



Universidad de Jaén
Centro de Estudios de Posgrado

Trabajo Fin de Máster

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

DESARROLLO DE UNA UNIDAD
DIDÁCTICA PARA 4º ESO

Alumno/a: Barragán Franco, José Antonio

Tutoras: Prof. Dña. Ana María Martínez Rodríguez

Prof. Dña. Antonia Oya Lechuga

Dpto: Estadística e Investigación Operativa

Junio, 2021

ÍNDICE

Resumen	1
Abstract.....	1
1 Introducción.....	2
2 Objetivos.....	3
3 Fundamentación didáctica.....	4
4 Fundamentación epistemológica	10
4.1. Conceptos generales.....	10
4.1.1. Definiciones básicas.....	10
4.1.2. Estudio estadístico	12
4.1.3. Distribución de frecuencias de una variable estadística	13
4.2. Parámetros estadísticos	16
4.3. Gráficos estadísticos	41
5 Fundamentación curricular.....	45
5.1. Análisis del currículo	45
5.2. Análisis de libros de texto	51
6 Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica	57
6.1. Título	57
6.2. Justificación.....	58
6.3. Contextualización del centro y del aula	58
6.4. Elementos curriculares.....	60
6.4.1. Objetivos	60
6.4.1.1. Objetivos de etapa	60
6.4.1.2. Objetivos de área	62
6.4.1.3. Objetivos didácticos	63
6.4.2. Competencias	64
6.4.3. Contenidos	65
6.4.4. Metodología.....	66
6.4.5. Temporalización.....	68



6.4.6.	Recursos.....	75
6.4.7.	Actividades.....	76
6.4.8.	Evaluación.....	82
6.5.	Elementos curriculares complementarios.....	83
6.5.1.	Atención a la diversidad.....	83
6.5.2.	Elementos transversales.....	84
6.5.3.	Interdisciplinaridad con otras áreas.....	86
7	Conclusiones.....	87
8	Bibliografía.....	89
8.1.	Fuente de figuras, gráficas y tablas.....	91
9	Anexos.....	94
9.1.	Anexo I: Ejercicios propuestos en las actividades.....	94
9.2.	Anexo II: Material para atención a la diversidad. Contenidos de sesiones desarrollados.....	98
9.3.	Anexo III: Material para atención a la diversidad. Ejercicios con solucionario.	99
9.4.	Anexo IV: Material para atención a la diversidad. Ejercicios de ampliación.	103
9.5.	Anexo V: Prueba escrita de la unidad didáctica.....	106
9.6.	Anexo VI: Criterios de evaluación, competencias clave y estándares de aprendizaje evaluables.....	107
9.7.	Anexo VII: Rúbricas de calificación.....	111

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. <i>Esquema de desarrollo de un proyecto</i>	8
Figura 2. <i>Esquema de situación de la mediana</i>	23
Figura 3. <i>Esquema de distribución campaniforme simétrica</i>	27
Figura 4. <i>Esquema de distribución campaniforme asimétrica</i>	27
Figura 5. <i>Esquema de distribución no reglada</i>	28
Figura 6. <i>Esquema de simetría</i>	35
Figura 7. <i>Esquema de apuntamiento</i>	39
Figura 8. <i>Portada libro de Anaya</i>	52
Figura 9. <i>Portada libro de Oxford</i>	52
Figura 10. <i>Localización del centro</i>	59
Figura 11. <i>Esquema de desarrollo de la unidad didáctica</i>	69

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1. <i>Distribución de frecuencias Tabla 13</i>	36
Gráfica 2. <i>Distribución de frecuencias Tabla 14</i>	37
Gráfica 3. <i>Distribución de frecuencias Tabla 15</i>	38
Gráfica 4. <i>Distribución de frecuencias Tabla 16</i>	40
Gráfica 5. <i>Nº de hijos/as que tiene una pareja</i>	41
Gráfica 6. <i>Altura de un grupo de alumnos/as</i>	42
Gráfica 7. <i>Comparación porcentaje de hijos/as de una familia</i>	42
Gráfica 8. <i>Relación entre edad y consumo de gasolina</i>	43
Gráfica 9. <i>Diagrama de caja</i>	44
Gráfica 10. <i>Nº de autobuses urbanos por año</i>	44
Gráfica 11. <i>Residentes en entidades menores de 500 habitantes</i>	44

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. <i>Tabla de frecuencias para variable no agrupada</i>	15
Tabla 2. <i>Tabla de frecuencias para variable agrupada</i>	16

Tabla 3. <i>Ejemplo: Nº de hijos</i>	17
Tabla 4. <i>Ejemplo: Producción de trigo</i>	19
Tabla 5. <i>Valores de n_i y N_i de una variable</i>	22
Tabla 6. <i>Ejemplo: Cálculo de la mediana</i>	24
Tabla 7. <i>Ejemplo: Cálculo de cuartiles</i>	26
Tablas 8 y 9. <i>Ejemplo: Cálculo de la media de X y cálculo de la media de Y</i>	30
Tablas 10 y 11. <i>Ejemplo: Cálculo de la desviación media de X y cálculo de la desviación media de Y</i>	30
Tabla 12. <i>Ejemplo: cálculo de V</i>	33
Tabla 13. <i>Ejemplo: cálculo simetría 1</i>	35
Tabla 14. <i>Ejemplo: cálculo simetría 2</i>	36
Tabla 15. <i>Ejemplo: cálculo simetría 3</i>	38
Tabla 16. <i>Ejemplo: cálculo de apuntamiento</i>	40
Tabla 17. <i>Bloque 5. Estadística y Probabilidad</i>	50
Tabla 18. <i>Comparación de unidades de Anaya y Oxford</i>	53
Tabla 19. <i>Bloque 5. Estadística y Probabilidad</i>	55
Tabla 20. <i>Bloque 5. Estadística y Probabilidad</i>	57
Tabla 21. <i>Sesión tipo</i>	68
Tabla 22. <i>Sesión 1</i>	70
Tabla 23. <i>Sesión 2</i>	70
Tabla 24. <i>Sesión 3</i>	71
Tabla 25. <i>Sesión 4</i>	72
Tabla 26. <i>Sesión 5</i>	73
Tabla 27. <i>Sesión 6</i>	73
Tabla 28. <i>Sesión 7</i>	74
Tabla 29. <i>Sesión 8</i>	74
Tabla 30. <i>Sesión 9</i>	75
Tabla 31. <i>Actividad 0</i>	79
Tabla 32. <i>Actividad 1</i>	79

Tabla 33. <i>Actividad 2</i>	80
Tabla 34. <i>Actividad 3</i>	80
Tabla 35. <i>Actividad 4</i>	81
Tabla 36. <i>Actividad 5</i>	81
Tabla 37. <i>Actividad 6</i>	81
Tabla 38. <i>Instrumentos de calificación</i>	83
Tabla 39. <i>Elementos transversales</i>	86
Tabla 40. <i>Criterios de evaluación</i>	110
Tabla 41. <i>Rúbrica de calificación de la actividad 0</i>	114
Tabla 42. <i>Rúbrica de calificación de la prueba escrita</i>	115
Tabla 43. <i>Rúbrica de calificación de la participación, trabajo y actitud</i>	116

Resumen

El gran desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación han propiciado que la Estadística se convierta en una disciplina básica para cualquier ciudadano. Sin embargo, la realidad que muestran algunos autores es que la Estadística no se ha convertido aún en una materia relevante dentro del currículo educativo. Por este motivo, el presente TFM se enfoca al desarrollo de una unidad didáctica de Estadística para cuarto curso de la ESO.

El documento se divide en dos partes diferenciadas. En la primera parte se desarrollan contenidos de Estadística a un nivel más avanzado que el que se imparte en los centros de secundaria, se analizan varias publicaciones sobre la educación estadística, y se realiza un análisis del currículo. En la segunda parte se desarrolla una unidad didáctica de Estadística a través de metodología por proyectos.

Palabras claves: educación, Estadística, educación secundaria, unidad didáctica, metodología activa.

Abstract

The great development of information and communication technologies has led to Statistics becoming a basic discipline for any citizen. However, the reality shown by some authors is that Statistics has not yet become a relevant subject within the educational curriculum. For this reason, this document focuses on the development of a didactic unit on Statistics for the fourth year of secondary education.

The document is divided into two different parts. In the first part, statistical content is developed at a more advanced level than that taught in secondary schools, several publications on statistical education are analyzed, and an analysis of the curriculum is carried out. In the second part, a didactic unit is developed through a project-based methodology.

Key words: education, Statistics, secondary education, didactic unit, active methodology.

1 Introducción

En el presente documento se elabora el trabajo fin de máster (TFM) del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas con la especialidad de Matemáticas.

A lo largo del documento se desarrolla una unidad didáctica del currículo de 4º de ESO, en concreto, se desarrolla la unidad didáctica de Estadística de la asignatura “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas”.

En la actualidad, el enorme desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación han propiciado que la mayoría de los individuos que componen la sociedad se vean continuamente en la necesidad de filtrar una gran cantidad de información y reducirla a lo sustancial, así como discernir si la información recibida es verdadera o falsa. En este sentido, la Estadística, que en esencia consiste en una herramienta que permite comprender y analizar conjuntos de datos, se ha convertido en un conocimiento básico para cualquier ciudadano. Tal es así, que algunos autores han empezado a utilizar la expresión “alfabetización estadística”, refiriéndose a la capacidad de leer gráficas y tablas, e interpretar la información recibida. El uso de este término pone de manifiesto la importancia que tiene en nuestra sociedad esta disciplina, llegándola a comparar con los conocimientos básicos de lectura y escritura.

No obstante, aunque la Estadística lleva presente en el currículo bastantes años, es cierto que llega a ser un conocimiento obligatorio, pero no prioritario y es notoria la falta de conocimientos estadísticos en gran parte del alumnado. Por estos motivos, el presente TFM se centra en la enseñanza de la Estadística para un curso donde se suele considerar poco prioritario (4º curso orientado a las enseñanzas académicas).

El documento cuenta con varias partes diferenciadas que desarrollan la temática desde diferentes perspectivas:

-Fundamentación didáctica, donde se exponen y comentan varias publicaciones que desarrollan la educación estadística y aportan datos importantes para la comprensión de la realidad en los centros.

-Fundamentación epistemológica, donde se desarrollan conceptos sobre Estadística a un nivel más avanzado que el que se trabaja en los centros de secundaria.

-Fundamentación curricular. En este apartado se analiza el currículo estadístico y se compara con varios libros texto.

-Proyección didáctica, donde se desarrolla la unidad didáctica de Estadística tomando como referencia el currículo.

2 Objetivos

Con la realización del presente TFM se pretende aunar los diferentes conocimientos desarrollados en las asignaturas a lo largo del curso y ponerlos en práctica. El TFM junto con la asignatura de prácticas del máster suponen dos piezas clave en la formación ya que permiten, en primer lugar, desarrollar la planificación del contenido educativo que se impartirá en el centro, y en segundo, entrar en contacto directo con el alumnado objetivo de nuestra enseñanza. En el presente documento se persiguen varios objetivos:

- Conocer y comprender el estado actual de la enseñanza de la Estadística dentro de la Educación Secundaria.
- Conocer y comprender metodologías innovadoras, o diferentes a la tradicional, que proponen autores especialistas en la enseñanza de la Estadística.
- Aplicar metodologías innovadoras propuestas por autores especialistas en la enseñanza de la Estadística.
- Desarrollar y profundizar en contenidos estadísticos que se estudian en Educación Secundaria.
- Conocer el currículo estadístico y desarrollar una unidad didáctica en base al mismo.
- Desarrollar una unidad didáctica realista atendiendo a las experiencias vividas en el periodo de prácticas del máster.
- Comprender las diferentes perspectivas y la relación con el currículo estadístico de varios libros de texto de educación secundaria.
- Conocer las herramientas existentes para atender la diversidad en el aula, y aplicarlas en casos concretos que se puedan dar dentro de la misma.
- Plantear acciones para educar, además de en las competencias clave, en valores señalados por el currículo (educación ambiental, no violencia, cívica, etc.)
- Desarrollar herramientas de evaluación y calificación justas, atendiendo al currículo.

Además de plantearse estos objetivos, la guía docente del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas señala varios objetivos que se pretenden cumplir en la formación:

- Potenciar una actitud positiva y crítica hacia el desarrollo de la identidad profesional docente, colaborando con los agentes del ámbito educativo y, de forma especial, con los equipos directivos de los centros docentes.
- Integrar experiencias profesionales con procesos de formación e investigación en el aula, a través de la reflexión crítica, sobre todo lo que se experimenta o se aprende.

- Propiciar una formación cultural, personal, ética y social adecuada para el ejercicio de la profesión docente con el rigor científico que se debe aplicar en el ámbito de la educación de adolescentes.
- Promover el reconocimiento, análisis y atención de las características diferenciales del alumnado, según su desarrollo evolutivo, contextos familiares, sociales y culturales de referencia.
- Conocer las competencias profesionales docentes propias de cada especialidad y su relación con las demás competencias a través de mecanismos de transversalidad.

3 Fundamentación didáctica

En este apartado se van a analizar algunas publicaciones enfocadas a la enseñanza de la Estadística. En concreto se va a analizar la influencia de la metodología por proyectos en la adquisición del currículo de Estadística. Para ello se revisarán algunas publicaciones:

- Estadística por proyectos.
 - Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística* (Grupo de Investigación en Educación Estadística Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada ed.).
 - Batanero, C., y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos. Departamento de Matemáticas*. Universidad de Granada.
- Conocimiento y predisposición general del alumnado respecto a la Estadística.
 - Salinas, J., y Mayen, S. (2015). *Estudio exploratorio de las actitudes hacia la Estadística en estudiantes de bachillerato*. En Investigación en educación matemática XIX (p.503). SEIEM.
 - Peña, L., Molina-Portillo, E., Ruz, F., Martínez, F., y Contreras, J. (2018). *Evaluación de la cultura estadística en estudiantes de secundaria*. En Investigación en educación matemática XXII (p.651). SEIEM.
- Resultados de la implementación de la metodología por proyectos.
 - Batanero, C., y Díaz, C. (2005). *Papel de los proyectos en la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística*. VII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións.
 - Amador, M.V., y Montejo Gámez, J. (2017). *Metodologías activas y su relación con las actitudes hacia la estadística en educación*

secundaria. En Investigación en educación matemática XXI (p.489). SEIEM.

- Anasagasti, J., e Izaguirre, A. (2018). *Estadística por proyectos: Análisis de temáticas variables y recursos propuestos por maestros en formación inicial*. En Investigación en Educación Matemática XXII (p.606). SEIEM.
- Anasagasti, J., y Berciano, A. (2016). *Competencia estadística del futuro profesorado en educación primaria: análisis de la repercusión del ABP en su adquisición*. En Investigación en Educación Matemática XX (p.555). SEIEM.

En primer lugar, se va analizar en qué consiste la Estadística y de qué forma aparece el aprendizaje basado en proyectos enfocado a esta disciplina.

Entre infinidad de definiciones para la Estadística, Batanero destaca la siguiente:

La Estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados colectivos. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final. (Cabriá, 1994, como se citó en Batanero, 2001).

Según esta definición, podemos entender que la Estadística ha existido desde hace siglos ya que eran muchas culturas las que hacían inventarios y recuentos de bienes, edades, poblaciones, etc., a fin de controlar y comprender su territorio. Sin embargo, la Estadística como ciencia no empieza a tomar relevancia hasta el siglo XVII en la escuela alemana. A partir de este momento, empiezan a surgir nombres importantes, y los grandes matemáticos de la época empiezan a verse interesados en la disciplina, construyéndose poco a poco la Estadística que conocemos en la actualidad. Tal es así, que no es hasta mediados del siglo XX cuando la Estadística empieza a aparecer en los currículos de la mayoría de los países.

En la actualidad, la Estadística sigue presente en el currículo español desde primaria hasta bachillerato a pesar de los múltiples cambios que se han realizado en la legislación educativa desde la fecha de publicación de algunos documentos que mencionamos. En concreto, en Batanero y Díaz (2011) se describen los contenidos mínimos de Estadística en el currículo de la educación secundaria según el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria (MEC, 2006 b):

Crear conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios; formas de recogida de información y organización de los datos; frecuencias absolutas, relativas...; medidas de centralización; necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra; atributos y variables discretas y continuas; media, moda, cuartiles y mediana; utilización de medios informáticos...

En definitiva, destacan que el currículo estadístico no se centra en el conocimiento de conceptos matemáticos, sino en el desarrollo de un pensamiento estadístico: la modelización, el ajuste de modelos matemáticos a fenómenos reales, la interpretación y síntesis de datos..., son otras capacidades que se pretende desarrollar en el alumnado además del conocimiento de los conceptos con que se trabaja.

A partir de esta afirmación podemos deducir que la Estadística es eminentemente práctica. Esta disciplina es inseparable de sus utilidades, se aplica en muchos campos como biología, ciencias sociales, etc., y posiblemente esa sea la mayor justificación de la necesidad de incorporación al currículo. Sin embargo, como señalan Batanero y Díaz (2011) muchos libros de textos contienen ejercicios descontextualizados donde se pide calcular medias, realizar gráficas, etc. para un conjunto de datos. Ellas proponen la enseñanza de la Estadística a través de proyectos, apoyándose en cuatro ideas fundamentales:

- Permitir contextualizar la Estadística.
- Mejorar el interés del alumnado y permitirle analizar temas de su interés personal.
- Trabajar con datos reales, lo que permite introducir temas como: precisión, posibilidad de medida, fiabilidad, etc.
- No se reduce la Estadística a cálculos.

No obstante, la enseñanza que se propone no deja de ser un modelo que puede ajustarse de mejor o peor forma a la realidad.

A continuación, se tratarán dos artículos que analizan la realidad del alumnado, sus conocimientos estadísticos y su disposición al aprendizaje.

En el primero de ellos se investiga la disposición del alumnado, en este caso mexicano, para la adquisición de la Estadística (Salinas y Mayen, 2015). A lo largo del documento se trata el concepto “actitud” que define como “la disposición interna de un individuo a actuar respecto a una persona, objeto o situación”, es decir, en el estudio se intenta comprender las predisposiciones que tienen los estudiantes con respecto a la Estadística.

El estudio se realiza a través de un cuestionario (escala EAEE) donde el alumnado tiene que marcar en una escala si están de acuerdo o en desacuerdo con una idea, pregunta, afirmación, etc., obteniendo al final una puntuación que mide componentes antropológicos y pedagógicos en relación a la Estadística.

De forma generalizada, los estudiantes cuentan con una actitud positiva hacia la Estadística y se entiende que podrían adquirirla con cierta facilidad, considerando el “haber estudiado Estadística en cursos anteriores” como un factor determinante que predispone hacia la adquisición de este conocimiento. Es necesario remarcar que no se han encontrado diferencias significativas respecto al género en este estudio ni en otros trabajos similares.

Otro punto importante, es que el currículo mexicano, al igual que el español, introduce la Estadística en niveles de primaria y secundaria, sin embargo, los resultados muestran que casi la mitad de los estudiantes consideran que nunca han realizado ningún curso de Estadística. Esto implica que la mayoría del alumnado que realizó el cuestionario no consideraba tener grandes conocimientos de Estadística ya que no habían cursado asignaturas donde se impartieran esos conocimientos, o si lo habían hecho no lo recordaban a pesar de ser contenidos curriculares.

El segundo artículo (Peña et al., 2018) muestra las dificultades que tienen los alumnos/as (en este caso españoles) para alcanzar el currículo estadístico a pesar de estar presente desde los primeros cursos de primaria. En dicha publicación se recalca la importancia de la Estadística en la actualidad debido a la gran cantidad de información que recibimos continuamente a través de los medios de comunicación que en muchos casos pretende favorecer determinados intereses. Además, señala que cualquier individuo de la sociedad debe ser capaz de analizar y filtrar la información que recibe a través de herramientas estadísticas. Sin embargo, el estudio realizado a estudiantes de secundaria muestra que muchos estudiantes encuentran multitud de problemas con los conceptos estadísticos y no tienen una actitud crítica frente a cualquier información proporcionada por los medios de comunicación.

Como se observa, la realidad que muestran estas investigaciones es que muchos alumnos/as tienen grandes carencias en el conocimiento estadístico, aunque en general tienen buena predisposición para el aprendizaje. Es necesario hacer hincapié en que ninguno de los documentos analiza o estudia como variable la metodología seguida por cada uno de los estudiantes. Simplemente hacen un estudio generalizado de los conocimientos y la predisposición hacia la Estadística del alumnado.

Por último, se van a señalar algunos estudios que se centran en analizar las metodologías seguidas por grupos de alumnos/as para mejorar la efectividad de la enseñanza en Estadística. Estos estudios, al contrario que los anteriores que dan una visión general del alumnado, permiten comprobar cómo influirían determinadas metodologías en la educación y cómo podrían implementarse.

El primero de ellos (Batanero y Díaz, 2005) analiza cómo debe de desarrollarse la metodología por proyectos. Destaca que no se deben presentar los conocimientos descontextualizados (Batanero y Díaz, 2011), sino que deben presentarse a través de las diferentes fases de una investigación estadística que permiten al alumnado hacerse preguntas, entrenando la habilidad para aplicar los conocimientos. En esta metodología, el profesor pasa a un segundo plano, se convierte en guía del conocimiento que adquiere el alumnado, ayudando e incitando a resolver determinadas cuestiones.

El esquema general es el siguiente:

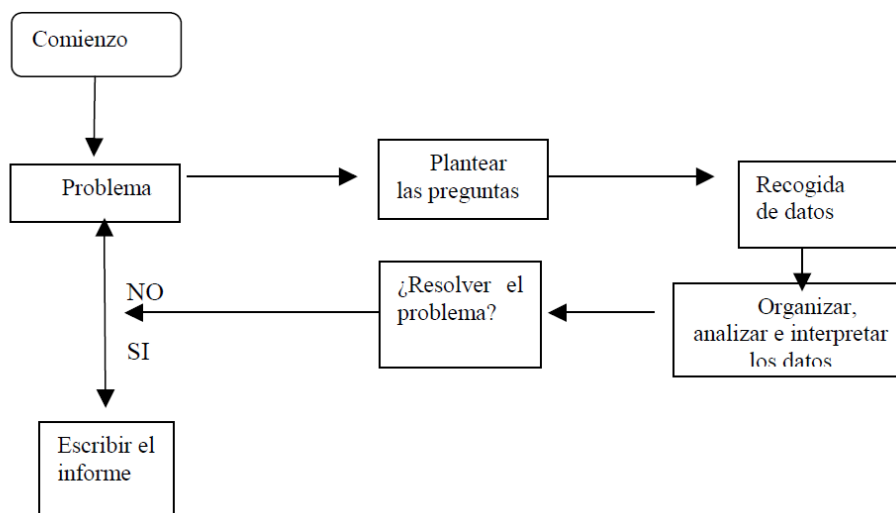


Figura 1. Esquema de desarrollo de un proyecto. Fuente: Batanero y Díaz (2005)

Como se puede ver, el objetivo final no es resolver un problema u obtener una solución, sino realizar un informe y obtener unas conclusiones que el profesorado evaluará durante y posteriormente a su realización.

Por otra parte, Amador y Montejo Gámez (2017) constatan ideas mostradas en el documento anterior ya que este menciona que los alumnos/as se muestran desorientados en temas estadísticos en entornos descontextualizados. De esta forma se opta por una metodología activa donde el alumnado es protagonista en su propio aprendizaje, cuyos datos muestran de forma general una mejoría en la evolución de las

actitudes hacia la Estadística y el rendimiento académico. Por otra parte, el análisis también permite profundizar en las posibles causas de los resultados que se obtuvieron.

Al igual que otros autores que se han mencionado, Anasagasti e Izaguirre (2018) acentúan la gran cantidad de beneficios que tiene el aprendizaje de la Estadística por proyectos (en este caso en alumnos/as de grado de Educación Primaria). Sin embargo, también resaltan los problemas encontrados en los grupos de estudio (no distinción de variables continuas y discretas, adecuación de los gráficos a las variables que representan, etc.) que como vimos en documentos citados con anterioridad, no eran despreciables y condicionaban la enseñanza. Por último y en este sentido, se recalca la atención que debe mostrar el profesor en la tutorización de los trabajos para evitar errores comunes.

Un último artículo enfocado a la adquisición de la competencia estadística en estudiantes de Grado en Educación Primaria (Anasagasti y Berciano, 2016) muestra al igual que en los casos anteriores una repercusión positiva en la introducción de la metodología del aprendizaje basado en proyectos para la adquisición de las competencias estadísticas. Señala que “las competencias relativas al conocimiento del currículo..., la utilidad de la Estadística..., el uso de las nuevas tecnologías..., incrementan significativamente”. Sin embargo, también señala que el conocimiento del contenido estadístico a penas se incrementa. Con esto se refieren a que, con la metodología aplicada, aumenta el conocimiento de la estructura del currículo estadístico pero el conocimiento del contenido a penas sufre variación.

