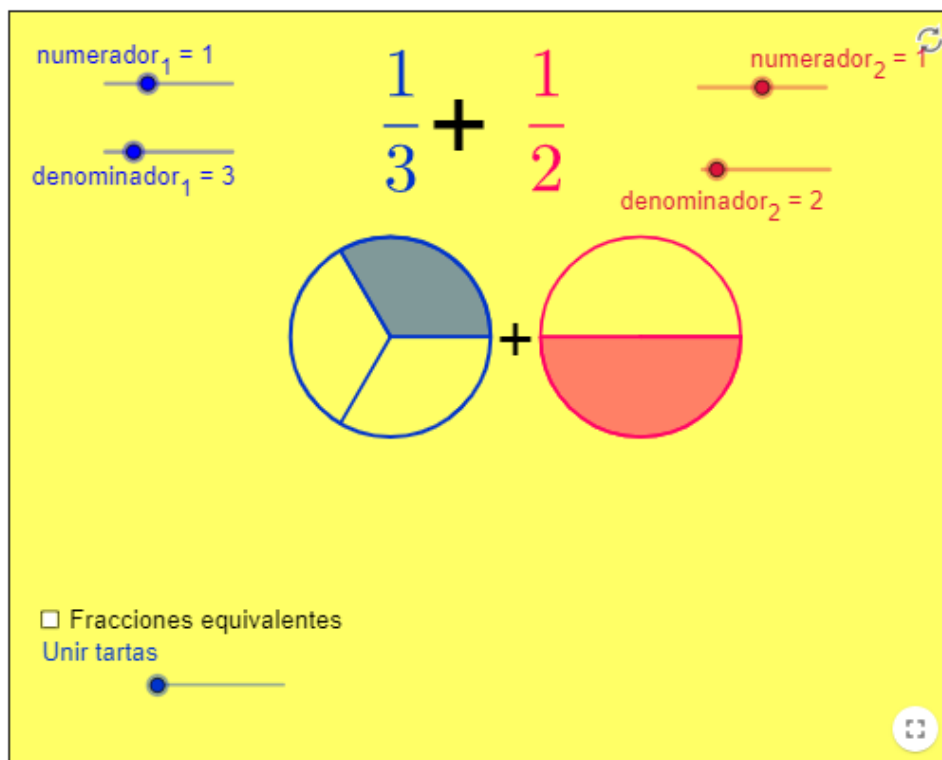


Figura 19: Fuente: www.geogebra.com ;(Matematicaula, Lew W. S.)

6.3 Después deberán ir resolviendo ejercicios de este tipo para representación de fracciones <https://www.geogebra.org/m/dEV5qYNY#material/qbbsuhpr>

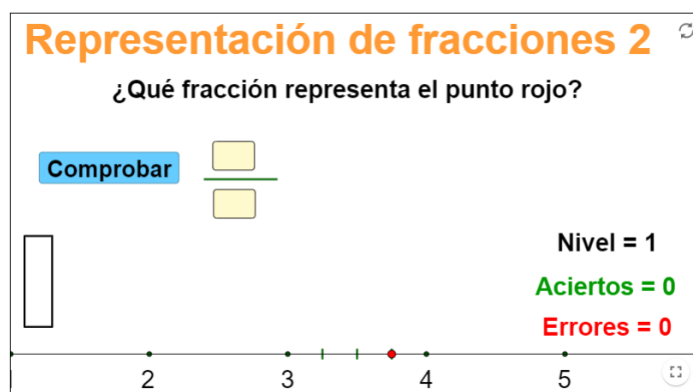


Figura 20: Fuente: www.geogebra.com (Fernandez, A. y Triviño, P.)

<https://www.geogebra.org/m/dEV5qYNY#material/hczgy6ee>.

1/5

Haz click solo sobre la respuesta correcta.

00:21

Ordena de Mayor a Menor los siguientes numeros decimales: 3,048 - 42,025 - 0,00017 - 129,6

129,6 > 3,048 > 0,00017 > 42,025	129,6 > 42,025 > 3,048 > 0,00017	42,025 > 129,6 > 3,048 > 0,00017
----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

Figura 21: Fuente: <https://www.cerebriti.com/juegos-de-matematicas/divertidecimales> (Canchila, G.M.)

