



UNIVERSIDAD DE JAÉN

Trabajo Fin de Máster

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS. CÁLCULO, SIGNIFICADO Y PROPIEDADES.

Alumno/a: Salas Casado, Carmen María

Tutor/a: Prof. ^a D. ^a Ana María Martínez Rodríguez

Prof. ^a D. ^a Antonia Oya Lechuga

Dpto.: Estadística e Investigación Operativa

Junio, 2020

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	9
2. OBJETIVOS	10
3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR.....	11
3.1. Análisis del currículo escolar.....	11
3.2. Análisis de los libros de texto.....	12
3.2.1. Ajuste de los contenidos a la normativa actual.....	12
3.2.2. Definición de conceptos clave.....	15
3.2.3. Uso de TIC en los diferentes libros	19
4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	20
4.1. Introducción.....	20
4.2. Medidas de posición.....	20
4.2.1. Medidas de tendencia central.....	20
4.2.1.1. Media aritmética	20
4.2.1.2. Media geométrica	24
4.2.1.3. Media armónica	25
4.2.1.4. Media cuadrática	26
4.2.1.5. Mediana	27
4.2.1.6. Moda	29
4.2.2. Medidas de tendencia no central.....	30
4.3. Medidas de dispersión.....	33
4.3.1. Medidas de dispersión absolutas	34
4.3.1.1. Recorrido o rango	34
4.3.1.2. Recorrido o rango intercuartílico	34
4.3.1.3. Índice de Gini	35
4.3.1.4. Desviación absoluta media	35
4.3.1.5. Varianza	36
4.3.1.6. Desviación típica o estándar	37
4.3.2. Medidas de dispersión relativas.....	38

4.4. Medidas de forma	39
4.4.1. Coeficientes de Asimetría	40
4.4.2. Coeficiente de Apuntamiento o Curtosis	42
5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA.....	44
5.1. Importancia de las matemáticas. Actitud de los alumnos hacia ellas	44
5.2. Importancia de la alfabetización y formación Estadística	44
5.3. Cómo enseñar y cómo aprender Estadística. Dificultades	46
5.4. Importancia de la media. Errores, conflictos y dificultades.....	48
5.5. Medidas de dispersión y su visión en el aula	50
6. UNIDAD DIDÁCTICA.....	51
6.1. Título de la unidad.....	51
6.2. Justificación.....	51
6.3. Contextualización del centro y del aula.....	52
6.3.1. Disposición y características del centro	52
6.3.2. Instalaciones disponibles	53
6.3.3. Personal del centro.....	54
6.3.4. Disposición del aula	54
6.4. Objetivos.....	54
6.4.1. Objetivos generales de etapa.....	54
6.4.2. Objetivos específicos de área.....	56
6.4.3. Objetivos específicos de la Unidad Didáctica.....	57
6.5. Competencias clave.....	59
6.6. Contenidos.....	61
6.7. Metodología.....	64
6.8. Actividades y recursos	66
6.8.1. Actividades	66
6.8.2. Recursos.....	67
6.9. Atención a la diversidad	68
6.10. Temporalización	68
6.10.1. Programación de aula	69
6.11. Evaluación.....	76
6.11.1. Criterios e instrumentos de evaluación	76
7. CONCLUSIONES.....	79
8. BIBLIOGRAFÍA.....	81

Anexo I: Ejercicios para realizar durante el tema.....	84
Anexo II: Ejercicios de repaso.....	102
Anexo III: Actividad de investigación.....	110
Anexo IV: Prueba de evaluación.....	114
Anexo V: Actividades para la atención a la diversidad.....	116

RESUMEN

El presente Trabajo Fin de Máster, realizado en la Universidad de Jaén, correspondiente a la especialidad de Matemáticas, que forma parte del programa de estudios del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, tiene como objetivo plasmar las competencias y conocimientos adquiridos y poder así, llegar a ser una docente comprensiva y motivadora. Tras analizar libros de texto, utilizados para trabajar en centros educativos, y del currículo actual, se desarrolla el tema de "Parámetros estadísticos. Cálculo, significado y propiedades" perteneciente al temario oficial de oposiciones. Posteriormente, se trabajan investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y Estadística. Por último, se elabora una Unidad Didáctica, para el curso de 4º de Educación Secundaria Obligatoria, enfocada a alcanzar objetivos propuestos y desarrollar contenidos que se establecen en los documentos oficiales. Para ello, se utilizan diferentes metodologías y se proponen distintos tipos de actividades.