Para concluir, se puede destacar que a pesar de que la Estadística es una de las últimas disciplinas que se han incorporado al currículo, los grandes avances tecnológicos han puesto de manifiesto la necesidad de cualquier ciudadano de poseer conocimientos estadísticos básicos. Sin embargo, la realidad muestra que, aunque existe una buena predisposición por parte del alumnado para adquirir estos conocimientos, en general no tienen una base sólida de conceptos. Por otra parte, la docencia en Estadística no ha sido aún tan investigada como otras ramas del conocimiento, pero la mayoría de las investigaciones y propuestas metodológicas centran su atención en el proyecto como medio para adquirir este tipo de habilidades y conceptos, señalando además la mejoría generalizada que supone en el alumnado este tipo de metodologías en cuanto a la adquisición del currículo educativo.

4 Fundamentación epistemológica

En este apartado se desarrollará un tema del temario oficial de oposiciones para profesorado de secundaria de la especialidad de Matemáticas. Los temas de oposición que se centran en la rama de Estadística son:

- Tema 57. Usos de la Estadística.
- Tema 58. Población y muestra.
- Tema 59. Técnicas de obtención y representación de datos.
- Tema 60. Parámetros estadísticos.
- Tema 62. Series estadísticas bidimensionales.

Como se puede ver en el apartado 5, todo el contenido que se desarrolla en el currículo de Estadística para cuarto de ESO resulta ser un resumen del temario de oposiciones expuesto anteriormente. De esta forma, cada tema desarrolla algún concepto concreto de la Educación Secundaria Obligatoria. Por este motivo, los siguientes subapartados se centrarán fundamentalmente en el desarrollo del “Tema 60. Parámetros estadísticos. Cálculo, significado y propiedades”, aunque, también se desarrollarán algunos conceptos o contenidos de otros temas que son fundamentales en el currículo de secundaria.

4.1. Conceptos generales

4.1.1. Definiciones básicas

- Estadística

La Estadística se puede comprender como “el arte de aprender a partir de los datos. Está relacionada con la recopilación de datos, su descripción subsiguiente y su análisis, lo que nos lleva a extraer conclusiones” (Ross y Valdés, 2014). En esta ciencia es importante comprender unos conceptos o definiciones básicas a las que se hace alusión continuamente durante cualquier proceso estadístico y que se introducen a continuación.

- Población

Es el grupo o colectivo que se estudia. Este término cuenta aquí con un significado más amplio que en su uso habitual, ya que, se puede referir a personas, cosas o medidas abstractas como el tiempo. A cada una de esas personas o cosas se les denomina elementos, que pueden ser materiales o abstractos. Además, cada elemento puede representar a una entidad compleja como un rebaño, una familia, una ciudad, etc. Por otro lado, el tamaño de la población se define como el número de elementos que

comprende, por lo tanto, se puede encontrar una población finita o infinita de elementos.

- Variables

Cada elemento de una población cuenta con unos caracteres, es decir, unas propiedades, rasgos, cualidades..., que son de interés para la investigación. Se pueden distinguir dos tipos de variables fundamentalmente: variables cuantitativas y variables cualitativas.

- Las variables cuantitativas son aquellas que se pueden medir o tienen asignado un número, es decir, se pueden expresar numéricamente. A su vez, dentro de las variables existe una división importante. Por una parte, se encuentran las variables continuas que pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo, y por otro, las variables discretas que son aquellas que solo pueden tomar determinados valores y no pueden tomar ningún valor intermedio entre dos valores consecutivos. Los desarrollos posteriores se centrarán sobre todo en este tipo de variables. Se denominarán con letras mayúsculas, usualmente X , y cada uno de los valores de la variable con la misma letra, pero en minúscula y seguida de un subíndice:

$$x_1, x_2, x_3 \dots x_i \dots x_k$$

- Las variables cualitativas son aquellas que definen una cualidad del elemento, es decir, se describen con palabras y no con números como por ejemplo una profesión, un color, un estado anímico, etc. Es posible convertir una variable cualitativa en una cuantitativa, asignando a cada cualidad un número. Estas variables se denominan nominales.

- Muestra:

Cuando se conoce la característica que se quiere estudiar y se ha delimitado la población de estudio, se procede a observar los elementos para obtener la información necesaria.

Ahora bien, existen diferentes formas de observar una población según el tamaño de la misma. Se puede realizar una observación exhaustiva, donde se observan todos los elementos de la población (cuando la población es abarcable), o puede ser una observación parcial, donde sólo se observa un grupo representativo de la población al que se denomina muestra.

4.1.2. Estudio estadístico

El estudio estadístico se podría definir como aquel estudio que utiliza la Estadística para dar respuestas a unas preguntas determinadas.

Un estudio estadístico se puede dividir en dos partes bien definidas. Por una parte, se encuentra la recogida de datos que es fundamental para la realización del estudio, por otro lado, se encuentra el periodo de análisis de los datos recogidos. No obstante, lo usual es dividir el estudio en fases de menor duración. Es necesario señalar que cada autor nombra un número diferente de fases, pero en conjunto, el informe realiza los mismos pasos. En este caso se presentan cuatro:

- **Planificación**

Se refiere al planteamiento de todos los procesos que se van a realizar durante el estudio, así como el material que se va a utilizar. En esta fase deben quedar perfectamente definidos aspectos como la finalidad del estudio, determinadas definiciones, etc. Este primer punto es fundamental para el éxito del estudio.

- **Recogida de datos**

En esta fase se realiza en primer lugar la recolección de los datos necesarios para trabajar y, por otra parte, la tabulación de esos datos recogidos.

Los datos se pueden obtener de diferentes formas: la primera de ellas es recurrir a bases de datos ya existentes, y la segunda es recopilar datos nuevos para el estudio.

La recolección de datos para el estudio se puede realizar a través de diferentes métodos. Es muy usual utilizar encuestas donde se responden preguntas para obtener los datos necesarios para el estudio. A su vez, existen muchas formas de distribuir dichas encuestas: a través de las redes, por agentes distribuidores, por agentes encuestadores, etc. La principal diferencia que existe entre los agentes distribuidores y los encuestadores es que los primeros tan solo distribuyen las encuestas y las recopilan, mientras que los segundos son personas instruidas previamente que formulan y anotan las respuestas de forma que pueden realizar aclaraciones y evitar problemas de incomprensión de preguntas. Por otro lado, también es usual obtener datos a través de experimentos, lo que destaca la importancia de la Estadística en el ámbito científico.

Utilizar bases de datos o recopilar nuevos datos cuenta con ventajas e inconvenientes. Recurrir a bases de datos puede ser rápido, fácil y menos costoso, sin embargo, no se controla la obtención de los datos y el público objetivo podría no ser el adecuado para el estudio. Con la segunda opción ocurre justo lo contrario, resulta mucho más costoso, pero se puede controlar hasta cierto punto los datos recogidos.

Una vez obtenidos los datos, se ordenan para poder trabajar con ellos. En este proceso se corrigen errores, inconsistencias, se desechan respuestas, etc., a fin de que los datos recogidos sean realmente característicos ya que podrían derivar en unas conclusiones erróneas.

Es importante remarcar esta última idea. Si los datos recopilados no son característicos del conjunto, el análisis realizado posteriormente será erróneo, y el estudio concluirá respuestas equivocadas, por lo que es fundamental el periodo de recolección de datos. Para que estos datos sean característicos es usual utilizar métodos de muestreo que permiten seleccionar una muestra representativa dentro de la población. Existen multitud de métodos, pero uno de los más sencillos es el muestreo aleatorio simple. En realidad, es un algoritmo sencillo que consiste en numerar de 1 a N a todos los elementos de la población y elegir uno al azar que formará parte de la muestra. En el siguiente paso se tiene una población de $N - 1$ elementos numerados de los que se elige otro al azar que formará parte de la muestra. De esta forma en el siguiente paso, se tendrá una población de $N - 2$ elementos numerados y se proseguirá con el algoritmo hasta conseguir los n elementos que formarán la muestra.

- **Análisis de datos**

Se pueden realizar dos tipos de análisis: descriptivo o inferencial. El análisis descriptivo tiene como finalidad comprender el conjunto de datos recopilados, es decir, observar y definir las características de la muestra estudiada. En el análisis inferencial se utilizan procesos inductivos y probabilísticos para inferir conclusiones hacia la población.

Es necesario señalar que en la fase de planteamiento debe quedar recogido qué tipo de análisis se requiere, ya que dependiendo del objetivo puede no requerirse un estudio inferencial.

- **Conclusiones**

En esta fase se revisa de forma crítica si los resultados obtenidos, así como los modelos creados, son correctos y se realiza un informe.

4.1.3. Distribución de frecuencias de una variable estadística

Definición 1. Se denomina distribución de frecuencias de una variable estadística a la ordenación en tabla de los datos observados de la variable.

A continuación, se definen los diferentes tipos de frecuencias que se suelen representar de forma tabulada.

Definición 2. Se denomina frecuencia absoluta al número de veces que se repite un mismo valor entre todos los datos observados. Se representa como n_i , siendo “ i ” un

José Antonio Barragán Franco

referente al dato observado. El número total de datos observados corresponde a la suma de todas las frecuencias absolutas (N), desde el primer dato hasta el último, que se denomina k .

$$\sum_{i=1}^k n_i = N$$

Definición 3. Se denomina frecuencia relativa a la división de la frecuencia absoluta (n_i) entre el número total de datos observados (N). Se representa como f_i y el resultado se expresa en tanto por uno.

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

Definición 4. Se denomina frecuencia absoluta acumulada (N_i) de un dato a la suma del valor de la frecuencia absoluta de ese dato (n_i) con las frecuencias absolutas de todos los datos anteriores

$$N_1 = n_1$$

$$N_2 = n_1 + n_2$$

.....

$$N_j = n_1 + n_2 + \dots + n_j = \sum_{i=1}^j n_i$$

Definición 5. Se denomina frecuencia relativa acumulada (F_i) de un dato a la suma del valor de las frecuencias relativas de ese dato (f_i) con las frecuencias relativas de todos los datos anteriores.

$$F_1 = f_1$$

$$F_2 = f_1 + f_2$$

.....

$$F_j = f_1 + f_2 + \dots + f_j = \sum_{i=1}^j f_i$$

Además, se cumple que la frecuencia relativa acumulada del último dato (F_k) alcanza el valor uno debido a que la frecuencia relativa (f_i) se expresa en tanto por uno.

$$F_k = \sum_{i=1}^k f_i = 1$$

Para trabajar y comprender los datos se utilizan tablas estadísticas que organizan la multitud de observaciones y recogen los rasgos más característicos del fenómeno estudiado. Una de las tablas más utilizadas es la tabla que incluye la distribución de frecuencias de la variable estudiada donde se ordenan de forma sistemática los valores de una variable estudiada en relación al número de apariciones de cada valor. Para una variable X se tiene:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
x_1	n_1	f_1	N_1	F_1
x_2	n_2	f_2	N_2	F_2
x_3	n_3	f_3	N_3	F_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_k	n_k	f_k	$N_k = N$	$F_k = 1$
	N	1		

Tabla 1. *Tabla de frecuencias para variable no agrupada*. Fuente: elaboración propia

También es usual trabajar con variables continuas por lo que es necesario introducir otras definiciones más específicas.

Definición 6. Se denomina intervalo de clase a cada uno de los grupos de valores en los que se decide dividir una variable. Se representan con los valores límites del intervalo, indicando si dichos valores están incluidos o no en el mismo.

$$L_{i-1} - L_i$$

Para facilitar su representación es usual asociar a cada intervalo una marca de clase que lo representa y es el valor intermedio entre los límites.

Definición 7. La amplitud del intervalo (a_i) corresponde a la diferencia entre ambos límites que no tiene por qué ser constante en todos los intervalos.

$$a_i = L_i - L_{i-1}$$

Definición 8. Se denomina densidad de frecuencia (h_i) de un intervalo de una variable, al cociente entre su frecuencia absoluta (n_i) y la amplitud (a_i) de dicho intervalo.

$$h_i = \frac{n_i}{a_i}$$

Para este tipo de distribuciones la tabla de frecuencias tipo es la siguiente:

Intervalos	n_i	h_i	f_i	N_i	F_i
$L_0 - L_1$	n_1	n_1/a_1	f_1	N_1	F_1
$L_1 - L_2$	n_2	n_2/a_2	f_2	N_2	F_2
$L_1 - L_2$	n_3	n_3/a_3	f_3	N_3	F_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$L_{i-1} - L_i$	n_i	n_i/a_i	f_i	N_i	F_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$L_{k-1} - L_k$	n_k	n_k/a_k	f_k	$N_k = N$	$F_k = 1$
	N		1		

Tabla 2. *Tabla de frecuencias para variable agrupada.* Fuente: elaboración propia

4.2. Parámetros estadísticos

4.2.1. Medidas de centralización

Las medidas de centralización estudian valores medios de una variable e indican en torno a qué valores se posiciona la variable. Existen muchas medidas diferentes y cada una de ellas cuenta con propiedades que favorecen su uso en campos determinados.

Definición 9. Media aritmética (\bar{X})

Se denomina media aritmética de una variable estadística al cociente de la suma de todos los datos de la variable entre el número total de estos (N).

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{N}$$

De esta forma, la media aritmética es un valor representativo del conjunto de datos y viene dado por la misma unidad de medida.

Se puede deducir que, si existen varias observaciones de un mismo valor de la variable, quedando recogidas como frecuencias (n_i), la suma de todos esos valores puede calcularse como $\sum x_i n_i$, y por tanto la media aritmética puede calcularse de la siguiente forma:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{N}$$

Ejemplo: Si contamos con la variable “número de hijos” (X) tabulada:

x_i	n_i	$x_i n_i$
1	22	22
2	17	34
3	9	27
4	2	8
Σ	50	91

Tabla 3. *Ejemplo: N° de hijos.* Fuente: elaboración propia

La media aritmética para este conjunto de datos será:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x_i n_i}{N} = \frac{91}{50} = 1.82$$

Este parámetro cuenta con muchas propiedades. A continuación, se muestran las más importantes:

1ª La suma de todas las diferencias entre cada valor y la media aritmética de un conjunto de datos es igual a cero.

$$\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}) n_i = \sum_{i=1}^k x_i n_i - \bar{X} \sum_{i=1}^k n_i = \bar{X} N - \bar{X} N = 0$$

2ª La media aritmética de los valores de un conjunto de datos no variará si las frecuencias se multiplican o dividen por un mismo número (b).

$$\bar{X}' = \frac{\sum_{i=1}^k x_i b n_i}{b N} = \frac{b \sum_{i=1}^k x_i n_i}{b N} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{N} = \bar{X}$$

Esta propiedad no se utiliza de forma habitual, es más común multiplicar los valores por una constante como se puede ver en la 4ª propiedad.

3ª Si a todos los valores de la variable se les suma una cantidad constante “ a ”, es decir, se realiza un cambio de origen en la variable, se obtiene una nueva variable $Y = X + a$. Entonces la nueva medida aritmética será la media de X más la cantidad “ a ”.

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i + a)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{N} + \frac{N \cdot a}{N} = \bar{X} + a$$

4ª Si todos los valores de la variable X se multiplican por una cantidad constante “ b ”, es decir, se realiza un cambio de escala, se obtiene una nueva variable $Y = Xb$. Entonces, la nueva medida aritmética será la media de X por la cantidad “ b ”.

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N bx_i}{N} = \frac{b \sum_{i=1}^N x_i}{N} = b\bar{X}$$

Definición 10. Media ponderada (\bar{X}_p)

Si se tiene una variable X con valores $x_1, x_2, x_3 \dots$ a los que les corresponden unos pesos $w_1, w_2, w_3 \dots$, se denomina media ponderada de la variable X a la división entre la suma de todos los valores de la variable multiplicados por sus respectivos pesos, y la suma total de los pesos.

$$\bar{X}_p = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$$

Se puede observar que la media aritmética definida anteriormente es una media ponderada donde los pesos corresponden a las frecuencias absolutas.

Definición 11. Media geométrica (G)

La media geométrica de un conjunto de N datos, se define como la raíz de orden N del producto de todos los datos observados.

$$G = \sqrt[N]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}}$$

Algunas características interesantes son por ejemplo que los valores extremos tienen menos influencia que en la media aritmética, y además esta media presenta problemas cuando existen valores negativos (podrían aparecer raíces de número negativos), o cuando un valor es cero, ya que la media también sería cero.

Definición 12. Media cuadrática (C)

La media cuadrática de un conjunto de datos se define como la raíz cuadrada de la división entre la suma de los cuadrados de los valores de la variable y el número total de datos (N).

$$C = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_k^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k x_i^2}{N}}$$

Esta magnitud permite conseguir un promedio sin considerar los efectos del signo. Se calcula elevando al cuadrado todos los valores de las observaciones para que desaparezcan los signos negativos, realizando una media aritmética a esos nuevos valores y realizando la raíz para volver a contar con la magnitud de origen.

También se puede calcular utilizando la frecuencia como se ha visto anteriormente.

$$C = \sqrt{\frac{x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + x_3^2 n_3 + \dots + x_k^2 n_k}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 n_i}{N}}$$

Definición 13. Media armónica (H)

La media armónica de un conjunto de datos se define de la siguiente forma:

$$H = \frac{N}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \dots + \frac{n_k}{x_k}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x_i}}$$

Es importante ver que no tiene sentido el cálculo de esta medida cuando cuenta con valores igual a cero.

Esta medida se suele utilizar en conjuntos de datos referidos a velocidades, rendimientos, ritmos de producción, etc., como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Se quiere conocer el rendimiento medio de trigo de varias fincas agrarias en las que se observan estos datos:

Rendimiento (toneladas de trigo/ha) x_i	n_i	$\frac{n_i}{x_i}$
10	100	10,0
12	150	12,5
15	120	8,0
18	200	11,1
Σ	$N = 570$	41,6

Tabla 4. *Ejemplo: Producción de trigo.* Fuente: adaptado de Casas et al. (1986)

El rendimiento medio de este conjunto de datos será:

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x_i}} = \frac{570}{41,6} = 13,7 T/ha$$

Una propiedad importante de esta medida es que la inversa de la media armónica (H) es la media aritmética (\bar{X}) del inverso de los valores de la variable de estudio ($\frac{1}{x_i}$). Se puede demostrar fácilmente.

Demostración 1

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \dots + \frac{n_k}{x_k}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x_i}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \left(\frac{1}{x_i}\right)}{N} \quad c. q. d.$$

A continuación, se van a definir algunas relaciones entre las medias vistas hasta ahora.

Se puede demostrar que, para distribuciones de frecuencias con valores positivos, la media armónica (H) será menor que la media geométrica (G) y esta será menor que la media aritmética (\bar{X}).

$$H \leq G \leq \bar{X}$$

Demostración 2

Se va a comprobar para una distribución de dos valores, para el caso de n valores se demostraría por inducción. Para dos valores, las medias serían las siguientes:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \quad G = \sqrt{x_1 x_2} \quad \bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

En primer lugar, se demuestra que $H \leq G$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2} &\Leftrightarrow \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow 2x_1 x_2 \leq \sqrt{x_1 x_2} (x_1 + x_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x_1^2 x_2^2 \leq x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 \Leftrightarrow 4x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2)^2 \Leftrightarrow 4x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \Leftrightarrow 0 \leq (x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

Como se puede observar, esta desigualdad se verifica siempre.

Por otro lado, se comprueba que $G \leq \bar{X}$.

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x_1 x_2} \leq x_1 + x_2 \Leftrightarrow 4x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$$

Como se puede ver, la expresión es la misma que en el caso anterior por lo que si se sigue operando, se obtendrá:

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

Al igual que en el caso anterior, esta desigualdad se cumple siempre, por lo que se puede concluir que:

$$H \leq G \leq \bar{X} \quad c. q. d.$$

Definición 14. Mediana (M_e)

En un conjunto de datos ordenados creciente o decrecientemente, se llama mediana al valor central que deja a ambos lados el mismo número de observaciones.

Al contrario que con las medidas anteriores, esta medida se puede obtener de forma inmediata visualizando los datos, o de forma más compleja dependiendo de la situación.

En el caso de que los datos no estén agrupados en intervalos, la mediana se puede obtener con la frecuencia relativa acumulada (F_i) ya que el primer valor que supere 0,5 (el 50% de los datos), corresponderá al valor de la mediana, o con otros parámetros como N_i ya que el primer valor de N_i que supere $N/2$ corresponde también con la mediana.

Esta medida cuenta con varias características interesantes:

1ª La mediana depende del orden de los datos y no de sus valores.

2ª En una distribución simétrica, el valor de la mediana (M_e) coincide con el de la media aritmética.

3ª Si la distribución es asimétrica a la derecha, se cumple que la moda (se desarrolla más adelante) es menor que la mediana, y esta es menor que la media aritmética.

$$M_o \leq M_e \leq \bar{X}$$

4ª Si la distribución es asimétrica a la izquierda, se cumple que la media aritmética es menor que la mediana, y esta es menor que la moda.

$$\bar{X} \leq M_e \leq M_o$$

En un conjunto de datos agrupados, el valor de la mediana se puede aproximar con la siguiente ecuación:

$$M_e = L_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i} \cdot a_i$$

donde:

L_{i-1} es el límite inferior del intervalo correspondiente a la primera frecuencia acumulada mayor que $N/2$.

n_i es la frecuencia absoluta del intervalo.

a_i es la amplitud del intervalo.

N_{i-1} corresponde a la frecuencia acumulada del intervalo anterior.

Cuando se tienen datos recogidos por intervalos, se tiene la siguiente tabla de frecuencias, donde se conoce en qué intervalo se encuentra la mediana ya que debe ser en el primer intervalo que tenga una frecuencia absoluta acumulada (N_i) mayor que $N/2$. En este caso, dicho intervalo $L_{i-1} - L_i$ (límite inferior - límite superior) se denomina intervalo mediano.

Intervalos	n_i	N_i
$L_0 - L_1$	n_1	N_1
$L_1 - L_2$	n_2	N_2
...
$L_{i-1} - L_i$	n_i	N_i
...
$L_{k-1} - L_k$	n_i	N_k
N		

Tabla 5. Valores de n_i y N_i de una variable. Fuente: adaptado de Barbancho (1994)

El siguiente gráfico muestra N_i respecto a los valores de la variable distribuidos en intervalos.

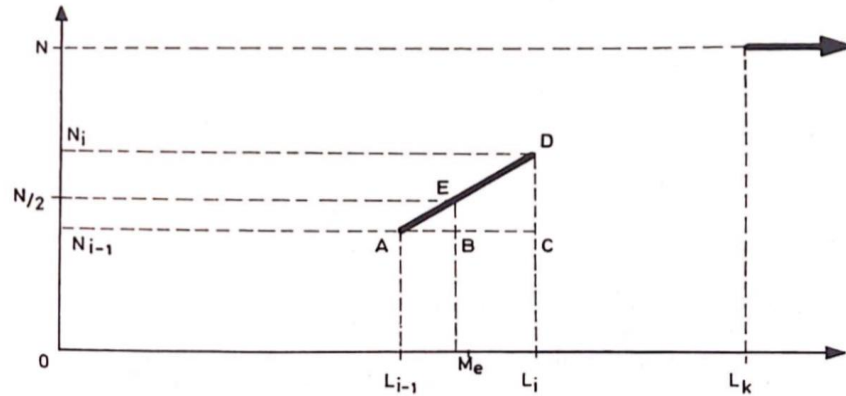


Figura 2. Esquema de situación de la mediana. Fuente: Barbancho (1994)

A partir de estas definiciones y apoyándonos en la tabla y gráfica anterior, se puede deducir la fórmula para obtener un valor aproximado de la mediana en datos agrupados.

$$M_e = L_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i} \cdot a_i$$

Demostración 3

Como se ha dicho anteriormente, la mediana (M_e) debe estar contenida en el intervalo mediano, $L_{i-1} - L_i$, (Figura 2). Para encontrar la mediana dentro de este intervalo, se hace la suposición de que los valores están distribuidos uniformemente dentro del mismo y que la mediana corresponde a $N/2$. Entonces la mediana se puede expresar como:

$$M_e = L_{i-1} + AB$$

$$\text{Como } \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{CD}; AB = \frac{EB}{CD} AC \Rightarrow M_e = L_{i-1} + \frac{EB}{CD} AC$$

Por otro lado, se tiene que

$$EB = N/2 - N_{i-1}$$

$$DC = N_i - N_{i-1} = n_i$$

$$AC = a_i$$

Si se sustituye en la anterior se obtiene

$$M_e = L_{i-1} + \frac{N/2 - N_{i-1}}{n_i} \cdot a_i \quad c. q. d.$$

No obstante, no deja de ser una aproximación. Cuanto más uniforme estén distribuidos los datos dentro del intervalo, más aproximado será el valor de cálculo a la mediana real.