Representación de fracciones 3

Indica los dos números enteros más próximos entre los que se encuentra la fracción :

< $\frac{5}{2}$ <

Aciertos = 0
 Errores = 0
 Completados = 0

Figura 22: Fuente: www.geogebra.com (Fernandez, A. y Triviño, P.)

6.4 Después practicarán la suma y resta de fracciones con ejercicios como éste:

<https://www.geogebra.org/m/dEV5qYNY#material/ayz4y76a>

Suma y resta de fracciones

Te toca practicar un poco. Primero con "chuletas". Luego... ya veremos.

$\frac{2}{8} + \frac{9}{4} - \frac{8}{6} =$

1.- Simplifica, si es posible, cada fracción.

Aciertos = 0
 Errores = 0
 Completados = 0

Figura 23: Fuente: www.geogebra.com (Fernandez, A. y Triviño, P.)

El profesor apuntará el número total de aciertos y errores de cada grupo durante cada ejercicio en el que contabilicen y al final de esta parte de la sesión se le dará un punto extra al grupo que más aciertos haya tenido.

Estos ejercicios servirán para afianzar los conceptos aprendidos en clase y que, de una forma más lúdica o interactiva, adquieran un repaso de los contenidos vistos hasta ahora con ayuda de herramientas TICs.

Durante la segunda parte de la sesión se propondrá el siguiente ejercicio que deberán resolver de forma individual (10 min).

6.5 Actividad individual

Resuelve:

a) $\frac{13}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$

b) $4 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(3 - \frac{1}{3}\right)$

c) $\frac{25}{9} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

d) $\frac{6}{5} - \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{4}\right)$

e) $\frac{4}{3} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{6}\right)$

f) $\frac{2}{7} - \frac{1}{5} + \left(7 - \frac{2}{5} + \frac{5}{3}\right)$

g) $\frac{11}{6} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{10}\right) + \left(4 + \frac{1}{9}\right)$

SESIÓN 7: MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES. OPERACIONES COMBINADAS

Explicación. (25 min)

Esta sesión comenzará con una parte de explicación en la pizarra sobre el cálculo de multiplicación y división de fracciones, exponiendo varios ejemplos.

Después se explicará el procedimiento para calcular operaciones combinadas de suma, resta, multiplicación y división de fracciones primero sin paréntesis y luego introduciendo éstos.

Actividad 7.1: Ejercicios en parejas. (25 min)

En este ejercicio agrupamos la clase por parejas, una vez más con diferente nivel, y por turnos deberán resolver varios ejercicios sobre los conceptos visto en clase y se los corregirán mutuamente. Después se hará una puesta en común general y se resolverán dudas en la pizarra. Los ejercicios serán de este tipo:

Realiza estas operaciones:

a) $\frac{12}{7} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{5} + \frac{7}{5} \cdot \frac{6}{5} : \frac{1}{7}$

$$c) \frac{13}{2} - \frac{1}{3} + \frac{16}{5} : \frac{7}{4}$$

$$d) \frac{132}{5} - \frac{7}{3} : \frac{42}{5} + \frac{1}{2}$$

$$e) \frac{6}{7} : \frac{3}{15} - \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

$$f) \frac{3}{2} : \frac{17}{5} + \frac{6}{5} : \frac{1}{2}$$

SESIÓN 8: REPASO GENERAL

En esta sesión se propondrán ejercicios de todos los contenidos de la unidad didáctica para resolverlos individualmente o por grupos, de forma similar a la explicada anteriormente. Durante la sesión se resolverán las dudas que puedan surgir y se fomentará la interacción entre alumnos, proponiendo que entre ellos entablen diálogo sobre la forma de afrontar estas dudas o problemas y cómo llegar a la solución correcta. El profesor intervendrá en este diálogo para dar claves de la resolución de las tareas. (45 min).