Palabras clave: Matemáticas, Estadística, parámetros, alumnado aprendizaje, unidad didáctica.

ABSTRACT

The present Master's Degree Work carried out at the University of Jaén, corresponding to the specialty of Mathematics, which is part of the curriculum of the Master's Degree in Compulsory Secondary Education, Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching aims to capture the skills and knowledge acquired and thus, become a comprehensive and motivating teacher. After analyzing textbooks used in schools, and the current curriculum, the topic "Statistical parameters: Calculation, meaning and properties" belonging to the official agenda of the public exam for high school teachers is developed. Subsequently, an analysis of research on the teaching and learning of Mathematics and Statistics is carried out. Finally, a teaching unit is developed for the 4th year of Compulsory Secondary Education focused on achieving the proposed objectives and developing contents that are set out in the official documents. To do this, different methodologies are used and different types of activities are proposed.

Keywords: Mathematics, Statistics, parameters, student body, learning, teaching unit.

En todo este Trabajo Fin de Máster se empleará el masculino genérico incluyendo a ambos sexos, tal y como se aconseja en la Real Academia Española.

1. INTRODUCCIÓN

La Estadística es una rama de las Matemáticas cada vez más esencial en nuestras vidas. A diario nos encontramos con toma de decisiones que hacemos a partir de un determinado pensamiento, el cual, sin saberlo es un pensamiento estadístico, tras analizar de forma casi inconsciente información o datos de nuestro día a día. Un buen conocimiento estadístico hace que la persona sea más crítica a la hora de procesar o interpretar información, comprenda mejor las noticias de los medios de comunicación o simplemente sepa administrar su economía.

Con este Trabajo de Fin de Máster, realizado en la Universidad de Jaén, se pretende plasmar todos los conocimientos y competencias adquiridas durante el Máster de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.), Formación Profesional (F.P.) y Enseñanza de Idiomas para llegar a ser unos buenos profesionales de la educación y sepamos transmitir con entusiasmo, paciencia y sabiduría los conocimientos de la competencia en la que estamos especializados. Como dice César Bona, profesor de entre los 50 mejores del mundo, *“maestro es alguien que inspira para la vida”*.

Debemos ser capaces de hacer que los alumnos reciban un aprendizaje adecuado y dinámico, que consigan estar preparados y motivados para enfrentarse a problemas de la vida diaria, de forma autónoma, con compañeros y con ideas críticas y reflexivas, respetando sus valores y evitando crear un aprendizaje y una enseñanza monótona que carezca de innovación y de los maravillosos recursos que por suerte dispone la escuela de hoy.

Tras hacer un análisis del currículo y de libros de texto utilizados en diferentes centros educativos, se constituye así la fundamentación curricular. Una vez realizado dicho análisis, se ha pasado a la elaboración del tema 60 (“Parámetros estadísticos. Cálculo, significado y propiedades”) del temario oficial de oposiciones. Seguidamente, se ha hecho un estudio sobre algunas investigaciones sobre la importancia de la Estadística y el aprendizaje y enseñanza de los parámetros estadísticos, así como posibles dificultades que pueden encontrar el alumno y el profesor. Por último, se ha pasado a la elaboración de una unidad didáctica enfocada a la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para el curso 4º de Educación Secundaria Obligatoria, de título “Estadística” y acorde a la contextualización del centro y del aula, teniendo en cuenta los objetivos, contenidos y competencias clave que vienen recogidos en la documentación requerida, así como diferentes metodologías que harán más innovador el desarrollo de las clases. Además, se plantean una serie de actividades que permitirán alcanzar los objetivos propuestos. Con la unidad didáctica realizada, se pretende que el alumno se acerque a la Estadística y que se vaya educando en ella.