Ejemplo: Para calcular la mediana de este conjunto de datos se sigue de la siguiente forma:

Intervalos	n_i	N_i
[1,30 – 1,35)	7	7
[1,35 – 1,40)	4	11
[1,40 – 1,45)	2	13
[1,45 – 1,50)	0	13
[1,50 – 1,55)	9	22
[1,55 – 1,60)	1	23
[1,60 – 1,65)	1	24
[1,65 – 1,70)	6	30
[1,70 – 1,75)	2	32
[1,75 – 1,80)	7	39
[1,80 – 1,85)	5	44
[1,85 – 1,90)	3	47
[1,90 – 1,95)	3	50
Σ	50	

Tabla 6. Ejemplo: *Cálculo de la mediana*. Fuente: elaboración propia

De la tabla de frecuencias se obtiene lo siguiente.

$$\frac{N}{2} = 25$$

$$L_{i-1} = 1,65$$

$$n_i = 6$$

$$a_i = 0,05$$

$$N_{i-1} = 24$$

Si se aplica la ecuación.

$$M_e = L_{i-1} + \frac{N/2 - N_{i-1}}{n_i} \cdot a_i = 1,65 + \frac{25 - 24}{6} \cdot 0,05 = 1.658\hat{3}$$

Y se obtiene el valor aproximado de la mediana para este conjunto de datos. Se puede observar que justo cuando N_i alcanzase 25, se obtendría la mitad de los datos totales que correspondería a la mediana. Como $N_{i-1} = 24$, es decir, solo falta contabilizar un dato más para alcanzar la mitad, el valor de la mediana debe ser muy próximo a L_{i-1} por lo que el dato obtenido de la mediana parece bastante aproximado.

Definición 15. Moda (M_o)

Se denomina moda de una variable estadística al valor de la variable que cuenta con mayor frecuencia absoluta (n_i).

Al igual que en el caso anterior, si los datos están recogidos por intervalos, es necesario realizar una aproximación. Existen diferentes fórmulas para realizarla, pero la más general se realiza de la siguiente forma:

$$M_o = L_{i-1} + \frac{h_{i+1}}{h_{i-1} + h_{i+1}} \cdot a_i$$

A continuación, se citan algunas características interesantes:

1ª Puede existir más de una moda en una misma distribución si hay dos valores que tienen la misma frecuencia y además corresponde con la mayor. De la misma forma puede ocurrir que todos los valores tengan la misma frecuencia y no tenga sentido definir la moda.

2ª Esta medida se puede calcular también para variables cualitativas o atributos.

3ª El valor de la moda es fácil de interpretar.

4ª No recoge los cambios en la distribución que no afecten directamente al valor modal.

Definición 16. Cuantiles ($Q_{r/q}$)

Se denominan cuantiles $Q_{r/q}$ de una variable a los valores ordenados de la variable que dividen la distribución de frecuencias en q partes iguales, donde r hace referencia a la posición que ocupa cada parte. Se llamará cuantil r -ésimo de orden q al valor de la variable que deja a su izquierda r/q partes de la distribución y a su derecha $\frac{q-r}{q}$ partes.

Los cuantiles más usados son:

- Cuartiles: dividen la muestra en cuatro partes iguales. De esta forma $Q_{1/4}$ deja a la izquierda el 25% de los datos.
- Deciles: dividen la muestra en diez partes iguales. De esta forma $Q_{1/10}$ deja a la izquierda el 10% de los datos.
- Percentiles: dividen la muestra en cien partes iguales. De esta forma $Q_{1/100}$ deja a la izquierda el 1% de los datos.

Una relación a destacar es que la mediana divide los datos en dos partes iguales por lo que deja a ambos lados el 50% de los datos, es decir, corresponde con $Q_{2/4}$, $Q_{5/10}$ y con $Q_{50/100}$.

El cálculo para datos no agrupados es sencillo, veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo: Calcular los cuartiles para esta distribución de datos.

x_i	n_i	N_i
1	5	5
2	20	25
3	25	50
4	15	65
5	10	75
6	5	80
Σ	80	

Tabla 7. Ejemplo: *Cálculo de cuartiles*. Fuente: elaboración propia

En primer lugar, hay que conocer en cuantas partes se quiere dividir la muestra (q), en este al ser cuartiles se quiere dividir en cuatro.

El primer cuartil sería $Q_{1/4} = \frac{1}{4} \cdot 80 = 20$ y corresponde con el valor 2 de la variable porque es el primer valor de N_i que supera 20 observaciones.

El segundo cuartil sería $Q_{2/4} = \frac{2}{4} \cdot 80 = 40$ y corresponde con el valor 3 de la variable porque es el primer valor de N_i que supera 40 observaciones.

El tercer cuartil sería $Q_{3/4} = \frac{3}{4} \cdot 80 = 60$ y corresponde con el valor 4 de la variable porque es el primer valor de N_i que supera 60 observaciones.

Los cuartiles calculados significan que los valores de la variable 2, 3 y 4 dejan a su izquierda el 25%, 50%, 75% de los datos observados, y que la mediana de esta distribución es 3.

Como se puede observar, existen muchas medidas de centralización que se pueden estudiar para cada conjunto de datos. No obstante, es necesario señalar que las más importantes son sin duda la media aritmética (\bar{X}), la mediana (M_e) y la moda (M_o), y cada una cuenta con particularidades que es conveniente conocer.

De la media aritmética se puede destacar respecto a las otras, que tiene en cuenta todas las observaciones, por lo que cualquier valor anormal afecta a esta medida y puede inducir una visión distorsionada de los datos. Por otro lado, cuenta con la ventaja de que viene definida por una expresión algebraica por lo que se puede trabajar con ella para conocer información ausente como por ejemplo la suma total de todas las observaciones.

José Antonio Barragán Franco

Para la obtención de la mediana, en cambio, no es necesario conocer todos los valores de la variable y se puede obtener a partir de datos incompletos. Otra ventaja es que no se ve afectada por valores anormales. La mayor desventaja de esta variable es que no se puede calcular a partir de una fórmula matemática, hay que tener en cuenta que la formulación expresada anteriormente tan solo es un método para aproximar el valor, y por lo tanto no se puede trabajar con esta formulación y obtener otra información.

En cuanto a la moda, ocurre igual que con la mediana, no utiliza todos los valores y se puede obtener de datos incompletos. Tampoco cuenta con formulación matemática, pero es muy interesante conocerla cuando los datos tienden a concentrarse en torno a un valor concreto ya que como se ha visto, esta medida no se ve afectada por valores anómalos.

En general estas medidas se pueden considerar bastante representativas para distribuciones en forma de campana y poco asimétricas, donde suele ser preferible (en el caso de que haya que optar por una) la media aritmética debido a sus propiedades algebraicas.

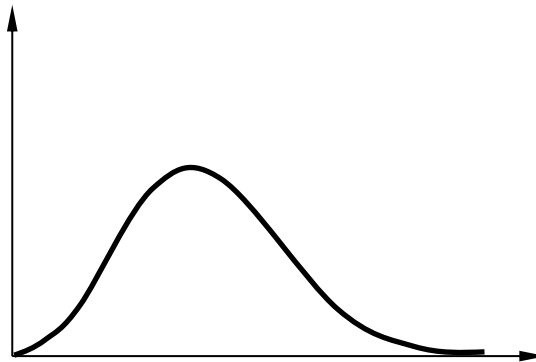


Figura 3. *Esquema de distribución campaniforme simétrica.* Fuente: elaboración propia

En otras distribuciones en forma de campana y muy asimétricas es más representativa la media o la moda.

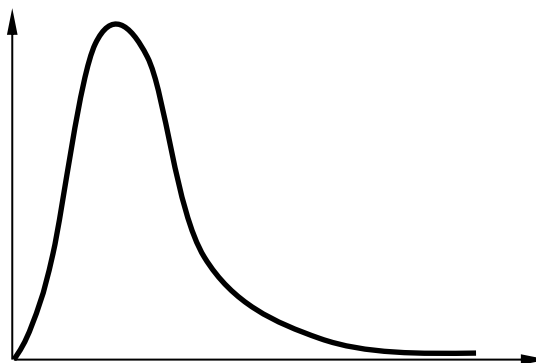


Figura 4. *Esquema de distribución campaniforme asimétrica.* Fuente: elaboración propia

Y en otras distribuciones, estas medidas resultan poco representativas en general.

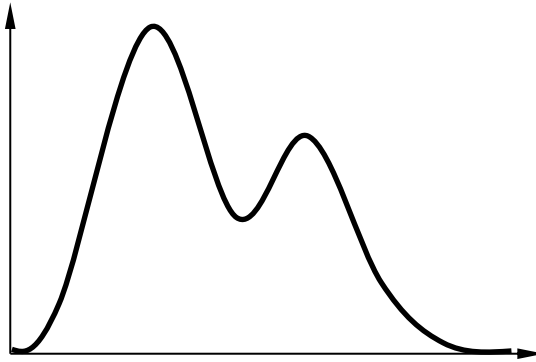


Figura 5. Esquema de distribución no reglada. Fuente: elaboración propia

4.2.2. Medidas de dispersión

Con las medidas de centralización, en la mayoría de los casos no se tiene información suficiente para comprender el fenómeno de estudio. Las medidas de dispersión permiten conocer cómo se distribuyen los datos de una variable, es decir, miden si los datos están muy alejados o no de las medidas de centralización vistas anteriormente.

Definición 17. Recorrido (R)

Se define el recorrido o rango de una variable estadística a la diferencia entre el mayor y el menor de los valores de la variable.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Sin embargo, esta medida resulta problemática y poco representativa cuando existen valores anómalos muy alejados del resto del conjunto de datos. Para evitar la influencia de estos valores, se define el “rango intercuartílico” (R_I).

Definición 18. Rango intercuartílico (R_I):

Se define el rango intercuartílico de una variable estadística a la diferencia entre el tercer cuartil ($Q_{3/4}$) y el primer cuartil ($Q_{1/4}$) de la variable.

$$R_I = Q_{3/4} - Q_{1/4}$$

De esta forma, el rango intercuartílico obtiene la variación del 50% de los datos centrales.

Definición 19. Desviación (D)

Se denomina desviación de un valor de una variable estadística a la diferencia entre dicho valor y un valor predefinido R .

$$x_i - R$$

Una de las desviaciones más usadas es la desviación respecto a la media:

$$x_i - \bar{X}$$

Cada valor de la variable estudiada cuenta con una desviación. Si las N desviaciones son muy grandes, significa que los datos están muy dispersos, en cambio, si son muy pequeñas significan que los datos están muy concentrados. No obstante, es necesario un valor que represente a todas las desviaciones ya que resulta imposible trabajar con cientos de desviaciones. Si se obtiene un valor representativo de las desviaciones calculadas, se obtiene al mismo tiempo un valor que indica cómo de dispersa es la variable de estudio. Este valor puede ser la media aritmética, sin embargo, cuenta con el problema de que la suma de todas las desviaciones de los valores respecto a la media es cero.

$$\Sigma (x_i - \bar{X}) = 0$$

Por este motivo se introducen otras medidas como las que se definen a continuación.

Definición 20. Desviación media ($D_{\bar{x}}$)

Se llama desviación media ($D_{\bar{x}}$) a la media aritmética de todas las desviaciones en valor absoluto de una variable respecto a la media aritmética de sus valores (\bar{X}).

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i |x_i - \bar{X}|}{N}$$

Ejemplo: Si tenemos los siguientes conjuntos de datos donde se puede observar que en ambos casos la media aritmética es la misma, en cambio, si se estudia la desviación media se obtendrán valores muy diferentes.



José Antonio Barragán Franco

x_i	n_i	$x_i n_i$	y_i	n_i	$y_i n_i$
1	5	5	1	15	15
2	10	20	2	10	20
3	15	45	3	5	15
4	15	60	4	5	20
5	10	50	5	10	50
6	5	30	6	15	90
Σ	60	210	Σ	60	210

Tablas 8 y 9. Ejemplo: *Cálculo de la media de X y cálculo de la media de Y.* Fuente: elaboración propia

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x_i n_i}{N} = \frac{210}{60} = 3,5$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma y_i n_i}{N} = \frac{210}{60} = 3,5$$

Se puede observar que la media aritmética en ambos conjuntos es la misma, aunque la distribución es diferente. A continuación, para la desviación media se obtiene lo siguiente:

x_i	n_i	$n_i x_i - \bar{X} $	y_i	n_i	$n_i y_i - \bar{Y} $
1	5	12,5	1	15	37,5
2	10	15	2	10	15
3	15	7,5	3	5	2,5
4	15	7,5	4	5	2,5
5	10	15	5	10	15
6	5	12,5	6	15	37,5
Σ	60	70	Σ	60	110

Tablas 10 y 11. Ejemplo: *Cálculo de la desviación media de X y cálculo de la desviación media de Y.*

Fuente: elaboración propia

$$D_{\bar{X}} = \frac{\Sigma n_i |x_i - \bar{X}|}{N} = \frac{70}{60} = 1,1\hat{6}$$

$$D_{\bar{Y}} = \frac{\Sigma n_i |y_i - \bar{Y}|}{N} = \frac{110}{60} = 1,8\hat{3}$$

Como se comentaba al principio, la desviación de ambos conjuntos es bastante diferente debido a la distribución de las variables.

Definición 21. Desviación mediana (D_{M_e}).

Se llama desviación mediana (D_{M_e}) a la media aritmética de todas las desviaciones en valor absoluto de una variable respecto a la mediana de sus valores (M_e).

$$D_{M_e} = \frac{\sum n_i |x_i - M_e|}{N}$$

La diferencia con la desviación media está en que se toma como valor de referencia la mediana y no la media aritmética, aunque suele utilizarse con más frecuencia la desviación media debido a la facilidad de cálculo.

Definición 22. Desviación estándar o típica (S).

Se llama desviación estándar (S) a la media cuadrática de todas las desviaciones de una variable respecto a la media aritmética de sus valores \bar{X} .

$$S = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{X})^2}{N}}$$

Existen otras formas de calcular la desviación estándar que se deducen fácilmente a partir de la anterior, desarrollando el binomio cuadrado.

$$S = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2}$$

Demostración 4

En primer lugar, se eliminan las raíces para facilitar los cálculos

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{X})^2}{N}} \Rightarrow S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{X})^2}{N}$$

Si se desarrolla el cuadrado del numerador se obtiene

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i^2 - 2x_i \bar{X} + \bar{X}^2)}{N} = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - 2\bar{X} \frac{\sum x_i n_i}{N} + \bar{X}^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2} \quad c. q. d$$

Definición 23. Varianza (S^2)

La varianza se define como la media aritmética de los cuadrados de las distancias de los valores de la variable a su media aritmética (\bar{X}), y corresponde con el cuadrado de la desviación estándar (S).

$$S^2 = \frac{\sum n_i(x_i - \bar{X})^2}{N}$$

También se puede calcular a partir de la demostración anterior de la siguiente manera

$$S^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2$$

La gran ventaja de este coeficiente es que al elevar al cuadrado la desviación estándar, elimina las raíces y facilita los cálculos, sin embargo, usa como medida el cuadrado de la medida original.

Aunque se podría tomar cualquier punto R como referencia para definir la varianza, se elige la media aritmética (\bar{X}) de la variable ya que se puede demostrar que es este valor el que hace mínima la diferencia de los cuadrados y por tanto hace mínima la varianza.

Definición 24. Coeficiente de variación (V)

Se denomina coeficiente de variación de una variable estadística al cociente entre la desviación estándar y la media aritmética de la variable.

$$V = \frac{S}{\bar{X}}$$

Cuando se pretende comparar distribuciones definidas con diferentes magnitudes o escalas no son útiles las medidas vistas hasta ahora. En estos casos, se suele utilizar el coeficiente de variación que no depende de las magnitudes de las variables, es decir, es una medida de dispersión relativa mientras que las anteriores eran absolutas.

Ejemplo:

Las variables a analizar son las siguientes:

Años (x_i)	n_i	$x_i n_i$	$n_i x_i^2$	Personas activas (y_i)	n_i	$y_i n_i$	$n_i y_i^2$	Salario por hora en €	n_i	z_i	$z_i n_i$	$n_i z_i^2$
8	1	8	64	1	16	16	16	[4 – 8)	3	6	18	108
19	1	19	361	2	20	40	80	[8 – 12)	12	10	120	1200
23	1	23	529	3	9	27	81	[12 – 16)	40	14	560	7840
26	1	26	676	4	5	20	80	[16 – 20)	47	18	846	15228
44	1	44	1936					[20 – 24)	32	22	704	15488
								[24 – 28)	13	26	338	8788
								[28 – 32)	9	30	270	8100
								[32 – 36)	4	34	136	4624
Σ	5	91	3566	Σ	50	103	257	Σ	160		2992	61376
\bar{X}		24		\bar{Y}		2,06		\bar{Z}			18,70	
S_x		11,71		S_y		0,95		S_z			5,82	

Tabla 12. Ejemplo: cálculo de V . Fuente: adaptado de Barbancho (1994).

Como se puede observar las variables no se pueden comparar con los parámetros calculados, para ello, se utiliza el coeficiente de variación.

$$V_x = \frac{S_x}{\bar{X}} = \frac{11,71}{24} = 0,4879$$

$$V_y = \frac{S_y}{\bar{Y}} = \frac{0,9}{2,06} = 0,4612$$

$$V_z = \frac{S_z}{\bar{Z}} = \frac{5,82}{18,70} = 0,3112$$

Como se puede observar, la variable con menor dispersión respecto a su media aritmética es la última, mientras que la primera es la que más dispersión tiene.

4.2.3. Medidas de forma

Estas medidas permiten clasificar las distribuciones, es decir, se encargan de comparar determinadas características de la distribución de estudio con distribuciones ya conocidas como la distribución normal y comprueban en qué aspectos se parecen y en cuales se diferencian.

Una de las medidas más usadas son los momentos ya que como se verá más adelante, engloban a algunas de las medidas vistas anteriormente.

Los momentos más usados son los momentos respecto al origen de la variable (a_r) y los momentos respecto a la media aritmética de la variable (m_r).

Definición 25. Momento con respecto al origen de la variable (a_r)

Siendo X una variable de estudio, se denomina momento de orden r , con respecto al origen, a la media aritmética de la variable X^r .

$$a_r = \frac{\sum x_i^r n_i}{N} \text{ donde } r = 0, 1, 2 \dots$$

Se puede observar que cuando $r = 0$, $a_0 = 1$ y el momento de primer orden ($r = 1$) corresponde con la media aritmética de la variable X .

$$a_r = \frac{\sum x_i^1 n_i}{N} = \bar{X}$$

Definición 26. Momento con respecto a la media (m_r)

Siendo X una variable de estudio, se denomina momento de orden r , con respecto a la media, a la media aritmética de la variable $(X - \bar{X})^r$.

$$m_r = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^r n_i}{N} \text{ para } r = 0, 1, 2 \dots$$

Al igual que en el caso anterior, para los diferentes órdenes se encuentran particularidades. En concreto, para $r = 0$, $m_0 = 1$, y el momento de segundo orden (m_2) coincide con la varianza (S^2).

$$m_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 n_i}{N} = S^2$$

Como se puede observar, se pueden definir algunas de las medidas vistas anteriormente mediante momentos de diferentes órdenes, siendo estos de gran utilidad para definir características de las variables de estudio.

Definición 27. Simetría

Una distribución de frecuencias es simétrica respecto a un valor (R) cuando los valores de la distribución que se encuentran a la misma distancia de R , alcanzan la misma frecuencia. En el caso contrario se denomina "asimétrica".

Se puede comprobar si una distribución es simétrica a partir del momento de tercer orden (m_3), para esto se define el coeficiente de asimetría (γ_1).

Definición 28. Coeficiente de asimetría de Fisher (γ_1)

El coeficiente de asimetría de una variable se define como el cociente entre el momento de tercer orden de la variable, y el cubo de su desviación estándar.

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{S^3}$$

A partir de este coeficiente se puede conocer el grado de asimetría de la variable.

Si $\gamma_1 = 0$, la distribución es simétrica.

Si $\gamma_1 > 0$, la distribución es asimétrica a la derecha.

Si $\gamma_1 < 0$, la distribución es asimétrica a la izquierda.

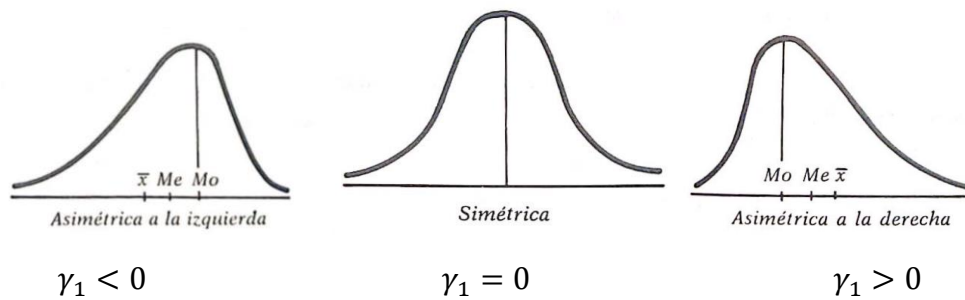


Figura 6. Esquema de simetría. Fuente: Casas et al. (1986)

Es notorio que solo se comprueba el signo en este coeficiente y como la desviación estándar (S) es una raíz, no puede ser negativa por lo que el signo del coeficiente lo aporta el momento de tercer orden. Sin embargo, se suele utilizar este coeficiente porque es adimensional y no varía con los cambios de origen o escala.

A continuación, se muestran varios ejemplos de cálculo de este coeficiente para diferentes distribuciones.

Ejemplo:

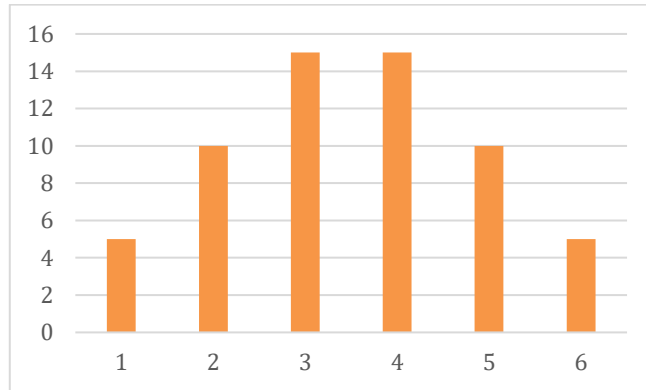
Se estudian cuatro conjuntos de datos:

- Primer conjunto

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	$x_i - \bar{X}$	$n_i (x_i - \bar{X})^3$
1	5	5	5	-2,5	-78,125
2	10	20	40	-1,5	-33,75
3	15	45	135	-0,5	-1,875
4	15	60	240	0,5	1,875
5	10	50	250	1,5	33,75
6	5	30	180	2,5	78,125
Σ	60	210	850	0	0

Tabla 13. Ejemplo: cálculo simetría 1. Fuente: elaboración propia

A simple vista, si se observa la distribución en la frecuencia se puede observar que es simétrica.



Gráfica 1. Distribución de frecuencias Tabla 13. Fuente: elaboración propia

No obstante, se puede comprobar mediante el coeficiente de asimetría γ_1 . Recordemos que, si el coeficiente es igual a 0, entonces la distribución es simétrica, si es mayor que 0, es asimétrica a la derecha y si es menor que cero es asimétrica a la izquierda. El coeficiente de asimetría se calcula como:

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{s^3}$$

El momento de tercer orden en este caso será.

$$m_3 = \frac{\sum n_i(x_i - \bar{X})^3}{N} = \frac{0}{60} = 0$$

Dado que el momento es cero, ya sabemos que el coeficiente de asimetría será cero.

$$\gamma_1 = \frac{0}{s^3} = 0$$

Por lo que la distribución es simétrica como se preveía en un principio.

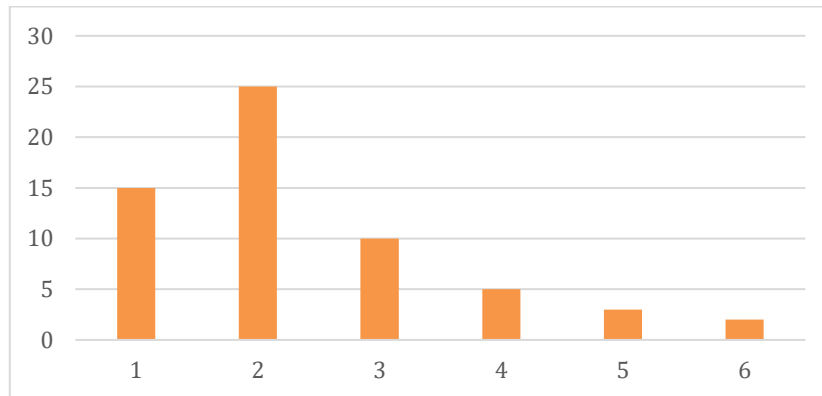
- Segundo conjunto

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	$x_i - \bar{X}$	$n_i(x_i - \bar{X})^3$
1	15	15	15	-1,37	-38,29
2	25	50	100	-0,37	-1,23
3	10	30	90	0,63	2,54
4	5	20	80	1,63	21,79
5	3	15	75	2,63	54,78
6	2	12	72	3,63	95,93
Σ	60	142	432	6,80	135,52

Tabla 14. Ejemplo: cálculo simetría 2. Fuente: elaboración propia

José Antonio Barragán Franco

Estas distribuciones son más difíciles de observar en tabla, pero en diagramas, se puede ver que es asimétrica a la derecha, por lo que el coeficiente de simetría debería ser mayor que 0.