Al final de la clase, se expondrá el recuento de todos los puntos extra que han obtenido los alumnos. Los 2 alumnos que más puntuación tengan serán recompensados el día de la evaluación pudiendo realizar en la prueba escrita un apartado menos (a elegir) que el resto alumnos. (5 min)

SESIÓN 9: EVALUACIÓN

En esta sesión se realizará la prueba escrita correspondiente a la unidad didáctica. Se empleará la duración completa de la clase para resolverla. (50 min)

4.10 Evaluación

La evaluación de los alumnos tiene como objetivo “verificar si estos realmente han conseguido los objetivos planteados por la unidad didáctica”. Para llevarla a cabo se ha partido de los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje descritos en la *Orden 15 de Enero de 2021* y los aspectos descritos en el Real Decreto 217/2022 de 29 de marzo y el 243/2022 del 5 de abril, que definen a los criterios de evaluación como “referentes que indican los niveles de desempeño esperados en el alumnado en las situaciones o actividades a las que se refieren las competencias específicas de cada materia o ámbito en un momento determinado de su proceso de aprendizaje”.

Los criterios de evaluación para el bloque 2 de la asignatura de matemáticas para el nivel de 1º de ESO en la Orden del 15 de enero de 2021 son:

1. “Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. CCL, CMCT, CSC”.

2. “Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números. CMCT”.
3. “Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental. CMCT”.
4. “Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos. CMCT, CD, CAA, SIEP”.
5. “Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales. CMCT, CSC, SIEP”.
7. “Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos. CCL, CMCT, CAA”.

Los relacionados con la unidad didáctica son: 1,2,3 y 4.

Los Estándares de aprendizaje recogidos en la *Orden 15 de Enero de 2021*:

- 1.1. Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.
- 1.2. Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.
- 1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.
- 2.1. Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales.
- 2.2. Aplica los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11 para descomponer en factores primos números naturales y los emplea en ejercicios, actividades y problemas contextualizados.
- 2.3. Identifica y calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales mediante el algoritmo adecuado y lo aplica problemas

contextualizados.

2.4. Realiza cálculos en los que intervienen potencias de exponente natural y aplica las reglas básicas de las operaciones con potencias.

2.5. Calcula e interpreta adecuadamente el opuesto y el valor absoluto de un número entero comprendiendo su significado y contextualizándolo en problemas de la vida real. 2.6. Realiza operaciones de redondeo y truncamiento de números decimales conociendo el grado de aproximación y lo aplica a casos concretos.

2.7. Realiza operaciones de conversión entre números decimales y fraccionarios, halla fracciones equivalentes y simplifica fracciones, para aplicarlo en la resolución de problemas.

2.8. Utiliza la notación científica, valora su uso para simplificar cálculos y representar números muy grandes.

3.1. Realiza operaciones combinadas entre números enteros, decimales y fraccionarios, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológicos utilizando la notación más adecuada y respetando la jerarquía de las operaciones.

4.1. Desarrolla estrategias de cálculo mental para realizar cálculos exactos o aproximados valorando la precisión exigida en la operación o en el problema.

4.2. Realiza cálculos con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales decidiendo la forma más adecuada (mental, escrita o con calculadora), coherente y precisa.

5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.

5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente proporcionales.

7.1. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.

7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

Los relacionados con la unidad didáctica son: 2.2, 2.7, 3.1, 4.1, 4.2.

Los estándares de aprendizaje se evaluarán tanto de manera individual como grupal o en parejas a través de las actividades propuestas en clase, con el trabajo continuo del alumno durante toda la unidad y con la prueba escrita de evaluación.

En concreto, los instrumentos de evaluación utilizados en esta unidad con sus respectivos porcentajes de calificación son:

- Trabajo diario y actitud del alumno (15%)
- Interés por la asignatura (10%)
- Ejercicios de clase (15%)
- Prueba escrita (50%)
- Sesión en el patio (10%)

5. Conclusiones

Una vez finalizado el desarrollo del Trabajo Final de Máster, que como se comentó al inicio del mismo, ha estado constituido de una primera parte de carácter investigador y una segunda parte consistente en el desarrollo de una unidad didáctica, elaborada a partir de las conclusiones obtenidas de la investigación realizada primeramente, se concluye que los objetivos que se pretendían con el mismo se han conseguido.