Debido a la situación del Covid-19 que nos ha tocado vivir, no hemos podido realizar las prácticas de forma presencial como viene siendo habitual, sino que lo hemos hecho de

forma online. A pesar del estado de incertidumbre y temor que estamos viviendo, pienso que ha sido una oportunidad para ver cómo se trabaja con el alumnado de una forma totalmente diferente a la que se ha venido haciendo hasta ahora y distinta a la idea de clase que nos han presentado en el máster. Ha sido una experiencia inusual y a su vez, muy enriquecedora.

2. OBJETIVOS

El objetivo general que se persigue mediante la ejecución de este Trabajo Fin de Máster se apoya en saber aplicar e incorporar los conocimientos, habilidades y competencias adquiridas en el desarrollo del Máster y plasmarlas en la Unidad Didáctica y en los diferentes apartados que forman el trabajo. Como objetivos específicos tenemos:

- Investigar y comparar diferentes investigaciones sobre las Matemáticas y Estadística en la sociedad y en la enseñanza, así como estudiar las aportaciones que realizan diversos autores.
- Hacer referencia a posibles dificultades que pueden encontrar los alumnos en el aprendizaje de esta materia y las que pueden encontrar los docentes en su enseñanza.
- Elaborar el tema de “Parámetros estadísticos. Cálculo, significado y propiedades” del temario oficial dispuesto para las oposiciones a profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, con el suficiente rigor matemático y de forma lógica y clara.
- Comparar dos libros de texto utilizados en clase de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º de E.S.O. de forma objetiva, acorde con la legislación educativa vigente y el perfil del alumnado al que van destinados los conocimientos.
- Desarrollar una Unidad Didáctica y la contextualización del centro en la que se va a implementar. Además de los objetivos, competencias clave, contenidos y metodología que la forman.
- Actividades orientadas para una buena adquisición de los conocimientos por parte del alumnado, con ejercicios prácticos, de investigación y uso de las TIC, con las correspondientes adaptaciones curriculares necesarias para llevar a cabo una apropiada atención a la diversidad.
- Desarrollar una temporalización y evaluación adecuadas y realistas.
- Ser capaz de transmitir a los alumnos la Estadística como una ciencia importante y esencial en el día a día, y hacerles ver que todo lo que nos rodea tiene parte de ella.

3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

En la fundamentación curricular vamos a analizar, en primer lugar, el currículo de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, centrándonos en el bloque de Estadística y Probabilidad. Para ello, vamos a consultar la normativa oficial vigente de ámbito nacional y autonómico.

En segundo lugar, con objeto de analizar algunos de los libros de texto de la asignatura antes mencionada, nos basaremos en uno de la editorial Anaya, de Cólera et al. (2016), utilizado en las clases de un instituto público y en uno cuya editorial es Edelvives de Mejía et al. (2016), empleado en las lecciones de un centro educativo concertado.

3.1. Análisis del currículo escolar

Para llevar a cabo el análisis del currículo escolar, procedemos a consultar la normativa establecida en la proyección didáctica, distinguiendo entre las pautas a nivel nacional y autonómico.

✎ Nivel nacional:

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, podemos encontrar la normativa que compone el currículo básico a nivel estatal de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Concretamente, nos apoyaremos en la normativa correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria para la realización de esta unidad.

El artículo 6 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), fue modificado por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, *para definir el currículo como la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas*. El currículo está formado por objetivos, tanto de cada enseñanza como de cada etapa educativa, las competencias, los contenidos, la metodología didáctica, los estándares de aprendizaje y los criterios de evaluación.

La Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, es de esencial cumplimiento para el desarrollo de las competencias clave. En ella, *se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato*.

En el Real Decreto 310/2016, de 29 de julio, a partir del cual se regulan las evaluaciones finales de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, centrándonos en el capítulo II referido a Educación Secundaria Obligatoria, encontramos los principios generales, objetivos y la organización general. En este trabajo prestamos atención al artículo 14,

que nos aporta la organización del cuarto curso, mostrándonos las diferentes opciones de enseñanza posibles: enseñanzas académicas o enseñanzas aplicadas, así como las diferentes materias que tienen que cursar en cada opción. Por último, los artículos 20 al 23 se centran en la evaluación, promoción y obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria.