Gráfica 2. Distribución de frecuencias Tabla 14. Fuente: elaboración propia

A continuación, se comprueba que dicho coeficiente es mayor que 0.

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{s^3}$$

El momento de tercer orden en este caso será.

$$m_3 = \frac{\sum n_i(x_i - \bar{X})^3}{N} = \frac{135,52}{60} = 2,25$$

Para calcular la desviación estándar necesitamos la media aritmética que es la siguiente.

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{N} = \frac{142}{60} = 2,36$$

Y con estos datos ya se puede calcular el cubo de la desviación estándar.

$$s^3 = \left(\sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2} \right)^3 = \left(\sqrt{\frac{432}{60} - 2,36^2} \right)^3 = 2,08$$

Por lo tanto, el coeficiente de asimetría valdrá $\gamma_1 = \frac{2,25}{2,08} > 0$, por lo que la distribución es asimétrica a la derecha como se preveía en un principio.

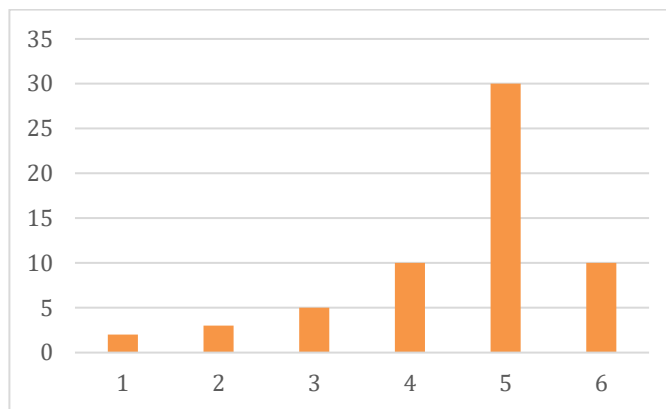
José Antonio Barragán Franco

o Tercer conjunto

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	$x_i - \bar{X}$	$n_i (x_i - \bar{X})^3$
1	2	2	2	-3,55	-89,48
2	3	6	12	-2,55	-49,74
3	5	15	45	-1,55	-18,62
4	10	40	160	-0,55	-1,66
5	30	150	750	0,45	2,73
6	10	60	360	1,45	30,49
Σ	60	273	1329	-6,30	-126,29

Tabla 15. Ejemplo: cálculo simetría 3. Fuente: elaboración propia

Al igual que en el caso anterior esta distribución es más difícil de observar en tabla, pero en diagramas, se puede ver que es asimétrica a la izquierda, por lo que el coeficiente de simetría debería ser menor que 0.



Gráfica 3. Distribución de frecuencias Tabla 15. Fuente: elaboración propia

A continuación, se comprueba que dicho coeficiente es menor que 0.

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{s^3}$$

El momento de tercer orden en este caso será.

$$m_3 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{X})^3}{N} = \frac{-126,29}{60} = -2,10$$

Para calcularla desviación estándar necesitamos la media aritmética que es la siguiente.

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{N} = \frac{273}{60} = 4,55$$

Y con estos datos ya se puede calcular el cubo de la desviación estándar.

$$S^3 = \left(\sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2} \right)^3 = \left(\sqrt{\frac{1329}{60} - 4,55^2} \right)^3 = 1,74$$

Por lo tanto, el coeficiente de asimetría valdrá $\gamma_1 = \frac{-2,10}{1,74} < 0$, por lo que la distribución es asimétrica a la izquierda como se preveía en un principio.

Definición 29. Coeficiente de apuntamiento o curtosis (γ_2)

Se define el coeficiente de apuntamiento de una variable X como:

$$\gamma_2 = \frac{m_4}{S^4} - 3$$

Donde m_4 es el momento de cuarto orden de la variable X , y S la desviación típica.

Se ha tomado como referencia para este coeficiente la distribución normal o campana de Gauss que es simétrica y tiene la particularidad como se puede observar en la ecuación que el momento de orden cuarto es exactamente tres veces la cuarta potencia de la desviación estándar.

$$m_4 = 3 \cdot S^4 \Rightarrow \gamma_2 = \frac{3 \cdot S^4}{S^4} - 3 = 0$$

Se verifica que:

Si $\gamma_2 = 0$, la distribución tiene un grado de apuntamiento similar a la distribución normal (mesocúrtica).

Si $\gamma_2 > 0$, la distribución tiene los datos más concentrados que la distribución normal (leptocúrtica).

Si $\gamma_2 < 0$, la distribución tiene los datos menos concentrados que la distribución normal (platicúrtica).

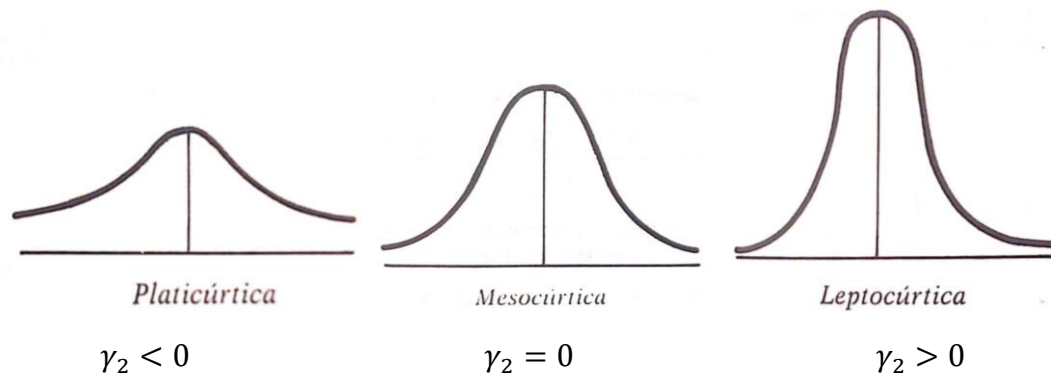


Figura 7. Esquema de apuntamiento. Fuente: Casas et al. (1986)

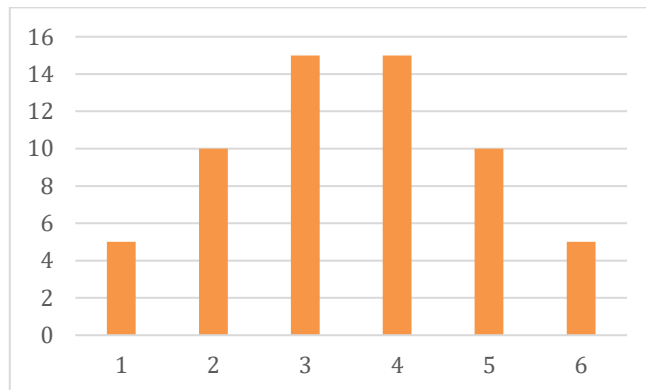
A continuación, se muestra encontrar un ejemplo de la aplicación de este coeficiente.

Ejemplo:

Se calculará el apuntamiento para el siguiente conjunto de datos que tiene una distribución de datos simétrica:

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	$x_i - \bar{X}$	$n_i (x_i - \bar{X})^4$
1	5	5	5	-2,5	195,31
2	10	20	40	-1,5	50,62
3	15	45	135	-0,5	0,94
4	15	60	240	0,5	0,94
5	10	50	250	1,5	50,64
6	5	30	180	2,5	195,31
Σ	60	210	850	0	493,75
\bar{X}	3,5				

Tabla 16. *Ejemplo: cálculo de apuntamiento.* Fuente: elaboración propia



Gráfica 4. *Distribución de frecuencias* Tabla 16. Fuente: elaboración propia

Para el cálculo del coeficiente es necesario conocer el momento de orden cuarto y la desviación estándar que se calculan a continuación:

$$m_4 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{X})^4}{N} = \frac{493,75}{60} = 8,23$$

$$S^4 = \left(\sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2} \right)^4 = \left(\sqrt{\frac{850}{60} - 3,5^2} \right)^4 = 3,67$$

Por lo tanto, si sustituimos los valores en la ecuación del coeficiente obtenemos:

$$\gamma_2 = \frac{m_4}{S^4} - 3 = \frac{8,23}{3,67} - 3 = -0,75$$

En este caso, el coeficiente es negativo, lo que quiere decir que la distribución es menos concentrada que la distribución normal (platicúrtica).

4.3. Gráficos estadísticos

Los gráficos estadísticos tienen como finalidad dar una visión de conjunto del fenómeno estudiado. Aunque la investigación estadística es fundamentalmente numérica, la representación gráfica es muy útil como medio auxiliar para la comprensión de los datos ya que las magnitudes que se estudian son más fáciles de comprender y recordar visualmente.

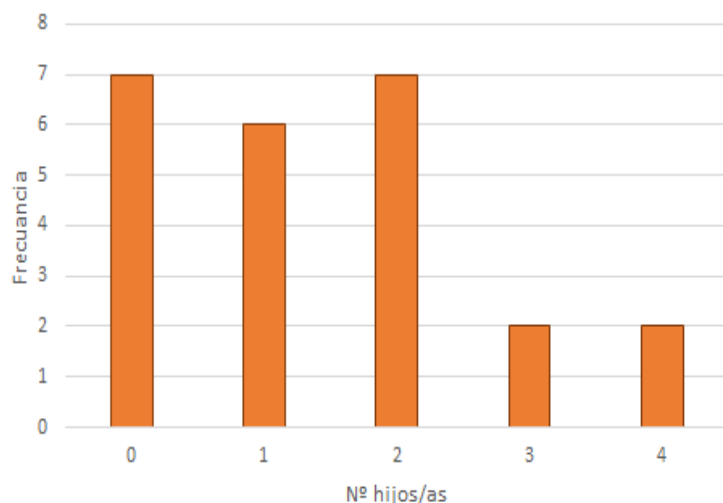
Existen multitud de tipos de representaciones gráficas. Se pueden encontrar tipos de gráficas según el número de variables de estudio, el tipo de variable, el uso que se quiera dar a la gráfica..., así que, se podría decir que es decisión del profesional usar uno u otro tipo. Sin embargo, es importante señalar que, por encima de cualquier modelo, las gráficas transmiten una información y en algunos casos, se centran en captar la atención de un público determinado.

A continuación, se presentan algunos de los tipos más usados.

- Diagrama de barras

Este tipo de gráfica se usa sobre todo para representar variables cuantitativas discretas o cualitativas.

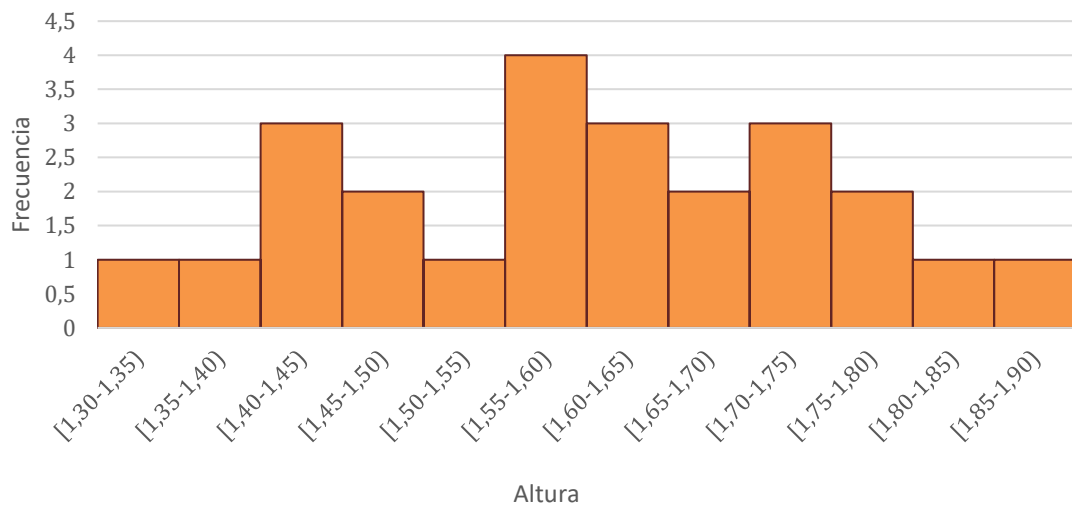
Para la construcción de esta gráfica se colocan en el eje de abscisas los valores que toma la variable y se levanta una barra hasta el valor de ordenadas (frecuencia absoluta, relativa...) que le corresponde. En este caso, dado que la variable es discreta, las barras no se tocan como en el siguiente tipo.



Gráfica 5. *Nº de hijos/as que tiene una pareja*. Fuente: elaboración propia

- **Histograma**

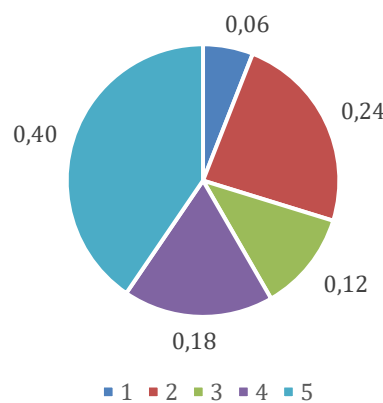
Este tipo de gráfica es muy parecida a la anterior. La mayor diferencia se encuentra en que este tipo se utiliza con variables continuas. De esta forma, en el eje de abscisas aparecerán ahora intervalos y no valores puntuales, por lo que se crearán barras que tienen como base un intervalo de valores. Otra diferencia es que la gráfica en este caso va a depender del intervalo que se elija ya que la longitud de este determinará su visualización, así como si todos los intervalos son iguales, que es lo usual, o de diferentes longitudes. En el caso de que los intervalos sean distintos se representa la densidad de frecuencias en lugar de las frecuencias absolutas o relativas.



Gráfica 6. *Altura de un grupo de alumnos/as.* Fuente: elaboración propia

- **Diagrama de sectores**

Otro tipo de gráfica muy usada es el diagrama de sectores, donde se representan variables cualitativas o cuantitativas discretas. Consiste en representar sectores cuya amplitud es proporcional a la frecuencia, siendo la suma total de sectores, el círculo completo.

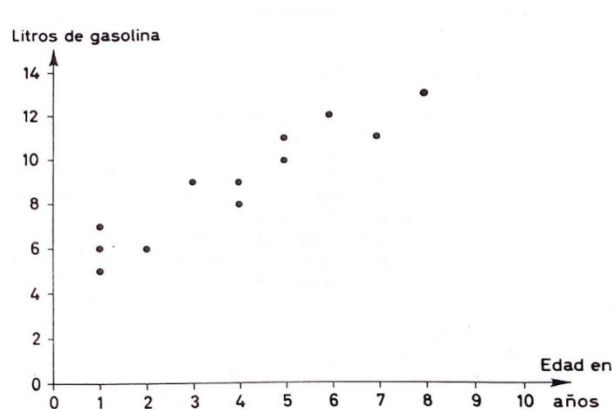


Gráfica 7. *Comparación porcentaje de hijos/as de una familia.* Fuente: elaboración propia

- Nube de puntos

Este tipo de gráfica se utiliza para el estudio de dos variables. En el eje de abscisas se sitúan los valores que toma una variable y en el eje de ordenadas se sitúan los valores de la otra variable. En la gráfica se van señalando puntos que quedan definidos por una pareja de valores, formando una nube de puntos que muestra a simple vista la relación existente entre ambas variables.

Por ejemplo, en la siguiente gráfica se muestra la relación existente entre la antigüedad de un coche y los litros de combustible que consume para una determinada distancia recorrida. Se puede observar a simple vista que mientras más edad tiene el auto, más combustible consume.



Gráfica 8. Relación entre edad y consumo de gasolina. Fuente: Barbancho (1994)

- Diagrama de caja y bigotes

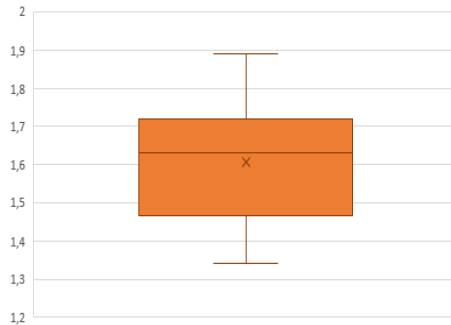
Esta gráfica es muy particular y tiene un uso muy concreto. Mientras las gráficas anteriores se utilizan con frecuencias, para comparar variables, etc., este diagrama ayuda a comprender cómo se distribuye una variable representando algunos parámetros básicos en la Estadística. Además, permite observar a simple vista si existen datos atípicos en la distribución. A continuación, se desarrollan los pasos a seguir para la construcción de esta gráfica.

- Ordenar los datos de la muestra y obtener el valor máximo, el mínimo y los cuartiles Q_1 , Q_2 (mediana) y Q_3 .
- Dibujar la “caja” con los valores de Q_1 , Q_2 (mediana) y Q_3 .
- Obtener los límites admisibles superior (LS) e inferior (LI):

$$LS = Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)$$

$$LI = Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1)$$

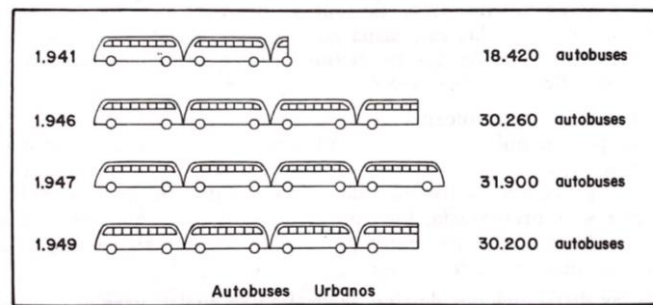
- Dibujar los “bigotes” hasta el valor máximo y mínimo o hasta los límites. En el caso de que existan valores fuera de los límites se considerarán valores atípicos.



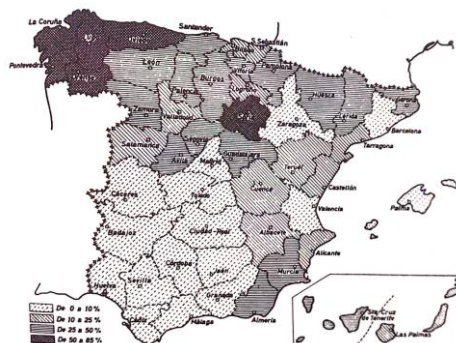
Gráfica 9. Diagrama de caja. Fuente: elaboración propia

- Pictograma

Este tipo de representaciones se centran en sustituir las barras del diagrama de barras por dibujos, pero deben incluir las frecuencias para que proporcionen la información correcta. Se suelen utilizar en medios de comunicación para captar la atención de un público determinado. Una variante de ese conjunto es el “cartograma” donde aparecen mapas con diferentes tratamientos que representan la variable. A continuación, se muestran dos ejemplos, el primero corresponde a un pictograma y el segundo a un cartograma.



Gráfica 10. Nº de autobuses urbanos por año. Fuente: Casas et al. (1986)



Gráfica 11. Residentes en entidades menores de 500 habitantes. Fuente: Barbancho (1994)

5 Fundamentación curricular

En los dos apartados siguientes se procede a hacer, por una parte, un análisis del currículo vigente y por otra, una comparativa de dos libros de texto escolares. Estos análisis y comparativas siempre irán enfocados a la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO, en concreto al bloque de Estadística que se trabaja en el presente TFM.

5.1. Análisis del currículo

En el siguiente apartado se procede a explicar brevemente en qué consiste el currículo y cómo está estructurado. En primer lugar, es necesario remarcar que una parte del currículo queda definida por un decreto estatal (REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre) y otra parte por una orden autonómica (Orden de 14 de julio de 2016).

En el REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, se dispone el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. En el Artículo 2 se presentan las definiciones de cada uno de los conceptos a los que se refiere el currículo y que se comentan más adelante:

- Currículo: regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas y etapas educativas.
- Objetivos: referentes relativos a los logros que el estudiante debe alcanzar al finalizar cada etapa, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificadas a tal fin.
- Competencias: capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.
- Contenidos: conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado.
- Estándares de aprendizaje evaluables: especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables.

- Criterios de evaluación: son el referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.
- Metodología didáctica: conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados.

Los objetivos que marca el currículo para el alumnado pueden ser de dos tipos. Pueden ser objetivos de etapa, recogidos en el artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, del 26 de diciembre, o de área, recogidos en la Orden del 14 de julio de 2016.

Los objetivos de etapa que marca la norma están referidos a todos los objetivos generales que debe cumplir el alumnado en su paso por la ESO. Son los siguientes:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreiciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Los objetivos de área recogidos en la Orden del 14 de julio de 2016 se refieren a los objetivos que se pretenden conseguir en una materia en concreto. Los objetivos marcados para la asignatura “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” de 4º de ESO son los siguientes:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis

de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las Matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las Matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.



A toda esta serie de objetivos sería necesario añadirle, además, los objetivos didácticos particulares que establece cada profesor para la asignatura que imparte. Como se puede apreciar son muchos los objetivos que debe alcanzar el alumnado en diferentes tiempos y que el profesor debe atender para que consigan sus logros.

En cuanto a los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, quedan recogidos en Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre para los bloques de contenidos de cada asignatura. En esta asignatura hay cinco bloques:

- Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas
- Bloque 2. Números y Álgebra
- Bloque 3. Geometría
- Bloque 4. Funciones
- Bloque 5. Estadística y probabilidad

En concreto en la siguiente tabla se recoge el Bloque 5. Estadística y Probabilidad:

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento. Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la Estadística. Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la	1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas. 2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias. 3. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación. 4. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas	1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación. 1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos. 1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. 1.4. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. 1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. 1.6. Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno. 2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias. 2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia. 2.3. Resuelve problemas sencillos



<p>correlación</p>		<p>asociados a la probabilidad condicionada. 2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas. 3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, cuantificar y analizar situaciones relacionadas con el azar. 4.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos estadísticos. 4.2. Representa datos mediante tablas y gráficos estadísticos utilizando los medios tecnológicos más adecuados. 4.3. Calcula e interpreta los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador). 4.4. Selecciona una muestra aleatoria y valora la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas. 4.5. Representa diagramas de dispersión e interpreta la relación existente entre las variables.</p>
--------------------	--	--

Tabla 17. *Bloque 5. Estadística y Probabilidad*. Fuente: adaptado del Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre.

Las competencias vienen recogidas en la Orden de 14 de julio de 2016, donde están referenciadas a cada criterio de evaluación (se desarrollan en el apartado 6.4.2 de este TFM). Para los criterios de evaluación anteriores, tenemos las siguientes:

- Criterio 1:
 - CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
 - CAA: Aprender a aprender.
 - SIEP: Sentido de la iniciativa y el espíritu emprendedor.
- Criterio 2:
 - CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
 - CAA: Aprender a aprender.
- Criterio 3:
 - CCL: Comunicación lingüística.
 - CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
 - CD: Competencia digital.

- CAA: Aprender a aprender.
- CSC: Competencias sociales y cívicas.
- SIEP: Sentido de la iniciativa y el espíritu emprendedor.
- Criterio 4:
 - CCL: Comunicación lingüística.
 - CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
 - CD: Competencia digital.
 - CAA: Aprender a aprender.
 - SIEP: Sentido de la iniciativa y el espíritu emprendedor.

Por último, en el artículo 4 de la Orden de 14 de julio de 2016, se hacen recomendaciones sobre la metodología a seguir donde se destaca que debe surgir del profesorado que debe orientar y guiar al alumnado, debe de fomentarse el enfoque interdisciplinar, la lectura, el interés del alumnado por la asignatura, etc.

5.2. Análisis de libros de texto

Aunque los avances tecnológicos están propiciando cada vez más que se pueda encontrar materiales didácticos de buena calidad en la red, desde actividades a explicaciones de docentes en vídeo, continúa siendo indispensable el uso del libro de texto en los centros educativos. El libro de texto sigue ayudando al alumnado a modo de guía en su aprendizaje y muchos de los docentes lo siguen usando como apoyo a sus clases además de las nuevas plataformas como *Google Classroom*.

A continuación, se realizará una comparativa de la estructura general de dos libros de texto de la asignatura “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” de 4º de ESO y posteriormente se analizará la estructura de las unidades pertenecientes al bloque de Estadística en relación al currículo mencionado anteriormente. El primero de los libros pertenece a la editorial Anaya, el segundo pertenece a Oxford:

- Cólera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I., y Cólera Cañas, R. (2016). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*. 4ºESO. Grupo Anaya.
- de Lucas Benedicto, M., Peña Romano, M., Rey Fedriani, M. (2017). *Inicia Dual Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*. 4.º ESO. Oxford University Press.