Éstos pasan por concebir la enseñanza de las fracciones teniendo en cuenta, como pilar fundamental, sus tres definiciones teóricas y evaluando con especial interés el punto de partida en el que se encuentra el alumnado al que va dirigido esta unidad didáctica, para detectar en qué situación de aprendizaje del conjunto de números racionales se encuentra. Estos dos objetivos se han conseguido estableciendo una serie de sesiones cuidadosamente ordenadas y distribuidas temporalmente, de forma que permitan partir de una primera evaluación del grupo para, poco a poco, a medida que se adquieran los contenidos propuestos, se vayan afianzando los conceptos que se pretenden enseñar propios del nivel de la unidad y, si fuera necesario, se solventen los problemas de aprendizaje que hayan sido arrastrados desde la etapa de primaria en la que ya se introdujeron los números racionales.

Estas premisas básicas en cuanto a la didáctica de los contenidos que se pretenden enseñar, irán de la mano del resto de objetivos del trabajo. Desde el punto de vista investigador, se ha conseguido detectar y recopilar una serie de causas por las que un número considerable de alumnos no consiguen superar la adquisición de algunos conceptos fundamentales relacionados con el conjunto de números racionales. Además, las conclusiones obtenidas de la tarea investigadora han vertebrado en gran parte el diseño de la propuesta didáctica. Algunas de ellas, como buscar la relación entre los significados numéricos y algunos objetos de la vida cotidiana del alumno, se ha puesto en práctica en las sesiones desarrolladas fuera del aula o en las que se explica estas relaciones con elementos de su medio cercano.

Se concluye también que se ha conseguido establecer un trabajo colaborativo en el aula y que éste ha sido fundamental en algunas sesiones a la hora de abordar por parte

del alumnado las tareas propuestas. Se ha fomentado por un lado la motivación, por medio de actividades con carácter innovador que han ayudado a la evaluación y por otro, la interacción entre los propios alumnos y entre ellos y el docente en el ritmo habitual de las sesiones, como se pretendía.

Para finalizar, considero importante destacar que la labor del docente debe consistir en trabajar en el aula teniendo en cuenta la heterogeneidad del grupo y prestando interés en enfocar la enseñanza con un carácter práctico para conseguir que el alumnado perciba la utilidad de lo que aprende y conociendo multitud de herramientas de evaluación de las competencias y de los contenidos. Si estas herramientas tienen como consecuencia despertar el interés y la motivación del grupo, la mayoría de los alumnos conseguirán adquirir las competencias exigidas en el nivel educativo en el que se encuentran. Este es el objetivo fundamental de la profesión.

6. Referencias bibliográficas

1. Aparicio del Prado, C y Payá Albert, R. (1996). *Análisis matemático*. Universidad de Granada.
2. Castañeda Hernández, S. (2016). *Curso básico de teoría de los números*. Universidad del norte.
3. Colera y Gaztelu, Anaya. (2016)
4. Escolano Vizcarra, Rafael. (2019). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente*. [Tesis de doctorado, Universidad de Zaragoza]. <https://zaguan.unizar.es/record/84666>
5. Fernández Novoa, J. (1994). *Análisis matemático I*. Universidad nacional de educación a distancia.
6. Fernández Viña, J.A. (1991). *Análisis matemático I. Cálculo infinitesimal*.
7. Gairín Sallán, J. M. (2013). *Sistemas de representación de números racionales positivos: Un estudio con maestros en formación*. Contextos Educativos. Revista De Educación, (4), 137–159. <https://doi.org/10.18172/con.490>
8. de Guzmán, M. (1992). *Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático*.
9. Grence Ruiz, T. (2015). *Santillana, Educativas de Santillana Educación, S.L.*
10. LEY ORGÁNICA 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.
11. Morra, J. (2019). *Tema 5. Los números racionales*.
12. Rudin, W. (1980). *Principios de Análisis Matemático*.
13. Ortega, Joaquín M. (1993). *Introducción al Análisis Matemático*.

14. ORDEN DE 15 DE ENERO DE 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.
15. ORDEN DE 14 DE JULIO DE 2016 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.
16. del Pino Ruiz, J. & Estepa Castro, A. (2015). Análisis de libros de texto. Estadística de libros empleados en Andalucía. Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (p. 117-124). Universidad de Granada.
17. REAL DECRETO 217/2022, DE 29 DE MARZO, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.