En lo que se refiere a la asignatura de Matemáticas, en los cursos 3º y 4º, se divide en dos itinerarios distintos, por un lado, están las orientadas a las enseñanzas aplicadas y por otro a las enseñanzas académicas. La Estadística es enfocada y aplicada de manera diferente en cada tipo, sin embargo, los contenidos son iguales. Centrándonos en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, se exponen los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para los cursos de 3º y 4º de E.S.O. para los cinco bloques en cada curso: procesos, métodos y actitudes en matemáticas, números y álgebra, geometría, funciones y estadística y probabilidad (en el que está contenida la unidad desarrollada en este TFM).

☞ Nivel Autonómico:

En cuanto a nivel autonómico, la ley vigente en Andalucía es la LEA (Ley de Educación de Andalucía), Ley 17/2007, de 10 de diciembre. El decreto 111/2016, de 14 de junio, establece la ordenación y el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria de la comunidad andaluza, por lo que también hay que ajustarse a su cumplimiento.

A su vez, en la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la comunidad autónoma de Andalucía, se ajustan aspectos concretos de la atención a la diversidad y se implanta la ordenación de la evaluación en el proceso de aprendizaje del alumnado.

3.2. Análisis de los libros de texto

Para el análisis de los libros de texto, se han seleccionado dos de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º de E.S.O., de editoriales diferentes, concretamente Anaya y Edelvives. El tema que se analiza es el de "Estadística", igual nombre en ambos textos, sólo que en el libro de Anaya dicho tema se corresponde con la unidad 9 y en el libro de Edelvives se corresponde con la unidad 12.

3.2.1. Ajuste de los contenidos a la normativa actual

En el bloque 5 de Estadística y Probabilidad, los contenidos relacionados con la unidad didáctica a la que nos dirigimos y que se deben impartir en Matemáticas orientadas a

las enseñanzas académicas, son entre otros, según el Real Decreto 1105/2014, los siguientes:

- Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística. Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.
- Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.
- Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización.
- Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
- Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.

En la Tabla 1 se muestra la estructura los contenidos de cada libro dentro de la unidad didáctica objeto de estudio.

Observamos que hay notables diferencias en la manera de estructurar los contenidos de la unidad didáctica entre ambos libros de las diferentes editoriales. La mayor diferencia está en la distinción que se hace entre la estadística unidimensional y la bidimensional en el tema 12 de la editorial Edelvives. En este se distinguen dos grandes puntos diferenciados de forma clara, dedicados a estadística unidimensional y estadística bidimensional, respectivamente. En el caso del libro de editorial Anaya, le dedica un tema entero a la estadística bidimensional (tema 10, sobre distribuciones bidimensionales), no haciendo referencia alguna en este tema 9. Sin embargo, en el libro de Edelvives ya no trabajan más la estadística bidimensional (el tema posterior se dedica a combinatoria).

Otra disimilitud es que, en el libro de la editorial Anaya, se empieza a estudiar la estadística inferencial, en el caso del otro libro no.

Por otra parte, se explican tres tipos de gráficas estadísticas en Edelvives, sin embargo, en el tema de Anaya, solo se explica el diagrama de cajas, aunque hay que destacar que se hace de forma detallada y en él se utilizan las medidas de posición, cosa que, en el diagrama de barras, histograma y en el diagrama de sectores, la mediana y los cuartiles no interviene para nada. El hecho de incluir solo el diagrama de cajas puede ser apropiado porque sirve para entender y apoyar los conceptos de las medidas de posición.