José Antonio Barragán Franco

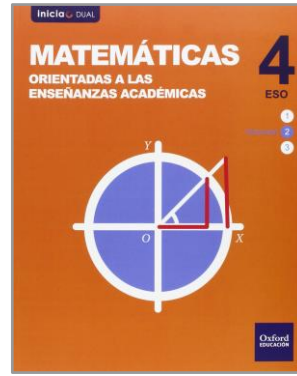
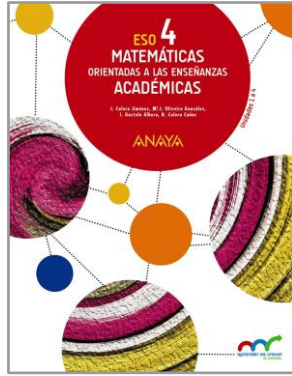


Figura 8. Portada libro de Anaya. Fuente: sitio web Figura 9. Portada libro de Oxford. Fuente: sitio web

En el cuadro siguiente se recogen las unidades o temas en que se estructura cada libro. Las unidades destacadas son las que desarrollan los contenidos del Bloque 5 del currículo que se mencionó en el punto anterior.

Editorial ANAYA	Editorial OXFORD
<ol style="list-style-type: none"> 1. Números reales 2. Polinomios y fracciones algebraicas 3. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas 4. Funciones. Características 5. Funciones elementales 6. Semejanza. Aplicaciones 7. Trigonometría 8. Geometría analítica 9. Estadística 10. Distribuciones bidimensionales 11. Combinatoria 12. Cálculo de probabilidades 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Números reales 2. Potencias y logaritmos. Problemas financieros 3. Polinomios y fracciones algebraicas 4. Ecuaciones e inecuaciones 5. Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones 6. Geometría del plano y del espacio 7. Trigonometría 8. Geometría analítica 9. Funciones 10. Límites de sucesiones y funciones 11. Funciones polinómicas y racionales 12. Funciones exponenciales logarítmicas y trigonométricas 13. Combinatoria 14. Probabilidad 15. Estadística

	*Lee y comprende las Matemáticas. Funciones, Estadística y Probabilidad.
--	---

Tabla 18. *Comparación de unidades de Anaya y Oxford.* Fuente: elaboración propia.

Se puede apreciar que el libro de Oxford contiene tres unidades más que el de Anaya, además de un punto extra que no se establece como unidad y que se comentará más adelante. Aunque los libros son diferentes, están hechos para un mismo currículo y cuentan con una estructura y unidades similares. No obstante, sigue habiendo unas diferencias notables entre ellos.

Dado que se va a comparar ambos libros entre ellos y en relación al currículo, es necesario comentar que el Bloque 1 de contenidos del currículo está más enfocado a trabajarse en conjunto con el resto de bloques y de forma transversal, ya que introduce unos contenidos que no constituyen conceptos matemáticos y se refieren a formas, métodos, planteamientos, etc., que el alumnado debe desarrollar.

Los contenidos del Bloque 2 del currículo vienen recogidos en las tres primeras unidades en el libro de Anaya, mientras que en el libro de Oxford recoge esos contenidos en las cinco primeras unidades. Aunque cuentan aproximadamente con los mismos contenidos, en el libro de Oxford están más desglosados en unidades diferentes y en algunos casos introduce contenido no curricular como el “interés simple o compuesto”. También es llamativo que ambos libros introducen “sistemas de ecuaciones”, en el caso de Anaya dentro de la unidad tres y en el caso de Oxford dedica la totalidad de la unidad cinco a este contenido. Sin embargo, este contenido no es estrictamente curricular para esta materia y en este curso ya que pertenece a la materia de 3º de ESO.

En cuanto al Bloque 3, en ambos libros, dichos contenidos quedan recogidos desde la unidad seis a la ocho, aunque tienen nombres diferentes. En concreto, en el libro de Anaya no vienen recogidos algunos contenidos curriculares como el cálculo de áreas y volúmenes, sino que se aborda tangencialmente y no en profundidad.

Los contenidos del Bloque 4 quedan cubiertos en el libro de Anaya en las unidades cuatro y cinco, mientras que en el libro de Oxford en las unidades desde las nueve hasta la doce. El libro de Oxford vuelve a segregar contenidos que Anaya trata en una única unidad. La unidad cuatro de Anaya y la nueve de Oxford presentan aproximadamente los mismos contenidos, mientras que, los contenidos de la unidad cinco de Anaya se

tratan en las unidades once y doce de Oxford. Por otra parte, Oxford introduce la unidad diez sobre límites de sucesiones y funciones, un contenido que está fuera del currículo ya que no se trabaja en la ESO.

Por último, aunque el Bloque 5 del currículo se analizará más adelante con mayor detenimiento, cabe destacar que existe en este bloque mayor disparidad en cuanto a cómo lo recogen ambos libros. En primer lugar, este bloque se podría dividir en Estadística y en probabilidad, que ambos libros separan en unidades diferentes. Anaya muestra en primer lugar la Estadística mientras que Oxford la probabilidad, es decir, lo presentan en orden opuesto. Por otra parte, en el libro de Anaya se le da importancia a las distribuciones bidimensionales que desarrolla en una unidad concreta mientras que Oxford añade un pliego de situaciones-problemas que tratan el contenido en una situación real, una noticia o un informe. En cuanto al currículo, Oxford no hace alusión explícita a las fases de un estudio estadístico y el libro de Anaya no trabaja las gráficas, aunque sí el diagrama de cajas y bigotes. En general, se puede observar que los contenidos del Bloque 5 son un poco abiertos y permiten introducir unos u otros conceptos matemáticos ya que se hace alusión explícita a muy pocos de ellos, permitiendo introducir herramientas más o menos complejas.

Por otra parte, es llamativo que los contenidos de Estadística ocupan en ambos libros las últimas unidades. Es lógico que ocupen ese lugar debido a que el bloque al que pertenecen también ocupa el último lugar en el currículo, sin embargo, otras unidades como las pertenecientes al Bloque 4 de funciones se encuentran situadas en un lugar muy anterior al que deberían ocupar si se siguiera el orden que marca involuntariamente el currículo. Es decir, se puede deducir que algunos libros dan prioridad a algunos contenidos, sin embargo, la Estadística queda relegada al último lugar en importancia ocupando las últimas unidades. Probablemente este hecho tenga relación con el apartado 3 sobre Fundamentación didáctica de este TFM donde se vio que algunos alumnos/as consideraban no haber dado cursos de Estadística, posiblemente porque al ser un bloque que se trata en la última etapa del curso a veces no da tiempo a verlo completamente.

A continuación, se detallarán más detenidamente las unidades de Estadística de ambos libros en relación al currículo.

En primer lugar, se analizará el libro de Anaya que como se ha explicado con anterioridad, dedica dos unidades a la Estadística, las unidades nueve y diez.

Las unidades de este libro están estructuradas de forma que muestran una pequeña reseña histórica al comienzo de cada unidad. Posteriormente, se pasa al contenido de la unidad, con algunos ejercicios y curiosidades o llamadas de atención, dedicando alguna parte a ejercicios resueltos. Cabe destacar que en comparación con lo que es usual, no contiene muchos ejercicios para resolver, aunque presenta en torno a cuarenta en la unidad nueve.

A continuación, se presenta un extracto de la tabla del Bloque 5. Estadística y probabilidad (Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre) donde se han dispuesto tan sólo los contenidos correspondientes a Estadística y no a probabilidad. Se presentan destacadas todos aquellos contenidos que el libro de Anaya no muestra en sus dos unidades o no lo hace de forma clara.

Contenidos
<ul style="list-style-type: none"> ● Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la Estadística. ● Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. ● Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. ● Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. ● Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. ● Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. ● Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación

Tabla 19. *Bloque 5. Estadística y Probabilidad*. Fuente: adaptado del Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre.

En general, el libro de Anaya trabaja prácticamente todos los contenidos con cierto sentido de utilidad, es decir, no presenta todos los contenidos en primera instancia, sino que va trabajando cada contenido de forma aislada, mostrando dónde se aplica cada herramienta o conocimiento. Además, al dedicarle dos temas a este bloque denota la importancia con que lo desarrolla. No obstante, sería importante introducir un punto con tipos de gráficas ya que suponen la base para la representación estadística y ayuda

a la comprensión de los datos. Por otra parte, dedica varios puntos a la “identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico” que podría unirse fácilmente a la “información que nos ofrecen los medios de comunicación” para tratar al menos tangencialmente ese contenido que queda desierto. También, como se ha visto en el apartado “Fundamentación didáctica” de este TFM muchos autores recomiendan poner en contexto las actividades que se realizan para mejorar el aprendizaje (tal y como se especifica en el Bloque 1 de “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” de cuarto curso de ESO, del Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre) sin embargo, el libro cuenta en su mayoría con problemas descontextualizados que son difícilmente comprensibles y no tienen un objetivo claro.

Por otra parte, el libro de Oxford cuenta con una estructura completamente diferente. Hace una pequeña introducción en cada unidad y pasa directamente al contenido de cada tema, es decir, no presenta reseña histórica como en el caso anterior. A simple vista, se puede observar que contiene multitud de ejercicios, ya que cada punto se desarrolla en una página y en la siguiente se exponen ejercicios relacionados con ese punto. En total, la unidad de Estadística contiene en torno a setenta problemas. Por último, al final de cada tema se presentan algunos apartados con actividades para profundizar o para poner los contenidos en contextos cotidianos.

A continuación, al igual que en el caso anterior, se presenta un extracto de la tabla del Bloque 5. Estadística y probabilidad (Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre) donde se disponen sólo los contenidos correspondientes a Estadística y no a probabilidad, y donde se muestran destacados todos aquellos contenidos que el libro de Oxford no muestra de forma clara en su unidad de Estadística.

Contenidos
<ul style="list-style-type: none"> ● Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la Estadística. ● Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. ● Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. ● Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. ● Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización.

- Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
- Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación

Tabla 20. *Bloque 5. Estadística y Probabilidad*. Fuente: adaptado del Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre.

Este libro sigue una estrategia diferente al anterior. Muestra todos los contenidos en primer lugar y posteriormente plantea ejercicios para resolver. Se podría decir que se adapta a las peticiones del alumnado si se tiene como premisa que el alumnado suele preguntar “¿esto para qué sirve?” o “¿qué hay que hacer en el ejercicio?”. En esa línea, en un apéndice externo al tema se plantean ejercicios para reflexionar sobre la Estadística en los medios de comunicación.

El mayor problema que presenta el libro es, al igual que en el caso anterior, que los problemas están descontextualizados o se intentan contextualizar de forma tangencial lo que provoca posiblemente que sean más complejos de entender. Tal es así que en ningún momento se trata el “estudio estadístico” y el mayor contacto entre conceptos matemáticos y realidad se realiza a través de análisis de noticias en medios de comunicación.

En general se puede decir que ambos libros se encuentran bastante ajustados a la norma a falta de algunos contenidos, y que las mayores diferencias entre ambos son el planteamiento de cómo se presentan y hacia dónde van enfocados los conocimientos de forma que se priorizan unos u otros contenidos. El problema que se puede encontrar en ambos es que los contenidos no están contextualizados como recomiendan los autores vistos en el punto tres y como sugiere la norma en el Bloque 1. Por otra parte, parece más adecuada la presentación de los contenidos en el libro de Oxford ya que permite buscar y encontrar conceptos de forma más rápida al encontrarse en un mismo punto y no estar supeditado a la aplicación del mismo.

6 Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica

6.1. Título

La unidad que se desarrolla a continuación tiene por título “Informe estadístico” y se desarrolla para la asignatura “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” de cuarto curso de la ESO.

6.2. Justificación

Como se ha visto en el apartado 3 muchos/as alumnos/as consideran no haber cursado materias de Estadística antes de comenzar estudios superiores, sin embargo, autores como Batanero (2001) señalan la necesidad de estudiar Estadística en los niveles educativos más bajos. El enorme desarrollo de las tecnologías informáticas y los medios de comunicación hacen inevitable la llegada continua de noticias y datos a cualquier individuo de la sociedad, y que este, se vea en la necesidad de filtrar la información. La Estadística es una disciplina básica que estudia el tratamiento de datos y dota al alumnado de herramientas para comprender fenómenos aleatorios y poder leer gráficas y tablas. Además, muchas disciplinas utilizan la Estadística a nivel avanzado o básico.

Por otra parte, la Estadística permite mostrar al alumnado, que generalmente ha trabajado fenómenos deterministas, que la mayoría de los sucesos que se estudian no se pueden determinar de forma exacta, aunque sí se pueden aproximar por un modelo. De esta forma, la Estadística permite trabajar el razonamiento crítico y la objetividad, así como algunos elementos transversales que marca la norma.

En relación a la asignatura que se trata, cabe señalar que se encuentra en el último curso de la Educación Secundaria Obligatoria, siendo este curso el que cierra la etapa. Es conveniente enfatizar estos contenidos por dos motivos. El primero, como se ha dicho anteriormente porque es un conocimiento básico para cualquier ciudadano dadas las condiciones de vida actuales, y el segundo, porque probablemente en cursos anteriores no hayan visto con detenimiento esta parte de la asignatura, haciendo hincapié en otros bloques de contenidos.

6.3. Contextualización del centro y del aula

La unidad didáctica que se diseña en este TFM se realiza para el centro concertado Colegio Pedro Poveda de Jaén.

El barrio en el que se ubica está situado dentro del casco histórico de Jaén, donde destacan las calles estrechas y casas antiguas que se van remodelando con el tiempo. Por otra parte, el barrio también engloba una zona de ensanche de la ciudad con nuevas viviendas diseminadas. Estas condiciones permiten que el entorno del centro se caracterice por ambiente familiar.

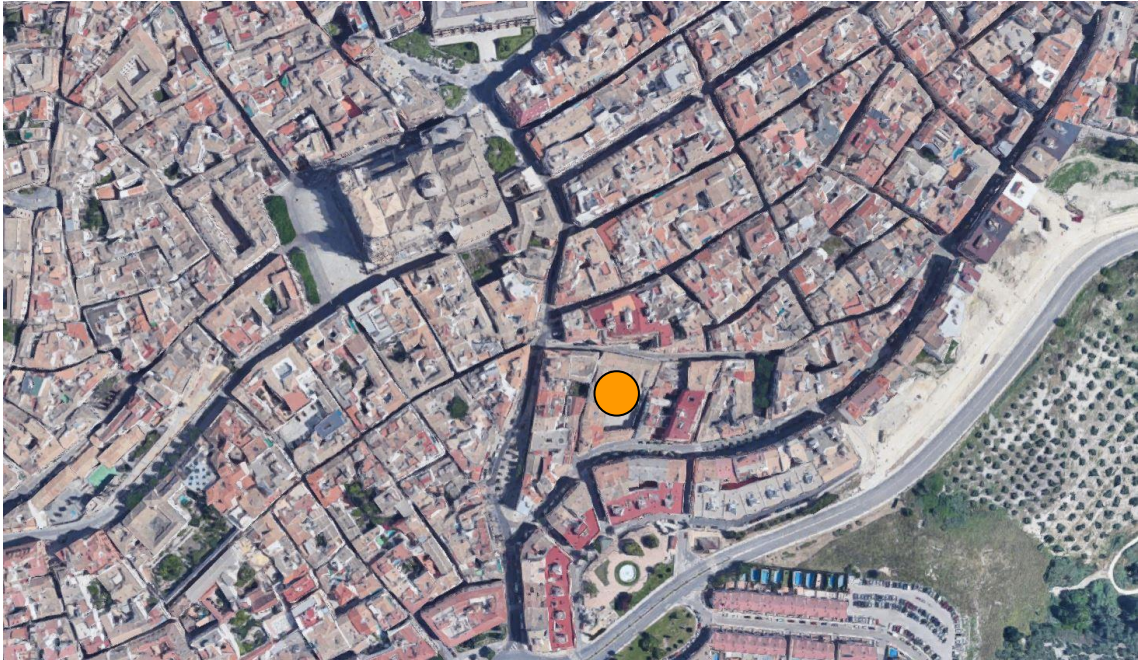


Figura 10. Localización del centro. Fuente: adaptado Google Maps.

Uno de los aspectos más llamativos del centro es que cuenta con un edificio antiguo y rehabilitado en varias ocasiones, a fin de adaptarlo a las necesidades educativas cambiantes. Este hecho implica que las funciones del edificio estén desordenadas dentro del mismo y puede resultar caótico.

En cuanto al tipo de alumnado que accede al centro, se puede decir, que la mayoría del alumnado procede de familias con un nivel socioeconómico medio-bajo, donde existen desde familias donde los familiares poseen títulos universitarios, hasta familias donde los tutores legales no poseen estudios superiores. Además, hay un porcentaje de familias donde la mujer no se ha incorporado al mundo laboral y se dedica a las labores del hogar. Como se puede deducir de estos datos, en el centro se encuentra un alumnado bastante heterogéneo.

Otro aspecto a destacar es que el centro cuenta con cursos de Educación Infantil, Primaria y Secundaria, con un total de 26 grupos (dos líneas por cada curso), y un total aproximado de 650 alumnos/as.

En cuanto al aula, la unidad se diseña para el curso de 4º de ESO enfocado a la rama científica con la asignatura “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas”. Este curso cuenta con 28 estudiantes donde hay 15 chicas y 13 chicos que residen en el barrio, es decir, ninguno proviene de un entorno exterior.

En general el grupo es muy participativo y se encuentra muy motivado, por lo que no será necesario encontrar métodos que fomenten la atención y el interés por la materia.

Por último, en cuanto a las necesidades educativas que presenta el alumnado del grupo se pueden destacar las siguientes:

- 1 alumna con trastorno en el lenguaje que presenta dificultades para la expresión oral y comprensión.
- 2 alumnos con talento simple en Matemáticas.

6.4. Elementos curriculares

A continuación, se detallan los elementos curriculares que marca la normativa respecto al Bloque 5 de la asignatura “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” de cuarto curso de la ESO. Es necesario remarcar que todos los elementos expuestos a continuación se trabajan en varias unidades didácticas dentro del “Bloque 5: Estadística y probabilidad” (Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre), y, por lo tanto, en el presente documento se trabajarán tan solo algunos de los elementos señalados en cada apartado ya que no se desarrollarán todas las unidades didácticas de dicho bloque.

6.4.1. Objetivos

Cada etapa de la educación cuenta con unos objetivos que el alumnado debe alcanzar para superarla, por otra parte, a estos objetivos hay que sumarle los objetivos de área que el alumnado debe alcanzar para superar satisfactoriamente la asignatura que se trate. El Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre define en su artículo 2 los objetivos como:

Referentes relativos a los logros que el estudiante debe alcanzar al finalizar cada etapa, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificadas para tal fin.

A continuación, se señalan los objetivos de etapa y área que marca el currículo.

6.4.1.1. Objetivos de etapa

Los objetivos de etapa de la Educación Secundaria Obligatoria vienen recogidos en el artículo 11 del Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre, donde se señalan los siguientes objetivos que el alumnado debe alcanzar para superar la etapa educativa.

O.E.1 Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

O.E.2 Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

O.E.3 Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

O.E.4 Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

O.E.5 Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

O.E.6 Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

O.E.7 Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

O.E.8 Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

O.E.9 Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

O.E.10 Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

O.E.11 Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

O.E.12 Apreiciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

6.4.1.2. Objetivos de área

Los objetivos de área de la asignatura “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” que se cursa en tercer y cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria vienen recogidos en la Orden del 14 de julio de 2016, donde se señala que dicha materia debe contribuir a desarrollar en el alumnado las capacidades que le permitan:

O.A.1 Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

O.A.2 Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

O.A.3 Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

O.A.4 Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

O.A.5 Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

O.A.6 Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

O.A.7 Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

O.A.8 Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

O.A.9 Manifiestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las Matemáticas.

O.A.10 Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas materias de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

O.A.11 Valorar las Matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.4.1.3. Objetivos didácticos

Además de los objetivos que marca la normativa, se pretenden conseguir otros objetivos didácticos concretos de la unidad que se desarrolla:

O.D.1. Comprender los principales procesos que se llevan a cabo en un estudio estadístico, así como sus fases y aplicaciones.

O.D.2. Conocer y aplicar a conjuntos de datos las principales medidas de centralización, así como comprender su significado y extraer conclusiones a partir de las mismas.

O.D.3. Conocer y aplicar a conjuntos de datos las principales medidas de dispersión, así como comprender su significado y extraer conclusiones a partir de las mismas.

O.D.4. Exponer conclusiones de un estudio a un público objetivo.

O.D.5. Comprender y analizar tablas y gráficas de un estudio estadístico

6.4.2. Competencias

El Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre define en su artículo 2 las competencias como:

Capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.

Estas competencias vienen recogidas en la Orden ECD/65/2015 del 21 de enero donde se explican pormenorizadamente. A continuación, se muestra un extracto explicativo de cada competencia recogida en la norma:

Comunicación lingüística (CCL): La competencia en comunicación lingüística es el resultado de la acción comunicativa dentro de prácticas sociales determinadas, en las cuales el individuo actúa con otros interlocutores y a través de textos en múltiples modalidades, formatos y soportes.

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT):

- La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto.
- Las competencias básicas en ciencia y tecnología son aquellas que proporcionan un acercamiento al mundo físico y a la interacción responsable con él desde acciones, tanto individuales como colectivas, orientadas a la conservación y mejora del medio natural, decisivas para la protección y mantenimiento de la calidad de vida y el progreso de los pueblos. Estas competencias contribuyen al desarrollo del pensamiento científico, pues incluyen la aplicación de los métodos propios de la racionalidad científica y las destrezas tecnológicas, que conducen a la adquisición de conocimientos, la contrastación de ideas y la aplicación de los descubrimientos al bienestar social.

Competencia digital (CD): La competencia digital es aquella que implica el uso creativo, crítico y seguro de las tecnologías de la información y la comunicación para alcanzar los objetivos relacionados con el trabajo, la empleabilidad, el aprendizaje, el uso del tiempo libre, la inclusión y participación en la sociedad.

Esta competencia supone, además de la adecuación a los cambios que introducen las nuevas tecnologías en la alfabetización, la lectura y la escritura, un conjunto nuevo de conocimientos, habilidades y actitudes necesarias hoy en día para ser competente en un entorno digital.

Aprender a aprender (CAA): La competencia de aprender a aprender es fundamental para el aprendizaje permanente que se produce a lo largo de la vida y que tiene lugar en distintos contextos formales, no formales e informales.

Esta competencia se caracteriza por la habilidad para iniciar, organizar y persistir en el aprendizaje. Esto exige, en primer lugar, la capacidad para motivarse por aprender. Esta motivación depende de que se genere la curiosidad y la necesidad de aprender, de que el estudiante se sienta protagonista del proceso y del resultado de su aprendizaje y, finalmente, de que llegue a alcanzar las metas de aprendizaje propuestas y, con ello, que se produzca en él una percepción de auto-eficacia. Todo lo anterior contribuye a motivar para abordar futuras tareas de aprendizaje.

Competencias sociales y cívicas (CSC): Las competencias sociales y cívicas implican la habilidad y capacidad para utilizar los conocimientos y actitudes sobre la sociedad, entendida desde las diferentes perspectivas, en su concepción dinámica, cambiante y compleja, para interpretar fenómenos y problemas sociales en contextos cada vez más diversificados; para elaborar respuestas, tomar decisiones y resolver conflictos, así como para interactuar con otras personas y grupos conforme a normas basadas en el respeto mutuo y en convicciones democráticas. Además de incluir acciones a un nivel más cercano y mediato al individuo como parte de una implicación cívica y social.

Sentido de la iniciativa y el espíritu emprendedor (SIEP): La competencia, sentido de iniciativa y espíritu emprendedor, implica la capacidad de transformar las ideas en actos. Ello significa adquirir conciencia de la situación a intervenir o resolver, y saber elegir, planificar y gestionar los conocimientos, destrezas o habilidades y actitudes necesarios con criterio propio, con el fin de alcanzar el objetivo previsto.

Conciencia y expresiones culturales (CEC): La competencia en conciencia y expresión cultural implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos.

6.4.3. Contenidos

El Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre define en su artículo 2 los contenidos del currículo como:

El conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias

y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado.

Los contenidos descritos en la norma para el Bloque 5: Estadística y probabilidad (ver Tabla 17) de cuarto curso de la ESO y que se desarrollan en esta unidad didáctica son los siguientes:

- a) Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la Estadística.
- b) Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.
- c) Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas.
- d) Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.
- e) Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización.
- f) Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
- g) Construcción e interpretación de diagramas de dispersión.
- h) Introducción a la correlación.

6.4.4. Metodología

El Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre define la metodología en su artículo 2 como:

Conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados.

La Orden del 14 de julio de 2016 para la asignatura “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” propone las siguientes orientaciones que el profesorado debe seguir para que el alumnado alcance los objetivos y adquiera las competencias clave vistas con antelación:

En el bloque de Estadística y probabilidad, las actividades que se lleven a cabo deben capacitar para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de esta naturaleza. Se deben obtener valores representativos de una muestra y profundizar en la utilización de diagramas y gráficos más complejos que en cursos anteriores para sacar conclusiones, utilizando hojas de cálculo, recursos digitales interactivos y/o software específico o de “la nube”. Los juegos de azar proporcionan ejemplos para ampliar la noción de probabilidad y conceptos asociados, utilizando técnicas de recuento para calcular las

probabilidades de un suceso. El uso de materiales cotidianos como revistas y artículos de prensa facilitan el estudio de tablas y gráficas estadísticas.

Para todos los bloques, hay que destacar la importancia del uso de juegos matemáticos como cartas (chinchón algebraico, barajas de funciones...), dominós (de áreas, de ecuaciones...), bingos (de números reales, de operaciones...), juegos de mesa (tres en raya algebraico, cuatro en raya polinómico...), ruletas y dados.

Para esta unidad se propone el uso de diferentes metodologías que refuercen determinados aspectos del aprendizaje. Batanero y Díaz (2011) señalan que en el aprendizaje de Estadística hay que diferenciar entre conocer contenidos y ser capaz de aplicar determinados conocimientos. En relación a esto, se plantea una metodología tradicional con el fin de afianzar determinados contenidos, y por otro lado, se plantea una metodología por proyectos para aplicar los contenidos de forma realista.

La metodología tradicional es aquella que se ha dado en las últimas décadas, donde el profesor se presenta como portador del conocimiento que imparte al alumnado mientras los alumnos y alumnas reciben estos contenidos de forma pasiva. La metodología por proyectos en cambio plantea la reorganización de los elementos presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En esta metodología, el conocimiento ya no se encuentra en el profesor, sino en los libros de texto, publicaciones, artículos, web, etc., y el profesor pasa a convertirse en guía del conocimiento de cada alumno/a, convirtiéndose el alumnado en el responsable de su aprendizaje.

Batanero y Díaz (2011) recalcan que la Estadística es “inseparable de su uso” y añaden varios argumentos positivos de la implementación de la metodología por proyectos en la enseñanza de la Estadística: los proyectos permiten contextualizar la Estadística; permiten trabajar con datos reales e introducir problemas como la medición, precisión, etc.; motivan al alumnado; no se reduce la Estadística a cálculos numéricos.

De esta forma, para esta unidad didáctica se plantean sesiones con una metodología tradicional donde se explicarán conceptos básicos, y una metodología por proyectos donde cada grupo de estudiantes realizará un informe estadístico sobre cuestiones elegidas por el alumnado, donde el profesor irá guiando al grupo en su aprendizaje. Cada sesión seguirá la siguiente estructura general:

Sesión tipo (55 min aprox.)		
Actividades	Metodología	Duración (min)
<ul style="list-style-type: none"> ● Presentación de contenido nuevo de la unidad. 	Tradicional	10-15
<ul style="list-style-type: none"> ● Ejemplos del nuevo contenido y solución de dudas. 		5-10
<ul style="list-style-type: none"> ● Corrección de actividades de trabajo en casa. 		5-15
<ul style="list-style-type: none"> ● Trabajo autónomo por grupos (el profesor pasa a revisar el trabajo que realiza cada grupo) 	Proyectos/ Cooperativo	25

Tabla 21. *Sesión tipo*. Fuente: elaboración propia.

Es necesario concretar que esta metodología es general y en la actualidad no se podría realizar debido a las limitaciones de contactos entre el alumnado por la pandemia de Covid-19. Estas limitaciones hacen inviable la creación de grupos que estén en continuo contacto para realizar trabajos. No obstante, es posible adaptar dicha metodología y realizar los proyectos mediante archivos en la nube como Google Docs, Google Sheets, Google Slides, etc., que permiten trabajar al mismo tiempo varios usuarios en un mismo archivo. Por otra parte, existen plataformas que permiten hacer reuniones en línea para poder desarrollar el trabajo desde casa y que facilitan la comunicación entre los componentes de los grupos.

Con esto nos referimos a que es asequible el desarrollo de esta unidad didáctica a través de la metodología propuesta, o adaptada a la limitación de contactos sin mucha complejidad, ya que, se pretende el uso de ordenadores o tablets en el aula. De esta forma se trabaja la competencia digital (CD), así como otros elementos que se desarrollan el apartado 6.5.

6.4.5. Temporalización

La asignatura “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” cuenta con 4 horas semanales según señala la Orden del 14 de julio de 2016 en su Anexo IV. Para la unidad didáctica que se desarrolla, se establecen 9 sesiones por lo que se realizará en al menos tres semanas. A continuación, se desarrollan estas sesiones.

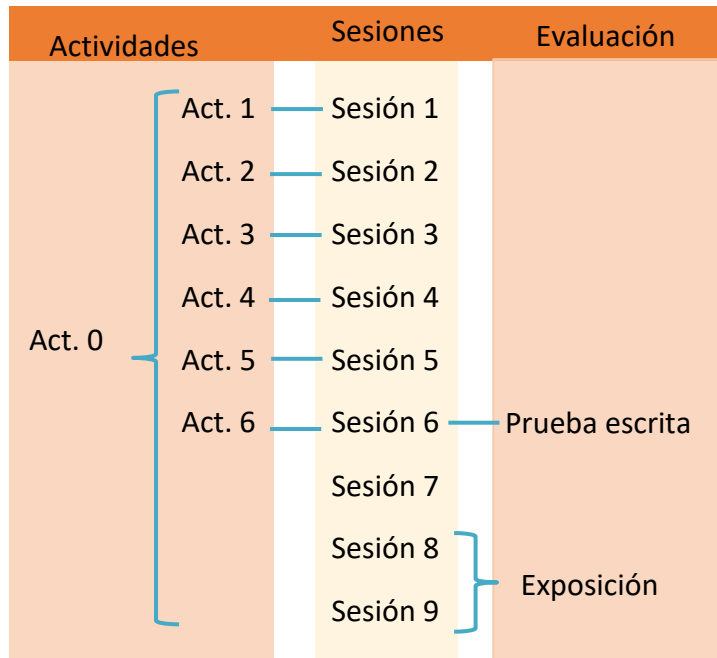


Figura 11. Esquema de desarrollo de la unidad didáctica. Fuente: elaboración propia.

Sesión 1		
Actividades	Metodología	Duración (min)
<ul style="list-style-type: none"> ● Repaso sobre los contenidos estadísticos de cursos anteriores. Ejemplificación. ● Explicación por parte del profesor de nuevo contenido “El estudio estadístico”. ● Presentación del trabajo (Act.0). Es importante recalcar en esta sesión la urgencia de que todos los grupos encuentren una temática lo antes posible para tener tiempo para desarrollar la actividad. 	Clase magistral	55
Trabajo no presencial	Act.0/Act.1	
Objetivos	O.E.2/ O.E.5/ O.E.7/ O.A.1/ O.A.2/ O.A.3/ O.A.4/ O.A.6/ O.A.9/ O.D.1/ O.D.2/ O.D.3/ O.D.4/ O.D.5	
Competencias	CCL/ CMCT/ CAA/ SIEP/ CSC/ CD	
Recursos	Aula/ Pizarra/ Herramientas de escritura / Papel/ Calculadora /Libro de texto/ Profesor/ Alumnado/ Proyector/ Ordenador del profesorado	

Criterios de evaluación	-
-------------------------	---

Tabla 22. Sesión 1. Fuente: elaboración propia.

Sesión 2		
Organización de la sesión	Metodología	Duración (min)
<ul style="list-style-type: none"> Explicación por parte del profesor de nuevo contenido "Gráficas estadísticas". 	Clase magistral	30
<ul style="list-style-type: none"> Corrección Act.1. 	Resolución de actividades	
<ul style="list-style-type: none"> Trabajo autónomo por grupos (Act.0). El profesor revisa el trabajo que realiza cada grupo. En esta sesión se trabaja la elección de la temática y la recogida de datos. Sería conveniente que ningún grupo terminara la sesión sin temática puesto que tendrían poco tiempo para realizar la Act. 0. 	Proyectos/ Cooperativo	25
Trabajo no presencial	Act. 0/Act. 2	
Objetivos	O.E.2/ O.E.5/ O.E.7/ O.A.1/ O.A.2/ O.A.3/ O.A.4/ O.A.6/ O.A.9/ O.D.1/ O.D.5	
Competencias	CCL/ CMCT/ CAA/ SIEP/ CSC/ CD	
Recursos	Aula/ Pizarra/ Herramientas de escritura / Papel/ Calculadora /Libro de texto/ Profesor/ Alumnado/ Ordenadores portátiles o tablets/Conexión web	
Criterios de evaluación	-	

Tabla 23. Sesión 2. Fuente: elaboración propia.

Sesión 3		
Organización de la sesión	Metodología	Duración (min)

<ul style="list-style-type: none"> Explicación por parte del profesor de nuevo contenido “Medidas de centralización”. 	Clase magistral	30
<ul style="list-style-type: none"> Corrección Act.2. 	Resolución de actividades	
<ul style="list-style-type: none"> Trabajo autónomo por grupos (Act.0). El profesor revisa el trabajo que realiza cada grupo. En esta sesión se trabaja la recogida de datos. Deberían de plantearse a partir de esta sesión las encuestas que se van a realizar en el caso de que fueran necesarias. 	Proyectos/ Cooperativo	25
Trabajo no presencial	Act. 0/Act. 3	
Objetivos	O.E.2/ O.E.7/ O.A.1/ O.A.2/ O.A.3/ O.A.4/ O.A.6/ O.A.9/ O.D.1/ O.D.2	
Competencias	CCL/ CMCT/ CAA/ SIEP/ CSC/ CD	
Recursos	Aula/ Pizarra/ Herramientas de escritura / Papel/ Calculadora/ Libro de texto/ Profesor/ Alumnado/ Ordenadores portátiles o tablets/ Conexión web	
Criterios de evaluación	-	

Tabla 24. Sesión 3. Fuente: elaboración propia.

Sesión 4		
Organización de la sesión	Metodología	Duración (min)
<ul style="list-style-type: none"> Explicación por parte del profesor de nuevo contenido “Medidas de dispersión”. 	Clase magistral	30
<ul style="list-style-type: none"> Corrección Act.3. 	Resolución de actividades	
<ul style="list-style-type: none"> Trabajo autónomo por grupos (Act.0). El profesor revisa el trabajo que realiza cada grupo. En esta sesión se trabaja la recogida de datos y debe quedar claro definitivamente el proceso para la recolección de datos y los posibles 	Proyectos/ Cooperativo	25

problemas que pueden surgir.			
Trabajo no presencial	Act.0/ Act.4		
Objetivos	O.E.2/ O.E.7/ O.A.1/ O.A.2/ O.A.3/ O.A.4/ O.A.6/ O.A.9/ O.D.1/ O.D.3		
Competencias	CCL/ CMCT/ CAA/ SIEP/ CSC/ CD		
Recursos	Aula/ Pizarra/ Herramientas de escritura / Papel/ Calculadora/ Libro de texto/ Profesor/ Alumnado/ Ordenadores portátiles o tablets /Conexión web		
Criterios de evaluación	-		

Tabla 25. Sesión 4. Fuente: elaboración propia.

Sesión 5			
Organización de la sesión		Metodología	Duración (min)
<ul style="list-style-type: none"> Explicación por parte del profesor de nuevo contenido "Variables bidimensionales". 		Clase magistral	30
<ul style="list-style-type: none"> Corrección Act.4. 		Resolución de actividades	
<ul style="list-style-type: none"> Repaso dudas generales antes de la prueba. 			
<ul style="list-style-type: none"> Trabajo autónomo por grupos (Act.0). El profesor revisa el trabajo que realiza cada grupo. En esta sesión se trabaja el análisis de datos. Se debe plantear qué medidas son las más interesantes a estudiar y el trabajo con hojas de cálculo. 		Proyectos/ Cooperativo	25
Trabajo no presencial	Act.0/ Act.5/ Act.6		
Objetivos	O.E.2/ O.E.7/ O.A.1/ O.A.2/ O.A.3/ O.A.4/ O.A.6/ O.A.9/ O.D.1/ O.D.5		
Competencias	CCL/ CMCT/ CAA/ SIEP/ CSC/ CD		
Recursos	Aula/ Pizarra/ Herramientas de escritura / Papel/ Calculadora/ Libro de texto/ Profesor/ Alumnado/		

	Ordenadores portátiles o tablets/ Software Excel o similar/ Conexión web
--	--

Tabla 26. Sesión 5. Fuente: elaboración propia.

Sesión 6		
Organización de la sesión	Metodología	Duración (min)
<ul style="list-style-type: none"> Prueba escrita. 	-	30
<ul style="list-style-type: none"> Trabajo autónomo por grupos (Act.0). El profesor revisa el trabajo que realiza cada grupo. En esta sesión se trabaja el análisis de datos y se debe empezar a entrever posibles conclusiones y significados de los análisis. 	Proyectos/ Cooperativo	25
Trabajo no presencial	Act.0	
Objetivos	O.E.2/ O.E.7/ O.A.1/ O.A.2/ O.A.3/ O.A.4/ O.A.6/ O.A.9/ O.D.1	
Competencias	CCL/ CMCT/ CAA/ SIEP/ CSC/ CD	
Recursos	Aula/ Herramientas de escritura / Papel/ Calculadora/ Profesor/ Alumnado/ Ordenadores portátiles o tablets/ Software Excel o similar/Conexión web	
Criterios de evaluación	C.E.5.4	

Tabla 27. Sesión 6. Fuente: elaboración propia.

Sesión 7		
Organización de la sesión	Metodología	Duración (min)
<ul style="list-style-type: none"> Corrección Act.5 y 6. 	Resolución de actividades	20
<ul style="list-style-type: none"> Resolución de dudas generales en relación al proyecto (Act.0). 		

<ul style="list-style-type: none"> Trabajo autónomo por grupos (Act. 0). El profesor revisa el trabajo que realiza cada grupo. En esta sesión se trabajan las conclusiones del trabajo y se orienta para la exposición del mismo. 	Proyectos/ Cooperativo	35
Trabajo no presencial	Act.0	
Objetivos	O.E.2/ O.E.7/ O.A.1/ O.A.2/ O.A.3/ O.A.4/ O.A.6/ O.A.9/ O.D.1	
Competencias	CCL/ CMCT/ CAA/ SIEP/ CSC/ CD	
Recursos	Aula/ Pizarra/ Herramientas de escritura / Papel/ Calculadora/ /Libro de texto/ Profesor/ Alumnado/ Ordenadores portátiles o tablets/ Software PowerPoint, Word u otros o similares/Conexión web	
Criterios de evaluación	-	

Tabla 28. Sesión 7. Fuente: elaboración propia.

Sesión 8		
Organización de la sesión	Metodología	Duración (min)
<ul style="list-style-type: none"> Entrega (Act.0). 	-	-
<ul style="list-style-type: none"> Exposición de los trabajos. (Act.0). 	-	55
Trabajo no presencial	-	
Objetivos	O.E.5/ O.E.7/ O.A.1/ O.A.6/ O.A.9/ O.D.1/ O.D.4/ O.D.5	
Competencias	CCL/ CMCT/ CAA/ SIEP/ CSC/ CD	
Recursos	Aula/ Pizarra/ Herramientas de escritura / Papel/ Profesor/ Alumnado/ Proyector/ Ordenador del profesorado	
Criterios de evaluación	C.E.1.1/ C.E.1.5/ C.E.1.6 /C.E.1.9 /C.E.1.11/ C.E.5.3/ C.E.5.4	

Tabla 29. Sesión 8. Fuente: elaboración propia.

Sesión 9		
Organización de la sesión	Metodología	Duración (min)
<ul style="list-style-type: none"> Exposición de los trabajos (Act.0). 	-	40
<ul style="list-style-type: none"> Pequeño debate sobre la experiencia y conclusiones. 	-	15
Trabajo no presencial	-	
Objetivos	O.E.5/ O.E.7/ O.A.1/ O.A.6/ O.A.9/ O.D.1/ O.D.4/ O.D.5	
Competencias	CCL/ CMCT/ CAA/ SIEP/ CSC/ CD	
Recursos	Aula/ Pizarra/ Herramientas de escritura / Papel/ Profesor/ Alumnado/ Proyector/ Ordenador del profesorado	
Criterios de evaluación	C.E.1.1/ C.E.1.5/ C.E.1.6 /C.E.1.9 /C.E.1.11/ C.E.5.3/ C.E.5.4	

Tabla 30. Sesión 9. Fuente: elaboración propia.

6.4.6. Recursos

Para el desarrollo de las actividades propuestas en las diferentes sesiones se utilizarán una serie de materiales que se enumeran a continuación:

- Ambiental
 - Aula del grupo (4º curso).
- Básico
 - Pizarra.
 - Herramientas de escritura como lápices, bolígrafos, etc.
 - Papel o cuaderno cuadriculado.
 - Calculadora.
- Impreso
 - Libro de texto: Inicia Dual Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 4 º ESO Oxford University Press.
- Tecnológico
 - Ordenadores portátiles propiedad del centro.
 - Opcionalmente tablets u ordenadores propiedad del alumnado.

- Proyector/ordenador del profesorado.
- Software Excel o similar.
- Software Power Point o similar.
- Software Word o similar.
- Conexión web.
- Humano
 - Profesor/a de la asignatura
 - Alumnado
- Recursos web
 - Instituto Nacional de Estadística. (2021). <https://www.ine.es/>
 - Global Footprint Network. (s.f.) Ecological Footprint? <https://www.footprintcalculator.org/>
 - Caro, R. (2014). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO. Capítulo 13: Estadística*. LibrosMareaVede.tk. Recuperado de: https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4B/13_Estadistica_4B.pdf

6.4.7. Actividades

A continuación, se muestran las actividades programadas durante las sesiones en las que se realiza la actividad. En el Anexo I se recogen los ejercicios programados para cada actividad.

Act. 0	Sesión	1 a 9
Criterios de evaluación		C.E.1.1/ C.E.1.5/ C.E.1.6 / C.E.1.9/ C.E.1.11/ C.E.5.3/ C.E.5.4
Competencias		CCL/ CMCT/ CAA/ SIEP/ CSC/ CD
Objetivos		O.E.2/ O.E.5/ O.E.7/ O.A.1/ O.A.2/ O.A.3/ O.A.4/ O.A.6/ O.A.9/ O.D.1/ O.D.2/ O.D.3/ O.D.4/ O.D.5
<p>La actividad se plantea como trabajo presencial y no presencial entre la sesión 1 y 9 donde cada pareja de alumnos/as desarrollará un informe estadístico sobre un tema a elección del alumnado y consensuado con el profesorado. A continuación, se muestran algunos temas de ejemplo enfocados a desarrollar elementos curriculares complementarios del apartado 6.5 de este TFM, que se puede proponer al alumnado para realizarlos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Sobre la sostenibilidad: 		<p>Ejercicios</p> <p>Para esta actividad no se realizan ejercicios.</p>

- La huella ecológica en la ciudad/barrio.

Esta temática iría enfocada a comprender conceptos que giran en torno a la sostenibilidad y hacer un estudio local sobre los mismos. A partir de un recurso web (Global Footprint Network, s.f.) que consiste en una calculadora de huella ecológica se puede realizar un estudio sobre la huella ecológica de un lugar. Además, el recurso cuenta con bastante información sobre cómo reducir la huella y por qué motivos. Esto permite crear directrices que se deberían seguir para mejorar el entorno y ser más sostenible.

Uno de los aspectos a tener en cuenta en este proyecto es que la calculadora web realiza varias preguntas a modo de encuesta y a partir de esos datos, nos da una respuesta. El alumnado que realizase este proyecto tendría que adaptar las preguntas de la calculadora web debido a que algunas preguntas son confusas y establecer unos criterios para unificar las respuestas de los encuestados.

- El reciclaje en la ciudad/barrio.

En la misma línea que el tema anterior, se podría realizar un estudio sobre los desechos que se producen en un lugar y dónde acaban, si se reciclan, se reutilizan, finalizan en un vertedero, etc.

El objetivo de este proyecto al igual que en el caso anterior es encontrar formas de mejorar aspectos concretos del entorno.

- Sobre las redes sociales:

- Las redes sociales en la sociedad.

Este proyecto consiste en estudiar el perfil de los usuarios de redes sociales: comprender los usos que les da la población, qué redes se utilizan más y por qué, y cuánto tiempo se utilizan.

El objetivo final es que el alumnado comprenda el desarrollo de estas tecnologías y cómo funcionan en la sociedad, así como comprender que aspectos son beneficiosos y donde pueden llegar a ser peligrosas.

- El perfil de usuario y las ventas, detección de engaños.

Las redes sociales se han convertido en herramientas de ventas para muchos usuarios y empresas, y es usual que influencers promocionen productos. Este proyecto va encaminado a descubrir cómo funciona una red social desde una perspectiva empresarial, y

en qué casos sería adecuado invertir o no, así como en la detección de perfiles engañosos.

En este caso la recopilación de datos se centraría en varios perfiles abiertos preseleccionados que podrían pertenecer a actores o actrices, cantantes, artistas, etc. De todos estos perfiles se recogerían una serie de datos de forma sistemática (nº de productos vendidos, tipos de productos, temáticas de las publicaciones, likes, comentarios, tipos de comentarios, etc.), y se obtendrían conclusiones a partir de ellos, como qué productos se patrocinan más, si pueden ser más rentables otros productos... Además, sería conveniente señalar la existencia de perfiles que podrían ser falsos y sus consecuencias.

El estudio que se plantea en cualquiera de los casos debe ir enfocado a dar respuesta a una o varias preguntas mediante la Estadística. Debe contar con al menos cuatro puntos diferenciados:

- Planificación
Explicación del tema elegido, a qué preguntas se le pretenden dar respuestas, y qué variables se van a estudiar.
- Recogida de datos
Pueden darse dos casos dependiendo de la pregunta que se planteen. El primero es que los datos necesarios se encuentren en una base de datos a la que se pueda acceder, y el segundo es que los datos no existan y deban de recolectarse mediante encuestas u otros procedimientos.
En ambos casos es necesario explicar los procedimientos por los que se han obtenido los datos, y qué ventajas o inconvenientes pueden tener.
- Análisis de datos
En este punto se deben analizar los datos mediante las herramientas vistas en clase y consensuar con el profesorado el nivel de profundidad dependiendo del tema de elección. Es necesario tabular los datos en una tabla de frecuencias donde aparezcan las frecuencias absolutas y relativas, acumuladas y no acumuladas, así como crear gráficas que muestren de forma clara las características de la variable de estudio. Por otra parte, también se deben analizar las medidas de centralización y posición estudiadas a lo largo de la unidad, y analizar algunas relaciones entre las variables estudiadas.

<ul style="list-style-type: none"> ● Conclusiones Realización de un informe que recoja todos los puntos anteriores y exponga unas conclusiones sobre la variable o variables estudiadas. Exposición del trabajo realizado al grupo de clase. 	
---	--

Tabla 31. *Actividad 0*. Fuente: elaboración propia.

Act. 1	Sesión	1 y 2
Criterios de evaluación		No evaluable
Competencias		-
Objetivos		O.E.2/ O.A.1/ O.A.3/ O.A.4 / O.A.6/ O.A.9/ O.D.5
<p>La actividad se plantea como trabajo no presencial entre la sesión 1 y 2 donde cada alumno/a trabajará de forma individual. En esta actividad se trabajan los conceptos básicos de la Estadística, resumiendo gran parte del contenido de otros cursos y haciendo un recordatorio:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Población, muestra, individuo ● Variable estadística <ul style="list-style-type: none"> ○ Cualitativa ○ Cuantitativa (discreta /continua) ● Tabulación de datos (tabla de frecuencias) <ul style="list-style-type: none"> ○ Frecuencia absoluta ○ Frecuencia relativa ○ Frecuencia absoluta acumulada ○ Frecuencia absoluta relativa 		<p>Ejercicios</p> <p>E.1.1</p> <p>E.1.2</p>

Tabla 32. *Actividad 1*. Fuente: elaboración propia.

Act. 2	Sesión	2 y 3
Criterios de evaluación		No evaluable
Competencias		-
Objetivos		O.E.2/ O.A.1/ O.A.3/ O.A.4 / O.A.6/ O.A.9/

O.D.5	
<p>La actividad se plantea como trabajo no presencial entre la sesión 2 y 3 donde cada alumno/a trabajará de forma individual.</p> <p>En esta actividad se trabajan los gráficos estadísticos como forma eficaz de visualizar los datos y extraer conclusiones:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Diagrama de barras ● Diagrama de sectores ● Histogramas ● Otros (pictogramas) 	<p>Ejercicios</p> <p>E.2.1</p> <p>E.2.2</p>

Tabla 33. *Actividad 2*. Fuente: elaboración propia.