Tabla 1: Contenidos correspondientes a las unidades en estudio

EDITORIAL EDELVIVES	EDITORIAL ANAYA
Tema 12. Estadística	Tema 9. Estadística
CONTENIDOS	
1. Etapas de un estudio estadístico	1. La estadística y sus métodos
2. Estadística unidimensional	- Nociones generales
2.1. Tabla estadística unidimensional	- Fases y tareas de un estudio estadístico
2.2. Gráficas estadísticas. Falacias	2. Tablas de frecuencias
2.3. Parámetros unidimensionales	- Tablas con datos aislados
3. Estadística Bidimensional	- Tabla con datos agrupados
3.1. Tabla estadística bidimensional	3. Parámetros estadísticos: \bar{x} y σ
3.2. Diagrama de dispersión o nube de puntos	4. Parámetros de posición para datos aislados
4. Dependencia aleatoria y funcional	- Mediana y cuartiles
5. Correlación entre dos variables	- Percentiles (o centiles)
6. Coeficiente de correlación lineal. Interpretación	- Frecuencias acumuladas
7. Regresión lineal. Rectas de regresión	- Obtención de percentiles en tablas de frecuencias
	5. Parámetros de posición para datos agrupados
	- Polígono de frecuencias acumuladas
	- Cálculo de percentiles a partir del polígono de porcentajes acumulados
	6. Diagramas de cajas
	7. Estadística inferencial
	- Por qué se recurre a las muestras
	- Tamaño de la muestra
	- La muestra a de elegirse al azar
	- Conclusiones que se obtiene de una muestra

Fuente: Elaboración propia

Por último, en el libro de Edelvives, se estudia en la misma unidad didáctica que se trabaja con los parámetros estadísticos, la dependencia aleatoria y funcional, la

correlación entre dos variables y el coeficiente de correlación lineal y regresión lineal. Por el contrario, y como he dicho anteriormente, en el libro de Anaya se trabaja en el tema siguiente y de forma más concisa.

Particularmente considero que el tema de Anaya, tiene una mejor estructura para definir y explicar los parámetros de posición tanto para datos aislados como agrupados, pienso que este libro se ajusta mejor a los contenidos y por supuesto, al currículo de la asignatura. Además, creo que al dedicar de forma exclusiva un tema para parámetros en variables discretas y continuas describe todo de forma más detallada y completa.

3.2.2. Definición de conceptos clave

A continuación, veremos cómo se definen y se estudian los conceptos más importantes de las medidas de centralización y dispersión, uno de los contenidos expuesto en el currículo y que se debe impartir.

En primer lugar, vamos a comentar las diferencias existentes entre cada libro con respecto a la explicación dedicada a cada una de las medidas de centralización, a partir de la Tabla 2. Es importante señalar que, en el libro de Edelvives, en la sección dedicada a los parámetros estadísticos, empieza con una definición de estos y distingue entre parámetros de centralización y dispersión. Por el contrario, en el otro libro de texto, da una explicación de para qué sirven los parámetros, pero no se distingue entre parámetros de centralización y dispersión.

Tabla 2: Cómo se desarrollan los parámetros de centralización

PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN	
Libro de editorial Edelvives	Libro de editorial Anaya
<ul style="list-style-type: none"> • Media: se aporta una definición de media y cómo se obtiene. En la parte derecha, se observa un recuadro donde viene reflejada la fórmula: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{N}$ No hay ejemplo • Mediana: La mediana viene definida dentro del mismo apartado de parámetros unidimensionales y concretamente 	<ul style="list-style-type: none"> • Media: directamente nos encontramos con la fórmula, no hay definición. En este caso, la obtención de la media se hace a partir de las frecuencias relativas (f_i): $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ Seguidamente, realiza un ejemplo del cálculo de la media con los datos de una distribución aportados en el margen. • Mediana: La mediana viene puesta en un apartado

<p>dentro de los parámetros de centralización. No hay ejemplo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Moda: explicada de la misma forma a como lo hacen con la mediana. • Cuartiles: dan, solamente, la definición. • Percentiles y centiles: no aparecen 	<p>diferente al de la media, se explica junto con los cuartiles, en el apartado de parámetros de posición para datos aislados, para los que también viene una explicación de lo que nos aportan. Podemos encontrar dos ejemplos para el cálculo de la mediana.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Moda: no aparece. • Cuartiles: exponen la definición y con los mismos ejemplos utilizados para el cálculo de la mediana, nos muestran cómo calcularlos. • Percentiles y centiles: se desarrollan de igual manera que los cuartiles, también con un ejemplo. Además, también se le dedica una parte a la obtención de percentiles en tablas de frecuencias.
---	--

Fuente: Elaboración propia

Con la ayuda de la Tabla 3, vamos a ver cómo son definidas las medidas de dispersión.