Act. 3	Sesión	3 y 4
Criterios de evaluación		No evaluable
Competencias		-
Objetivos		O.E.2/ O.A.1/ O.A.3/ O.A.4 / O.A.6/ O.A.9/ O.D.2
<p>La actividad se plantea como trabajo no presencial entre la sesión 3 y 4 donde cada alumno/a trabajará de forma individual.</p> <p>En esta actividad se trabajan las medidas de centralización más comunes:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Media aritmética ● Moda/intervalo modal ● Mediana/intervalo mediano ● Cuantiles (cuartiles y percentiles) ● Diagrama de caja y bigotes 		<p>Ejercicios</p> <p>E.3.1</p> <p>E.3.2</p>

Tabla 34. *Actividad 3*. Fuente: elaboración propia.

Act. 4	Sesión	4 y 5
Criterios de evaluación		No evaluable
Competencias		-
Objetivos		O.E.2/ O.A.1/ O.A.3/ O.A.4 / O.A.6/ O.A.9/ O.D.3

<p>La actividad se plantea como trabajo no presencial entre la sesión 4 y 5 donde cada alumno/a trabajará de forma individual.</p> <p>En esta actividad se trabajan las medidas de dispersión más comunes:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Rango o recorrido ● Desviación media ● Desviación estándar o típica ● Varianza ● Coeficiente de variación de Pearson 	<p>Ejercicios</p> <p>E.4.1</p> <p>E.4.2</p>
---	--

Tabla 35. *Actividad 4*. Fuente: elaboración propia.

Act. 5	Sesión	5 y 7
Criterios de evaluación		No evaluable
Competencias		-
Objetivos		O.E.2/ O.A.1/ O.A.3/ O.A.4 / O.A.6/ O.A.9/ O.D.5
<p>La actividad se plantea como trabajo no presencial entre la sesión 5 y 7 donde cada alumno/a trabajará de forma individual.</p> <p>En esta actividad se trabajan las variables bidimensionales:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Correlación ● Diagrama de dispersión ● Covarianza 	<p>Ejercicios</p> <p>E.5.1</p> <p>E.5.2</p>	

Tabla 36. *Actividad 5*. Fuente: elaboración propia.

Act. 6	Sesión	5 y 7
Criterios de evaluación		No evaluable
Competencias		-
Objetivos		O.E.2/ O.A.1/ O.A.3/ O.A.4 / O.A.6/ O.A.9/ O.D.2/ O.D.3/ O.D.5
<p>La actividad se plantea como trabajo no presencial entre la sesión 5 y 7 donde cada alumno/a trabajará de forma individual.</p> <p>En esta actividad se pretende realizar un resumen del contenido de la unidad, por lo que se tratan la mayoría de los contenidos que desarrollan las actividades 1,2,3 y 4 anteriores.</p>		<p>Ejercicios</p> <p>E.6.1</p>

Tabla 37. *Actividad 6*. Fuente: elaboración propia.

6.4.8. Evaluación

La evaluación del alumnado permite conocer si este ha alcanzado los objetivos marcados o no. En el artículo 20 del Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre se especifica que “los referentes para la comprobación del grado de adquisición de las competencias y el logro de los objetivos de la etapa en las evaluaciones continua y final de las materias de los bloques de asignaturas troncales y específicas, serán los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que figuran en los anexos I y II a este real decreto”, es decir, es necesario evaluar a través de los criterios y estándares de aprendizaje evaluables que cita la norma.

El Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre define en su artículo 2 los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables:

Criterios de evaluación: El referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.

Estándares de aprendizaje evaluables: Especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables.

Para los contenidos que se trabajan en la unidad didáctica que se desarrolla en el presente TFM, se establecen los criterios y estándares de aprendizaje evaluables (Anexo VI) pertenecientes a los Bloques 1 y 5 del Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre para la asignatura que tratamos.

- **Instrumentos de evaluación**

Los instrumentos de evaluación son herramientas que le permiten al profesorado evaluar al alumnado a partir de los criterios y estándares de aprendizaje evaluables. Para la evaluación de la unidad didáctica que se desarrolla en este TFM se definen los siguientes instrumentos de evaluación:

- Proyecto estadístico (Act. 0) que contendrá dos partes diferenciadas a evaluar:
 - Entrega de un informe redactado por los miembros del grupo.
 - Exposición y explicación del contenido de dicho informe de forma oral.

- Prueba escrita sobre los contenidos de la unidad didáctica de duración máxima de 30 min. con el objetivo de comprobar que todo el alumnado maneja con mayor o menor soltura los conceptos desarrollados en la unidad y trabajados en la Act. 0.
- Participación y trabajo del alumnado en clase.

- **Criterios de calificación**

Los criterios de calificación definen la ponderación de cada instrumento de evaluación. Para esta unidad se establecen los siguientes:

Calificación total	Proyecto estadístico (Act. 0)	Prueba escrita	Participación y trabajo
100%	55%	35%	10%

Tabla 38. *Instrumentos de calificación*. Fuente: elaboración propia.

Para cada instrumento de evaluación se diseñan rúbricas de calificación donde se definen los diferentes aspectos a valorar (Anexo VII).

6.5. Elementos curriculares complementarios

6.5.1. Atención a la diversidad

El artículo 6 del REAL DECRETO 1105/2014 del 26 de diciembre señala en el punto primero que “los centros elaborarán sus propuestas pedagógicas para esta etapa desde la consideración de la atención a la diversidad y del acceso de todo el alumnado a la educación común. Asimismo, arbitrarán métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos y promuevan el aprendizaje en equipo.”

Es necesario por tanto prever todas aquellas situaciones que puedan dificultar el aprendizaje en el alumnado y encontrar medidas para atender la diversidad presente en el grupo. En concreto, en el grupo que tratamos, hay una alumna que presenta un trastorno en el lenguaje y la audición, y dos alumnos con talento simple en Matemáticas.

- Alumna con trastorno en el lenguaje y la audición.

El principal problema que presentan los alumnos con este tipo de trastorno es la comunicación tanto en la captación de información como en la expresión de la misma. Para facilitar la comunicación fluida con el profesorado y el seguimiento de las clases, se le dotará de material extra como esquemas, apuntes, resolución de problemas, etc., extraídos de “Apuntes Marea Verde” (Caro, 2014) que se puede descargar a través del

enlace señalado en la bibliografía. En el Anexo II se muestra un extracto de esa información de apoyo a modo de ejemplo, y en el Anexo III se adjunta material de refuerzo con solucionario como segunda opción para el caso de que no pudiera seguir la clase adecuadamente. Por otro lado, se optará por situarla en los primeros asientos del aula a fin de tener contacto directo con el profesor. En cuanto a su relación con el grupo, se evitará corregirla delante del mismo, y se fomentará su participación para poner en práctica sus habilidades comunicativas.

- Alumnos con talento simple en Matemáticas.

La estrategia fundamental que se seguirá con estos alumnos es el enriquecimiento de contenido por lo que se les dotará de recursos más específicos (Anexo IV). La metodología llevada a cabo en esta unidad didáctica permite el trabajo autónomo por lo que pueden avanzar en el trabajo hasta donde consideren oportuno. En este sentido, el papel del profesor consistirá en ayudarles a encontrar temas de estudio (a ser posible interdisciplinarios) que les motiven a trabajar en el proyecto y avanzar de forma autónoma.

6.5.2. Elementos transversales

El artículo 6 del REAL DECRETO 1105/2014 del 26 de diciembre señala los elementos transversales que se trabajan en el currículo. A continuación, se muestra un extracto de dicho artículo:

1. Se trabajarán en todas las materias la comprensión lectora, la expresión oral y escrita, la comunicación audiovisual, las Tecnologías de la Información y la Comunicación, el emprendimiento y la educación cívica y constitucional.
2. La programación docente debe comprender en todo caso la prevención de la violencia de género, de la violencia contra las personas con discapacidad, de la violencia terrorista y de cualquier forma de violencia, racismo o xenofobia. También incorporará elementos curriculares relacionados con el desarrollo sostenible y el medio ambiente, los riesgos de explotación y abuso sexual, el abuso y maltrato a las personas con discapacidad, las situaciones de riesgo derivadas de la inadecuada utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, así como la protección ante emergencias y catástrofes.
3. Los currículos de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato incorporarán elementos curriculares orientados al desarrollo y afianzamiento del espíritu emprendedor, a la adquisición de competencias para la creación y desarrollo de los diversos modelos de empresas y al fomento de la igualdad de oportunidades y del respeto al emprendedor y al empresario, así como a la ética empresarial. Las Administraciones educativas fomentarán las medidas para que el alumnado participe en

actividades que le permita afianzar el espíritu emprendedor y la iniciativa empresarial a partir de aptitudes como la creatividad, la autonomía, la iniciativa, el trabajo en equipo, la confianza en uno mismo y el sentido crítico.

4. Las Administraciones educativas adoptarán medidas para que la actividad física y la dieta equilibrada formen parte del comportamiento juvenil. Se promoverá la práctica diaria de deporte y ejercicio físico por parte de los alumnos y alumnas durante la jornada escolar, en los términos y condiciones que, siguiendo las recomendaciones de los organismos competentes, garanticen un desarrollo adecuado para favorecer una vida activa, saludable y autónoma.

5. En el ámbito de la educación y la seguridad vial, se incorporarán elementos curriculares y promoverán acciones para la mejora de la convivencia y la prevención de los accidentes de tráfico, con el fin de que el alumnado conozca sus derechos y deberes como usuario de las vías, en calidad de peatón, viajero y conductor de bicicletas o vehículos a motor, respete las normas y señales, y se favorezca la convivencia, la tolerancia, la prudencia, el autocontrol, el diálogo y la empatía con actuaciones adecuadas tendentes a evitar los accidentes de tráfico y sus secuelas.

La organización de las actividades no debe ir únicamente encaminadas al desarrollo de los contenidos, competencias, etc., sino que también deben de trabajarse los elementos complementarios descritos anteriormente. Para la unidad didáctica que se presenta, se propone el trabajo de estos elementos o valores a través de las siguientes acciones:

Elemento	Acción
Tecnología	<ul style="list-style-type: none"> ● Fomentar el uso adecuado de ordenadores y tables como herramientas de trabajo efectivas y necesarias en la sociedad actual.
Igualdad	<ul style="list-style-type: none"> ● Fomentar los grupos heterogéneos. ● Rechazar los estereotipos culturales, religiosos, de género, etc. ● Fomentar el lenguaje no sexista.
Convivencia	<ul style="list-style-type: none"> ● Fomentar el diálogo y el respeto. Asertividad. ● Fomentar la tolerancia hacia las ideas diferentes que puedan aparecer en el desarrollo de las actividades, así como una solución pacífica.
Sostenibilidad	<ul style="list-style-type: none"> ● Fomentar el uso de materiales con baja huella ecológica.

	<ul style="list-style-type: none"> ● Ejemplificar proyectos o preguntas enfocados a temas medioambientales o sostenibles.
--	--

Tabla 39. *Elementos transversales*. Fuente: elaboración propia.

6.5.3. Interdisciplinaridad con otras áreas

El tipo de metodología elegido para la realización de esta unidad permite desarrollar contenidos de otras materias y por tanto entrar en contacto con otras disciplinas. A continuación, se detallan los contenidos que se pueden trabajar de forma interdisciplinar:

- Tecnología (4º ESO)

El uso de la red para desarrollar esta unidad didáctica por parte del alumnado es inevitable ya que en ella se puede encontrar multitud de información. En este sentido, es necesario un uso responsable y seguro de esta herramienta de trabajo. En esta asignatura se tratan dichos contenidos en el “Bloque 1. Tecnologías de la información y la comunicación”.

Por otra parte, también será necesario el uso de herramientas ofimáticas cuyos contenidos se trabajan en el “Bloque 5. Publicación y difusión de contenidos” de la asignatura optativa “Tecnologías de la información y la comunicación” de cuarto curso, aunque también se trabajan en la de asignatura de Tecnología de tercer curso.

- Lengua Castellana y Literatura

La metodología utilizada plantea la exposición de unas conclusiones académicas por dos vías: oral y escrita. El uso de las formas del lenguaje son clave para hacer llegar el mensaje a un público objetivo, y de ellas depende gran parte del éxito o fracaso de la transmisión de la información.

Estos contenidos se desarrollan en los Bloques 1 y 2 de esta asignatura:

- Bloque 1. Comunicación oral: escuchar y hablar.
- Bloque 2. Comunicación escrita: leer y escribir.

- Física y Química/Biología y Geología/Ed. Física

La Estadística es usada en muchos campos diferentes y es de gran utilidad en el estudio de muchas cuestiones. En la mayoría de las asignaturas, sobre todo en las orientadas a la rama científica, tiene cabida la Estadística, por lo que es posible profundizar en

muchos conceptos que se trabajan en otras asignaturas como la biodiversidad, medidas de pesos, etc. No obstante, la interdisciplinariedad con estas áreas dependerá en gran medida de las elecciones que tome el alumnado en su trabajo, aunque, por otra parte, la metodología permite que todo el grupo se nutra del trabajo realizado por cada alumno/a.

7 Conclusiones

La valoración de todo el trabajo desarrollado hasta este punto se podría enfocar desde diferentes perspectivas. Cabe destacar tres bloques importantes y diferenciados dentro del trabajo: en primer lugar, se encuentra el análisis y trabajo con la normativa que suele ser complejo y tedioso por la multitud de información que aporta la legislación; en segundo lugar, la profundización en contenidos estadísticos tomando como base el nivel en la Educación Secundaria; por último, el análisis de documentación sobre la enseñanza Estadística, y el desarrollo de una unidad didáctica en base a ese análisis.

La legislación en general contiene mucha información, que además desarrolla con detenimiento, pero la multitud de leyes diferentes y la estructura de los documentos hace que resulte compleja de manejar. Encontrar la información requerida puede resultar una tarea bastante compleja si no se conoce bien, y en el desarrollo de este documento se trabaja esa habilidad, afianzando así el conocimiento necesario sobre la normativa para desarrollar de forma eficiente el trabajo como docente.

La profundización y desarrollo de contenidos estadísticos resulta esencial para la transmisión de un contenido más básico a través de la unidad didáctica que desarrollamos. Permite visualizar un campo amplio de conocimiento y enfocar la enseñanza de tal forma que el alumnado pueda conseguir los objetivos marcados para él y al mismo tiempo, predisponer al alumnado para que pueda alcanzar un conocimiento superior en un futuro.

El desarrollo de una unidad didáctica resulta esencial en un máster enfocado a la educación ya que estas son las herramientas básicas de planificación de la enseñanza para el profesorado, por tanto, éste debe conocer cómo desarrollarlas y comprender las dificultades que se pueden encontrar en el aula. Por otro lado, el análisis de artículos de actualidad sobre la enseñanza permite comprender el estado en el que se encuentra la educación actual y hacia dónde va encaminada.

En resumen, se podría decir que el trabajo de docente tiene dos partes diferenciadas y va más allá de la simple transmisión de conocimiento. Por un lado, se encuentra la enorme cantidad de información necesaria para la planificación efectiva de la enseñanza del alumnado que suele ser un trabajo menos conocido, pero igual de importante. Es necesario actualizarse continuamente a través de los desarrollos de nuevas



José Antonio Barragán Franco

metodologías y estudios, y manejar la legislación existente de forma adecuada. Por otro lado, se encuentra la enseñanza en el aula, donde entran en juego habilidades y saberes que van más allá de la planificación y donde es necesario comprender y entrar en contacto de forma adecuada con el alumnado para hacer efectiva la enseñanza.

Estas dos partes en las que se puede dividir el trabajo del docente son básicas y un fallo en cualquiera de ellas puede derivar en una enseñanza no efectiva, es decir, si no existe planificación, pero el docente tiene habilidades extraordinarias para la enseñanza, o si existe una planificación excelente pero el docente carece de habilidades, en ambos casos, la enseñanza será poco efectiva.

8 Bibliografía

- Amador, M.V. y Montejo Gámez, J. (2017). *Metodologías activas y su relación con las actitudes hacia la Estadística en Educación Secundaria*. En Investigación en Educación Matemática XXI (p.489). SEIEM.
- Anasagasti, J. y Berciano, A. (2016). *Competencia estadística del futuro profesorado en Educación Primaria: análisis de la repercusión del ABP en su adquisición*. En Investigación en Educación Matemática XX (p.555). SEIEM.
- Anasagasti, J. e Izaguirre, A. (2018). *Estadística por proyectos: Análisis de temáticas variables y recursos propuestas por maestros en formación inicial*. En Investigación en Educación Matemática XXII (p.606). SEIEM.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística (Grupo de Investigación en Educación Estadística)*. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada ed.).
- Batanero, C. y Díaz, C. (2005). *Papel de los proyectos en la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística*. VII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Granada.
- Barbancho, A.G. (1994). *Estadística elemental moderna* (16ª ed.). Ariel Economía.
- Caro, R. (2014). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO. Capítulo 13: Estadística*. LibrosMareaVede.tk. Recuperado de: https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4B/13_Estadistica_4B.pdf
- Casas, J., Callealta, J., Núñez, J., Toledo, M., Ureña, C. (1986). *Curso básico de Estadística Descriptiva*. Instituto Nacional de Administración Pública. (INAP).

- Cólera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I. y Cólera Cañas, R. (2016). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. 4ºESO*. Grupo Anaya.

- de Lucas Benedicto, M., Peña Romano, M. y Rey Fedriani, M. (2017). *Inicia Dual Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. 4.º ESO*. Oxford University Press.

- Peña, L., Molina-Portillo, E., Ruz, F., Martínez, F. y Contreras, J. (2018). *Evaluación de la cultura estadística en estudiantes de secundaria*. Investigación en educación matemática XXII (p.651). SEIEM.

- Ross, S. M. y Valdés Sánchez, T. (2014). *Introducción a la estadística*. Barcelona, Spain: Editorial Reverté.

- Salinas, J. y Mayen, S. (2015). *Estudio exploratorio de las actitudes hacia la Estadística en estudiantes de bachillerato*. Investigación en educación matemática XIX (p.503). SEIEM.

Legislación

- Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado (BOJA 28-07-2016).

Recuperado de:

<https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/144/18>

- REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE 03-01-2015).

Recuperado de:

<http://www.adideandalucia.es/normas/RD/RD1105-2014CurriculoSecundaria.pdf>

Páginas web

- Instituto Nacional de Estadística. (2021).
<https://www.ine.es/>
- Global Footprint Network. (s.f.) *Ecological Footprint?*
<https://www.footprintcalculator.org/>

8.1. Fuente de figuras, gráficas y tablas

Figura 1. *Esquema de desarrollo de un proyecto.*

Fuente: Batanero, C. y Díaz, C. (2005) *El papel de los proyectos en la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística*. VII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións.

Figura 2. *Esquema de situación de la mediana.*

Fuente: Barbancho, A. G. (1994). *Estadística elemental moderna*. (p.134). Ariel Economía.

Figura 6. *Esquema de simetría.*

Fuente: Casas, J., Callealta, J., Núñez, J., Toledo, M., Ureña, C. (1986). *Curso básico de Estadística Descriptiva*. Instituto Nacional de Administración Pública (p.139). (INAP).

Figura 7. *Esquema de apuntamiento.*

Fuente: Casas, J., Callealta, J., Núñez, J., Toledo, M., Ureña, C. (1986). *Curso básico de Estadística Descriptiva*. Instituto Nacional de Administración Pública. (p.142-143). (INAP).

Figura 8. *Portada de libro de Anaya*

Fuente:
https://www.anayaeducacion.es/busquedas.php?busc_guiada=buscar&autonomia=1&etapacurso=81%2C57%2C160&asignaturas=7920&dirigido=&formato=&tipo=BUSQUEDAS&visual=imagenes

Figura 9. *Portada de libro de Oxford.*

Fuente:
<https://www.oup.es/es/teaching/secundaria/matematicas/matematicas-inicia>

Figura 10. *Localización del centro.*

Fuente: Google. (s.f.). [Colegio Pedro Poveda, Calle Josefa Segovia, 6, 23001 Jaén]. Recuperado el 9 de junio de 2021 de:
<https://goo.gl/maps/9meqxuVTPMoz9ySw8>

Gráfica 8. *Relación entre edad y consumo de gasolina.*

Fuente: Barbancho, A. G. (1994). Estadística elemental moderna. (p.83). Ariel Economía.

Gráfica 10. *Número de autobuses urbanos por años.*

Fuente: Casas, J., Callealta, J., Núñez, J., Toledo, M., Ureña, C. (1986). *Curso básico de Estadística Descriptiva*. Instituto Nacional de Administración Pública. (p.70). (INAP).

Gráfica 11. *Residentes en entidades menores de 500 habitantes.*

Fuente: Barbancho, A. G. (1994). Estadística elemental moderna. (p.87). Ariel Economía.

Tabla 4. *Ejemplo: producción de trigo.*

Fuente: Casas, J., Callealta, J., Núñez, J., Toledo, M., Ureña, C. (1986). *Curso básico de Estadística Descriptiva*. Instituto Nacional de Administración Pública (p.101). (INAP).

Tabla 5. *Valores de n_i y N_i de una variable.*

Fuente: Adaptado de Estadística elemental moderna. Barbancho, A. G. (1994). (p.133). Ariel Economía.

Tabla 12. *Ejemplo: cálculo de V .* Adaptado de Estadística elemental moderna. Barbancho, A. G. (1994). (pp.33, 35-36, 147). Ariel Economía.

Tabla 17. *Bloque 5. Estadística y Probabilidad.*

Fuente: Adaptado del REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE 03-01-2015). (p.398). Recuperado de:
<http://www.adideandalucia.es/normas/RD/RD1105-2014CurriculoSecundaria.pdf>

Tabla 19. *Bloque 5. Estadística y Probabilidad.* Adaptado del REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE 03-01-2015). (p.398). Recuperado de:

<http://www.adideandalucia.es/normas/RD/RD1105-2014CurriculoSecundaria.pdf>

Tabla 20. *Bloque 5. Estadística y Probabilidad.* Adaptado del REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE 03-01-2015). (p.398). Recuperado de:



<http://www.adideandalucia.es/normas/RD/RD1105-2014CurriculoSecundaria.pdf>

9 Anexos

9.1. Anexo I: Ejercicios propuestos en las actividades.

A continuación, se muestran los ejercicios propuestos para realizar en la unidad didáctica que se desarrolla en este TFM.

E.1.1

Tras preguntar a 50 familias sobre el número de hijos se ha obtenido las siguientes respuestas

0 4 1 2 4 2 1 3 1 4 0 0 2 0 4 4 1 1 2 2 3 1 2 3 4 3 1 3 2 2 3 3 1 5 8 3 3 1 2 2 2 3 2 2 1 0 2 2 1 1

Organiza los datos en una tabla de frecuencias.

E.1.2

En un hospital se ha medido el peso (kg) de 50 recién nacidos:

2,8 3,2 3,8 2,5 2,7 3,7 1,9 2,6 3,5 2,3 3,0 2,6 1,8 3,3 2,9 2,1 3,4 2,8 3,1 3,9 2,9 3,5 3,0 3,1
2,2 3,4 2,5 1,9 3,0 2,9 2,4 3,4 2,0 2,6 3,1 2,3 3,5 2,9 3,0 2,7 2,9 2,8 2,7 3,1 3,0 3,1 2,8 2,6
2,9 3,3

Organizar los datos en una tabla de frecuencias por intervalos.

E.2.1

En una clase de 1º de ESO se toman las alturas de todos los alumnos/as obteniendo los datos que se muestran a continuación:

1.35-1.4-1.32-1.56-1.42-1.37-1.63-1.54-1.55-1.27-1.58-1.31-1.43-1.28-1.29-1.58-1.43-
1.57-1.64-1.32

Al año siguiente en 2º de ESO se vuelven a tomar todas las alturas, obteniendo estos datos:

1.32-1.41-1.4-1.57-1.43-1.39-1.65-1.59-1.56-1.28-1.60-1.32-1.45-1.29-1.32-1.63-1.45-
1.58-1.67-1.37

Por último, en 3º de ESO se vuelven a tomar, obteniendo los siguientes datos:

1.35-1.44-1.42-1.60-1.47-1.44-1.66-1.65-1.59-1.33-1.61-1.34-1.51-1.32-1.35-1.67-1.49-
1.59-1.70-1.41

Realizar una tabla de frecuencias e histograma para cada situación. ¿qué conclusiones puedes extraer?



E.2.2

Realiza un diagrama de sectores que muestre la procedencia de los extranjeros que residen en España.

América	África	Asia	Europa	Oceanía
165219	233092	67450	353555	1903

Puedes utilizar software informático para realizarlo como Excel o Google Sheets.

E.3.1

Tras hacer balance de gastos, un agricultor descubre que para que su plantación de tomates sea rentable, cada planta debe producir al menos 6 tomates de media. Comprueba si la plantación es rentable o no, teniendo en cuenta que en 40 plantas se han observado las siguientes cantidades de frutos:

5 3 7 2 1 7 9 2 5 4 4 3 7 8 4 5 6 2 6 6 5 2 8 3 6 4 5 2 4 6 4 3 1 5 9 3 5 2 4 7

Realiza un diagrama de cajas y bigotes y analízalo.