Tabla 3: Forma en la que se presentan las diferentes medidas de dispersión

PARÁMETROS DE DISPERSIÓN	
Libro de editorial Edelvives	Libro de editorial Anaya
<ul style="list-style-type: none"> • Varianza: se da la definición de la varianza y una breve referencia de su interpretación. La fórmula proporcionada es: $V = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 n_i}{N} - \bar{x}^2$ No hay ejemplo. • Desviación típica: se da una pequeña indicación de qué es y que sus unidades son las mismas que la de los datos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Varianza: no se ofrece una definición, sino que se limita a diferenciar entre las dos fórmulas aportadas. $Var = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$ O bien $Var = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none">• Recorrido o rango: breve definición y forma de calcularlo.• Coefficiente de variación: encontramos la definición y la fórmula. No hay ejemplo. | <p>A continuación, se realiza un ejemplo, donde dan las frecuencias acumuladas y, por tanto, es mejor el uso de la segunda fórmula.</p> <ul style="list-style-type: none">• Desviación típica: Igual que en el libro de Edelvives, sólo que lo ejemplifica calculando la raíz de la varianza obtenida en el ejercicio anterior.• Recorrido o rango: No aparece• Coefficiente de variación: muestra la explicación de para qué se utiliza, la fórmula y un ejemplo. |
|---|---|

Fuente: Elaboración propia

La principal diferencia reside en la cantidad de ejemplos que propone la editorial Anaya tras la explicación de cada concepto. Además, hay que indicar, que dedica toda una página para un ejercicio resuelto donde se aportan los datos de una distribución continua de pesos y efectúan los cálculos de forma desarrollada y detallada de los conceptos estudiados en ese apartado (media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación), así como una explicación sobre la elaboración de la tabla de frecuencias. También dedica una parte al trabajo con la calculadora, donde indica el modo que nos permite realizar dichas operaciones y los pasos que hay que seguir. Para la mediana y los cuartiles, también realiza otro ejemplo, además del ya indicado anteriormente. Al final del tema hay otro ejercicio resuelto relacionado con estos parámetros, entre otros, que engloba a todos los contenidos de la unidad.

Es necesario indicar, que en el libro de Edelvives se dan más definiciones de los distintos parámetros, pero no hay ejemplos resueltos para que los alumnos vean cómo se aplican esas definiciones.

Por lo que respecta a las actividades propuestas, el libro de Edelvives sólo propone dos actividades para la práctica de estos conceptos después de la explicación correspondiente y cuatro más en las actividades de repaso final. Las demás que contiene la unidad son de estadística bidimensional, de dependencia aleatoria y funcional, etc. El libro de Anaya plantea tres ejercicios tras la explicación correspondiente y al final del tema podemos encontrar muchos más.

Indicar, que lo detallado anteriormente de los libros de Anaya y Edelvives, no sólo se da en el/los apartados de parámetros, sino que toda la unidad está estructurada de la forma que se indica en los Gráficos 1 y 2.

Gráfico 1: Ejemplos, actividades y problemas planteados en el libro de Anaya



Fuente: Elaboración propia

Gráfico 2: Ejemplos, actividades y problemas planteados en el libro de Edelvives



Fuente: Elaboración propia

Cuando hablo de ejemplos, me refiero a los que son utilizados durante la explicación de los conceptos. Claramente, el libro de Anaya, presenta muchos ejemplos más que el de Edelvives como hemos indicado anteriormente. Punto a favor que permite a los alumnos ver de forma práctica los términos explicados y ver cómo se aplican.

Las actividades y problemas resueltos son propuestos durante el desarrollo del tema y al final de este, solucionados de forma desarrollada y detallada. Esto facilita a los alumnos un mayor entendimiento en el uso y explicación de lo estudiado, y así, tener una visión clara de los conceptos dados. El texto de Anaya presenta más como podemos ver en el Gráfico 1.

En los ejercicios y problemas propuestos indicados, diferencio entre los que están dentro del tema, es decir, los que se encuentran debajo de las explicaciones para que los alumnos practiquen y en ejercicios de repaso final, que están en las últimas páginas de la unidad. Edelvives proporciona unos pocos más de ejercicios.

Es necesario hacer una indicación sobre el libro de Anaya, en el que los ejercicios de repaso final no sólo se dividen en los apartados estudiados (como hace Edelvives), sino que también presenta problemas en secciones como: “aplica lo aprendido”, “resuelve problemas” o “reflexiona sobre la teoría” donde los ejercicios que se muestran son más teóricos y de razonamiento. En este libro, antes de la autoevaluación, se presenta además una página dedicada a “taller de matemáticas”. Aquí se presenta un ejercicio sobre la curva de Lorenz, que aun siendo un contenido fuera de programa, resulta interesante tanto formativo como culturalmente; y un “sabías que” en modo curiosidad. Por último, y respecto a los ejercicios de autoevaluación, se presentan en ambos libros al final del tema, y tienen más o menos igual número.

Para concluir, el libro de la editorial Anaya incluye más ejercicios y recursos en los que el alumno se puede apoyar. Un punto fuerte del tema de esta editorial son los contenidos que se ofrecen resueltos y desarrollados porque facilitan al alumno contextualizar los contenidos estudiados.

3.2.3. Uso de TIC en los diferentes libros

El libro de Edelvives, al final del tema y antes de los ejercicios de repaso final, dedica una sección a herramientas tecnológicas donde se centra en la estadística bidimensional con Excel. Tras la explicación, propone 10 ejercicios sobre lo explicado (estos ejercicios no van incluidos en los propuestos anteriormente).

El libro editado por Anaya, hace referencia en distintos apartados a lo largo del tema a apoyo y material que se puede encontrar en la web proporcionada por dicha editorial, sin embargo, no dedica ningún apartado a la realización de cálculo estadísticos con ningún software específico.

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

4.1. Introducción

Cuando tenemos un conjunto de datos de una población y queremos estudiar sus características en cuanto a posición, variabilidad, forma, etc. recurrimos al uso de los parámetros estadísticos, los cuales son útiles para describir toda la información de forma clara y precisa.

Los parámetros estadísticos nos permiten obtener valores característicos a partir de las siguientes medidas:

- Las medidas de posición, dentro de las cuales nos encontramos las medidas de tendencia central y las medidas de tendencia no central.
- Las medidas de dispersión, que se dividen en absolutas o relativas.
- Las medidas de forma.

Estos valores resultan aún más esenciales si no disponemos de apoyos de representación gráfica, que también nos aporten información.

En los siguientes apartados vamos a ver de forma detallada cada una de estas medidas.

4.2. Medidas de posición

Las medidas de posición permiten determinar la conducta general de una variable a partir de un fichero de datos, donde se encuentran reunidos los valores individuales. Estas medidas, se dividen en dos grandes grupos: medidas de tendencia central y medidas de tendencia no central.

4.2.1. Medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central representan el comportamiento general de los datos observados y localizan el centro de la distribución de frecuencias. Las medidas de centralización fundamentales son la media, entre ellas la aritmética, geométrica, armónica y cuadrática, la mediana y la moda.

4.2.1.1. Media aritmética

Definición: Sea X una variable estadística con distribución de frecuencia absoluta n_i , la media aritmética o generalmente conocida como media, denotada por \bar{x} , es definida por la siguiente expresión:

$$\bar{x} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + \dots + x_n n_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{N}$$

dónde N es el total de observaciones de la distribución.

Teniendo en cuenta que, la frecuencia relativa es $f_i = \frac{n_i}{N}$, la media aritmética también se puede expresar como:

$$\bar{x} = x_1f_1 + x_2f_2 + \dots + x_nf_n = \sum_{i=1}^n x_if_i$$

La media aritmética se caracteriza por la ponderación que cada valor de la variable realiza según su importancia relativa en la distribución.

Cuando nos encontramos con que la variable estadística es continua, es decir, los datos se disponen agrupados en intervalos, el modo en el que se representa la media aritmética sería de la misma forma que para el caso discreto, pero utilizando en este caso la marca de clase, esto es, el punto medio del intervalo.

Propiedades de la media aritmética:

- 1) La suma de las desviaciones de los valores de la variable respecto a su media es cero.