E.3.2

Se ha preguntado a un grupo de alumnos cuánto dinero suelen gastar a la semana y estas han sido sus respuestas en euros:

6/ 4/ 3 /5,3 /2,5 /4,2/ 3,2/ 2/ 7 /2,25/ 5,5 /14,5/ 4,2/ 5 /12 /4,1 /1,3 /10 /3,25/ 9,5/ 3,1/ 4,5/ 9 /1,2 /6,5/ 3 /0,5 /6,2 /4 /3,8

Realiza la tabla de frecuencias y calcula todas las medidas de centralización que conozcas.

E.4.1

Hallar el rango, la desviación media, la desviación típica, la varianza y el coeficiente de variación de Pearson de los siguientes conjuntos de datos:

A

x_i	n_i
0	0
1	0
2	1
3	1
4	6
5	15
6	9
7	4
8	3
9	0
10	1

B

x_i	n_i
0	10
1	5
2	8
3	4
4	1
5	2
6	3
7	5
8	0
9	14
10	9

C

x_i	n_i
0	10
1	5
2	8
3	4
4	1
5	2
6	4
7	5
8	2
9	4
10	3

E.4.2

Halla las medidas de centralización de datos que conoces para el nº de hoteles existentes en cada comunidad y comprueba si ese dato es representativo o no. Explica qué factores pueden influir.

Comunidad	Nº Hoteles
Andalucía	2266
Aragón	712
Asturias	620
Baleares	1483
Canarias	532
Cantabria	493
Castilla León	1452
Castilla La Mancha	842
Cataluña	2713
Extremadura	418
Galicia	1526
Madrid	1242
Murcia	209
Navarra	150
País Vasco	396
La Rioja	117
Valencia	1019
Canta y Melilla	36

E.5.1

Para un grupo de estudiantes se han tomado medidas de altura y peso, comprueba si estas variables están relacionadas y de qué modo:

Altura (m)	1.66	1.68	1.69	1.70	1.70	1.70	1.72	1.74	1.76	1.79
Peso (kg)	55	56	64	62	64	66	75	74	70	72

Representa los datos gráficamente.

E.5.2

Comprueba si las variables que se muestran a continuación están relacionadas y represéntalas gráficamente:

A)

X	6	7	8	9	10	11
Y	1	0	-1	-2	-3	-4

B)

X	1	3	4	5	6	7
Y	1	6	0	6	2	7

C)

X	1	3	4	5	6	7
Y	1	6	9	10	13	14

E.6.1

Se ha realizado una encuesta donde se han obtenido los siguientes datos:

- Representa gráficamente los datos.
- Calcula la media, la moda y la mediana.
- Calcula el rango y la desviación estándar.

Realiza el diagrama de cajas y bigotes.

Salario mensual (€)	n_i
[0-200)	5
[200-400)	21
[400-600)	46
[600-800)	54
[800-1000)	60
[1200-1400)	54
[1400-1600)	32
[1600-1800)	14
[1800-2000)	7
[2000-2200)	24
[2200-2400)	13
[2400-2600)	12
[2600-2800)	6
[2800-3000)	2

9.2. Anexo II: Material para atención a la diversidad. Contenidos de sesiones desarrollados.

En este anexo se presenta un extracto de documentación de apoyo para alumnos/as que no puedan seguir adecuadamente las clases. El material ha sido adaptado de https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4B/13_Estadistica_4B.pdf (Caro, 2014).

Histogramas

La representación más utilizada en variables cuantitativas continuas es el **histograma**. En el eje de abscisas se colocan los diferentes intervalos en los que se agrupan las observaciones de la variable. Sobre estos intervalos, se levantan rectángulos cuya **área** es proporcional a la frecuencia observada en cada uno de ellos.

En el caso que todos los intervalos tengan la misma amplitud basta con que la altura de los rectángulos sea proporcional a la frecuencia.

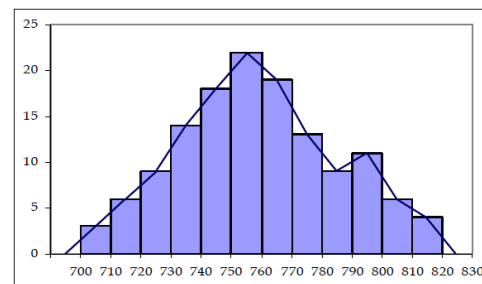
Dependiendo de las frecuencias que se utilicen, se tratará de un histograma de frecuencias relativas, o bien de un histograma de frecuencias absolutas.

En ocasiones, se unen los puntos medios de los segmentos superiores de los rectángulos, obteniéndose de este modo el **polígono de frecuencias**, ya sean absolutas o relativas. Estos polígonos se construyen utilizando un intervalo anterior al primero (de la misma longitud que éste) y otro posterior al último (de su misma longitud). De esta manera, los polígonos delimitan un área cerrada.

En ambos casos, también se pueden utilizar las frecuencias acumuladas para construir los respectivos histogramas. Estos histogramas también llevan asociados los correspondientes polígonos de frecuencias, que en este caso se construyen uniendo los vértices superiores derechos de cada uno de los intervalos.

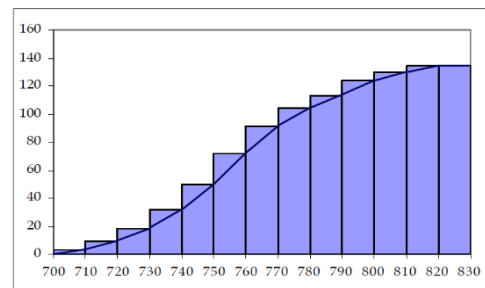
Ejemplo

Se ha representado gráficamente la información obtenida a partir de las emisiones específicas de CO₂ de una central de carbón (kg/megavatiohora) a partir de un histograma y un polígono de frecuencias absolutas.



Ejemplo

Se ha representado gráficamente la información obtenida a partir de las emisiones específicas de CO₂ de una central de carbón (kg/megavatiohora) a partir de un histograma y un polígono de frecuencias acumuladas.



9.3. Anexo III: Material para atención a la diversidad. Ejercicios con solucionario.

En este anexo se presenta ejercicios de refuerzo adaptados del libro de Oxford con el que se ha trabajado en este TFM (de Lucas Benedicto et al. 2017).

1. Clasifica las siguientes variables estadísticas.

- a) Asignaturas optativas de Bachillerato que eligen los estudiantes al finalizar 4.º de ESO.
- b) Precio de un teléfono móvil en diferentes tiendas.
- c) Edad de los estudiantes de 5.º y 6.º de Primaria.
- d) Temperatura ambiental a lo largo de un día.

2. Las edades de las 20 primeras personas que han entrado en un cine en la sesión de las 16 h son:

8 10 12 38 40 14 15 16 14 15 18 20 17 18 18 12 14 22 42 46

Ordena estos datos en una tabla de frecuencias agrupándolos en cinco intervalos con la misma amplitud.

3. Halla las medidas de centralización para los datos del ejercicio anterior.

4. Representa el histograma de los datos del ejercicio 2.

5. Calcula el rango, la desviación media, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de las edades del ejercicio 2.

6. Las edades de los jugadores de dos equipos de fútbol son:

Equipo A:	18	25	20	26	22	26	23	27	25	26
Equipo B:	23	21	20	21	22	23	20	24	25	25

Determina las diferencias que existen entre los equipos ayudándote de las medidas de dispersión.

José Antonio Barragán Franco

7. Cuatro hermanos utilizan sus respectivos coches para ir a trabajar. Los años de antigüedad de sus permisos de conducir, X , y el número de infracciones cometidas, Y , en el último año por cada uno de ellos son los siguientes:

X	2	3	4	5
Y	3	2	1	0

a) Determina si entre las variables existe una relación funcional o una relación estadística.

b) Sin realizar ningún cálculo indica el signo que tendrá el valor de la covarianza de las variables (X , Y) y el valor del coeficiente de correlación lineal.

8. A partir de los datos de la variable bidimensional:

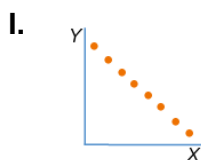
Crea la tabla de doble entrada y las tablas de frecuencias de las variables marginales.

X	1	2	3	4	5
Y	4	2	3	1	0

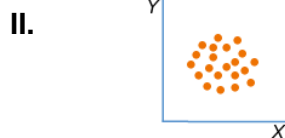
9. Para los datos de la variable bidimensional del ejercicio 8 (observa que todos los puntos tienen frecuencia absoluta 1), completa la tabla, determina el valor de la covarianza y halla el coeficiente de correlación lineal.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	4			
2	2			
3	3			
4	1			
5	0			
15	10	55	30	21

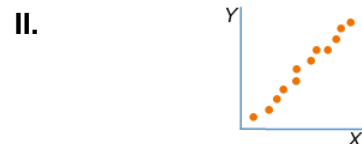
10. Cada diagrama representa la relación entre dos variables, asigna a cada uno su coeficiente de correlación.



a) $r = 0,9$



b) $r = 0$



c) $r = -1$

Solucionario

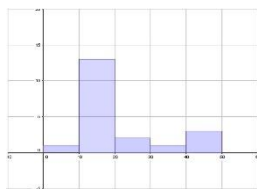
1. a) Cualitativa c) Cuantitativa discreta
 b) Cuantitativa discreta d) Cuantitativa continua

2.

Edades	n_i
[0, 10)	1
[10, 20)	13
[20, 30)	2
[30, 40)	1
[40, 50)	3
Total	20

- 3.
- $\bar{x} = 21$
- ,
- $Mo = 15$
- ,
- $Me = 15$

4.



5. $R = 50$ $D_{\bar{x}} = 9,4$ $S^2 = 134$
 $S = 11,58$ $V = 0,55$

6. $\bar{x}_A = 23,8$ $S = 2,82$ $V_A = 0,12$
 $\bar{x}_B = 22,4$ $S = 1,8$ $V_B = 0,08$

Las edades de los jugadores del equipo B son menos dispersas que las de los jugadores del equipo A .

7. a) Existe una relación funcional e inversa entre las variables.
 b) $\sigma_{xy} < 0$ $r = -1$

8.

X \ Y	1	2	3	4	5	
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	1	0	0	0	0	1
	1	1	1	1	1	5

X	n_i
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
Total	5

Y	n_i
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
Total	5

9.

x_i	y_i	x_i²	y_i²	x_i y_i
1	4	1	16	4
2	2	4	4	4
3	3	9	9	9
4	1	16	1	4
5	0	25	0	0
15	10	55	30	21

$$\sigma_{XY} = -1,8 \quad r = -0,9$$

10. a) III

b) II

c) I



9.4. Anexo IV: Material para atención a la diversidad. Ejercicios de ampliación.

En este anexo se presenta ejercicios de ampliación adaptados del libro de Oxford con el que se ha trabajado en este TFM (de Lucas Benedicto et al. 2017).

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando tu respuesta.

- a) La media aritmética de los datos de una variable unidimensional nos proporciona la información suficiente para conocer la distribución de los datos.
- b) La desviación media de una distribución de datos puede ser negativa en algunos casos.
- c) La varianza se mide en las mismas unidades que los datos de la variable.
- d) Si la covarianza de una variable bidimensional es $\sigma_{xy} = 1$, no hay relación entre las variables.

2. La siguiente tabla muestra el número de retrasos que ha tenido el alumnado de 4.º de ESO en un trimestre.

N.º de retrasos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N.º de alumnos/as	40	30	15	40	2	15	20	30	5	19	1	11	8	10	10	9

Completa la tabla con las frecuencias acumuladas y calcula:

- a) $Q_{50/100}$
- b) $Q_{75/100}$
- c) $Q_{20/100}$
- d) $Q_{80/100}$

PRESTA ATENCIÓN

Los **percentiles** son los 99 valores que dividen a una población en 100 partes de igual tamaño. A cada uno de ellos se le denomina P_{k0} , $Q_{r/100}$

Por ejemplo: $P_{30} = Q_{30/100}$

Ten en cuenta: el primer cuartil corresponde a P_{25} , mediana a P_{50} , y el tercer cuartil a P_{75}

3. En una clase de 30 alumnos/as la nota media final de curso en la asignatura de Biología ha sido un 8. Si la nota media de chicas ha sido de 8,5 y la de los chicos 6. ¿Cuántas chicas y cuántos chicos hay en el grupo?

4. Los porcentajes de incremento de las ventas en un negocio durante los tres últimos años han sido del 3 %, del 4 % y del 8 % respectivamente. Halla la media de crecimiento.

PRESTA ATENCIÓN

La **media geométrica** de los valores x_1, x_2, \dots, x_n es:

$$G = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}}$$

La diferencia fundamental entre la media geométrica y la aritmética es que la geométrica no se ve tan afectada por valores extremos.

5. La evolución del porcentaje del número de estudiantes que han obtenido notable o sobresaliente en 2.º de Bachillerato en un centro escolar durante los últimos cuatro años ha sido:

2 % 67 % 70 % 71 %

Calcula la media de crecimiento en estos años.

6. Determina la ecuación de la recta de regresión de la variable bidimensional (X, Y) sabiendo que es paralela a la recta de ecuación $2x - 5y + 1 = 0$, y que su centro de gravedad pertenece a las rectas

$r: x - y = 1$ y $s: 3x + y = 11$.

7. Un estudio donde la muestra seleccionada incluyó a niños de diversas etnias y procedencias concluyó que el patrón de crecimiento para niños de entre 1 y 4 años debía ser el que muestra la tabla.

Edad (años)	1	2	3	4
Estatura (cm)	75	88	95	100

PRESTA ATENCIÓN

La **recta de regresión de Y sobre X**, pasa por el punto medio de la distribución (\bar{x}, \bar{y}) .

Pendiente: $m = \frac{\sigma_{xy}}{S_x^2}$

Ecuación: $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{S_x^2} (X - \bar{X})$

a) Dibuja el diagrama de dispersión, calcula la ecuación de la recta de regresión y represéntala.

b) Si deseamos estimar la estatura que tendrá un joven de 15 años, ¿crees que la recta de regresión, hallada en el apartado anterior, nos proporcionará un resultado fiable?

José Antonio Barragán Franco

8. Una variable bidimensional (X, Y) tiene por coeficiente de correlación $r_{XY} = 0,68$ y su recta de regresión es $y = 3x + 5$. Otra variable (P, Q) tiene por coeficiente de correlación $r_{PQ} = 0,98$ y su recta de regresión es $q = 3p + 10$. Si queremos estimar el valor que corresponderá a $x = 15$ o a $p = 15$, ¿En cuál de las dos rectas debemos hacerlo? ¿Cuánto vale la estimación?

9. Utiliza algún programa matemático y determina la ecuación de la recta de regresión de la variable bidimensional.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	11	10	8	8	5	7	6	5	3	1

10. Demuestra que si m es la pendiente de la recta de regresión de una variable bidimensional y r su coeficiente de correlación se verifica la igualdad: $\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{m}{r}$

9.5. Anexo V: Prueba escrita de la unidad didáctica.

La prueba está readaptada del dossier de pruebas que presenta el libro de Oxford analizado en el punto 3 (de Lucas Benedicto et al. 2017).

Prueba unidad 15: Estadística

Tiempo: 30min

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____

Ejercicio 1 (3 puntos):

Teniendo las siguientes temperaturas, calcula la media aritmética, la moda y la mediana para este conjunto de datos.

Temperaturas (C°)

17 18 18 20 21 21 23 24 24 24 25

Ejercicio 2 (3 puntos):

Calcula el rango y la desviación estándar del conjunto anterior de datos.

Ejercicio 3 (4 puntos):

Los siguientes pares de puntos se han obtenido al estudiar una muestra de 10 vehículos diferentes.

El primer valor, X , representa la temperatura en el exterior de un vehículo y el valor Y , es el aumento del gasto (en %) de combustible, para mantener la temperatura del interior a 22 C°.

(15, 2) (15, 3) (20, 2) (20, 2) (25, 2) (25, 3) (25, 4) (30, 5) (30, 4) (30, 5)

Representa la nube de puntos. ¿Qué relación hay entre las variables?

9.6. Anexo VI: Criterios de evaluación, competencias clave y estándares de aprendizaje evaluables.

Bloque	Contenido	Criterio de evaluación	Competencias clave	Estándares de aprendizaje evaluables
1	Planificación del proceso de resolución de problemas.	C.E.1.1 Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL CMCT	E.A.1.1.1 Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
1	Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	C.E.1.5 Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL CMCT CAA SIEP	E.A.1.5.1 Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.
1	Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos	C.E.1.6 Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	CMCT CAA CSC SIEP	E.A.1.6.1 Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. E.A.1.6.2 Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.



				<p>E.A.1.6.3 Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las Matemáticas.</p> <p>E.A.1.6.4 Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.</p> <p>E.A.1.6.5 Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia</p>
1	Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	C.E.1.9 Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	CMCT CAA SIEP	E.A.1.9.1 Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
1	Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) La recogida ordenada y la organización de datos.	C.E.1.11 Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos,	CMCT CD CAA	E.A.1.11.1 Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la



	<p>b) La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.</p> <p>d) El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas</p> <p>e) La elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.</p> <p>f) Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.</p>	<p>algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.</p>		<p>dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.</p> <p>E.A.1.11.3 Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.</p>
5	<p>Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la Estadística.</p> <p>Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.</p>	<p>C.E.5.3 Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación.</p>	<p>CCL</p> <p>CMCT</p> <p>CD</p> <p>CAA</p> <p>CSC</p> <p>SIEP</p>	<p>E.A.5.3.1 Utiliza un vocabulario adecuado para describir, cuantificar y analizar situaciones relacionadas con el azar</p>



5	<p>Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.</p>	<p>C.E.5.4 Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.</p>	<p>CCL CMCT CD CAA SIEP</p>	<p>E.A.5.4.1 Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos estadísticos</p> <p>E.A.5.4.2 Representa datos mediante tablas y gráficos estadísticos utilizando los medios tecnológicos más adecuados.</p> <p>E.A.5.4.3 Calcula e interpreta los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador).</p> <p>E.A.5.4.4 Selecciona una muestra aleatoria y valora la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas.</p> <p>E.A.5.4.5 Representa diagramas de dispersión e interpreta la relación existente entre las variables.</p>
---	--	---	---	---

Tabla 40. *Criterios de evaluación.* Fuente: elaboración propia.

9.7. Anexo VII: Rúbricas de calificación

Proyecto estadístico (Act.0)					
Trabajo escrito					
Aspecto a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración
Presentación	E.A.5.3.1			5%	
Documento	El documento es poco legible, desordenado y sucio.	El documento es legible y limpio, pero se encuentra desordenado.	El documento es legible, limpio y ordenado.	2%	
Desarrollo	Explica el proceso seguido, pero no es coherente.	Explica el proceso seguido y es coherente.	Explica razonadamente el proceso seguido y es coherente.	2%	
Originalidad	El documento no presenta aportaciones visuales del alumnado.	El documento presenta algunas aportaciones visuales.	El documento presenta gran riqueza de aportaciones visuales.	1%	
Aspecto a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración
Temática	E.A.1.6.1/ E.A.1.6.2			5%	
Temática	No encuentra temas de interés	Encuentra algunos temas de interés, pero no los relaciona con conceptos matemáticos.	Encuentra muchos temas de interés y los relaciona con conceptos matemáticos.	5%	
Aspecto a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración
Planificación	E.A.1.9.1			10%	



Planificación	No planifica el proceso a seguir.	Planifica algunas acciones a seguir sin conocer las posibles causas.	Planifica el proceso a seguir en el estudio con conocimiento de causa.	10%	
Aspecto a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración
Recogida de datos	E.A.1.5.1/ E.A.1.6.3/ E.A.1.11.1/ E.A.1.11.3/ E.A.5.4.1/ E.A.5.4.4/ E.A.1.5.1			20%	
Proceso	No es consciente del proceso de recogida de datos ni de sus limitaciones.	Es consciente del proceso de recogida de datos, pero no comprende sus limitaciones.	Es consciente del proceso de recogida de datos y comprende sus limitaciones.	10%	
Tabulación	No crea tablas ni gráficas para la representación del fenómeno de estudio.	Crea algunas tablas y gráficas no adecuadas para la representación del fenómeno de estudio.	Crea tablas y gráficas adecuadas para la representación del fenómeno de estudio.	10%	
Aspecto a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración
Análisis de datos	E.A.1.5.1/ E.A.1.6.5/ E.A.1.11.1/ E.A.5.4.3			20%	
Medidas de centralización	No obtiene las medidas de centralización estudiadas.	Obtiene algunas medidas de centralización estudiadas del fenómeno estudiado, pero no reflexiona sobre las mismas.	Obtiene las medidas de centralización estudiadas del fenómeno estudiado y reflexiona sobre las mismas.	10%	



Medidas de dispersión	No obtiene las medidas de dispersión estudiadas.	Obtiene algunas medidas de dispersión estudiadas del fenómeno estudiado, pero no reflexiona sobre las mismas.	Obtiene las medidas de dispersión estudiadas del fenómeno estudiado y reflexiona sobre las mismas.	10%	
Aspecto a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración
Conclusiones	E.A.1.1.1/ E.A.1.5.1/ E.A.1.6.4/ E.A.1.6.5/ E.A.5.3.1			20%	
Conclusiones	No reflexiona sobre los datos analizados.	Reflexiona sobre los datos analizados.	Reflexiona sobre los datos analizados y obtiene información coherente y razonada.	20%	8
Trabajo escrito				80%	
Exposición oral					
Aspecto a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración
Medios tecnológicos	No se apoya de recursos informáticos para presentar el trabajo.	Se apoya de recursos informáticos para presentar el trabajo.	Se apoya de recursos informáticos con soltura para presentar el trabajo.	5%	
Contenidos	En los contenidos mostrados no se visualiza el trabajo realizado.	Los contenidos mostrados muestran parte del trabajo realizado.	Los contenidos mostrados muestran una síntesis del trabajo realizado.	10%	
Discurso	El discurso seguido no es coherente ni adecuado.	El discurso seguido es adecuado, siguiendo un orden lógico de	El discurso seguido es adecuado y coherente, siguiendo un orden lógico de contenidos.	5%	



		contenidos en parte de la presentación.			
			Exposición oral	20%	
			Nota final	100%	

Tabla 41. Rúbrica de calificación de la actividad 0. Fuente: elaboración propia.

Prueba escrita					
Aspecto a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración
Ejercicio 1	E.A.5.4.1/ E.A.5.4.3			30%	
Calcula la media aritmética	No calcula la media aritmética.	Calcula la media aritmética cometiendo errores y sin razonar.	Calcula la media aritmética sin errores y de forma razonada.	10%	
Calcula la moda	No calcula la moda.	Calcula la moda cometiendo errores y sin razonar.	Calcula la moda sin errores y de forma razonada.	10%	
Calcula la mediana	No calcula la mediana.	Calcula la mediana cometiendo errores y sin razonar.	Calcula la mediana sin errores y de forma razonada.	10%	
Aspecto a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración



Ejercicio 2	E.A.5.4.3			30%	
Calcula el rango.	No calcula el rango	Calcula el rango cometiendo errores y sin razonar.	Calcula el rango sin errores y de forma razonada.	10%	
Calcula la desviación estándar.	No calcula la desviación estándar.	Calcula la desviación estándar cometiendo errores y sin razonar.	Calcula la desviación estándar sin errores y de forma razonada.	20%	
Aspecto a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración
Ejercicio 3	E.A.5.4.2/ E.A.5.4.3/ E.A.5.4.5			40%	
Representa las variables	No representa las variables.	Representa las variables cometiendo algunos errores.	Representa las variables de forma clara y sin errores.	20%	
Define la relación entre las variables	No define la relación entre las variables o lo hace de forma errónea.	Define la relación entre las variables de forma correcta y sin justificarlo.	Define la relación entre las variables de forma correcta y justificada.	20%	
Nota final				100%	

Tabla 42. Rúbrica de calificación de la prueba escrita. Fuente: elaboración propia.



Participación, trabajo y actitud					
Aspectos a valorar	Insuficiente (0-4)	Bien (5-7)	Excelente (8-10)	Ponderación	Valoración
Actitud	Mantiene una actitud poco respetuosa con el profesorado o con el grupo.	A veces mantiene una actitud poco respetuosa con el profesorado o con el grupo.	Siempre mantiene una actitud respetuosa con el profesorado o con el grupo.	40%	
Participación	Nunca participa en clase.	A veces participa en clase, en debates, correcciones, etc.	Participa de forma activa en clase, en debates, correcciones, etc.	30%	
Trabajo personal	No trabaja en el trabajo propuesto.	Trabaja normalmente en el trabajo propuesto con algunas excepciones.	Trabaja diariamente en el trabajo propuesto.	30%	
Nota final				100%	

Tabla 43. Rúbrica de calificación de la participación, trabajo y actitud. Fuente: elaboración propia.