Demostración:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})n_i = \sum_{i=1}^n x_in_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n n_i = N \frac{\sum_{i=1}^n x_in_i}{N} - \bar{x}N = N\bar{x} - N\bar{x} = 0$$

■

- 2) Teorema de König: La media aritmética del cuadrado de las desviaciones de los valores de la variable respecto a una constante k cualquiera se hace mínima cuando dicha constante es igual a la media aritmética.

Demostración:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - k)^2 \frac{n_i}{N} &= \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x}) - (k - \bar{x}))^2 \frac{n_i}{N} \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \frac{n_i}{N} - 2(k - \bar{x}) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \frac{n_i}{N} + (k - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N} \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \frac{n_i}{N} - 2(k - \bar{x}) \cdot 0 + (k - \bar{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \frac{n_i}{N} + (k - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

por lo que $\sum_{i=1}^n (x_i - k)^2 \frac{n_i}{N}$ se hace mínima cuando $k = \bar{x}$, ya que en ese caso $(k - \bar{x})^2$ se anula. ■

- 3) Consideremos N observaciones agrupadas en R conjuntos con N_1, \dots, N_R observaciones cada uno y con medias $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_R$. Entonces la media general \bar{x} de todas las observaciones es:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 N_1 + \dots + \bar{x}_R N_R}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^R \bar{x}_j N_j$$

Demostración: Sean $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn_j}$ las N_j observaciones del grupo j ($j = 1, \dots, R$)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1N_1} + \dots + x_{R1} + x_{R2} + \dots + x_{RN_R}}{N} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_{1i} + \dots + \sum_{i=1}^{N_R} x_{Ri}}{N} = \frac{\bar{x}_1 N_1 + \dots + \bar{x}_R N_R}{N} \end{aligned}$$

- 4) Si a todos los valores x_i de una distribución $(x_i; n_i)$ se les suma (resta) una constante b , la media aritmética de la nueva distribución $(y_i; n_i)$ queda aumentada (disminuida) en esa constante. En otros términos, a la media aritmética le afectan los cambios de origen. ■

Demostración: Si $y_i = x_i \pm b$, la media aritmética de la variable Y será:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \pm b) n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{N} \pm b \frac{\sum_{i=1}^n n_i}{N} = \bar{x} \pm b$$

- 5) Si a todos los valores x_i de una distribución $(x_i; n_i)$ se les multiplica (divide) por una constante a , distinta de cero, la media aritmética de la nueva distribución $(y_i; n_i)$ queda multiplicada (dividida) por esa constante. Es decir, a la media aritmética le afectan los cambios de escala. ■

Demostración: Si $y_i = ax_i$, la media aritmética de la variable Y será:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n ax_i n_i}{N} = a \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{N} = a\bar{x}$$

■

- 6) Como consecuencia de las dos propiedades anteriores, si a una variable X se le aplica un cambio de origen b y un cambio de escala a , la media de la nueva variable $y = ax \pm b$ será

$$\bar{y} = a\bar{x} \pm b$$

Las principales ventajas que posee la media aritmética son las siguientes:

- En la realización de su cálculo, se tienen en cuenta todos los valores de la distribución; debido a esto, el centro de gravedad de la distribución es la media aritmética.
- Su cálculo es sencillo y resoluble. En esto último hay una excepción, si estamos ante una distribución continua, en la que los intervalos no son acotados, no se puede proceder al cálculo de la marca de clase, por lo que no se puede hallar la media.
- Es única.

Los principales inconvenientes:

- En algunas ocasiones, nos encontramos ante una insuficiente representatividad por parte de la media aritmética como consecuencia de la toma de valores de la variable anormalmente extremos, ocasionando una distorsión y ambigüedad de los resultados.

Veamos dos ejemplos para escenificar lo anterior:

Ejemplo 1:

$X \equiv$ número de personas que están trabajando en una familia.

x_i	n_i
0	4
1	9
2	11
3	2
4	1
5	1

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{N} = \frac{(0 \times 4) + (1 \times 9) + \dots + (5 \times 1)}{28} = \frac{46}{28} = 1,64 \text{ personas}$$

1,64 personas de media trabajan en una misma familia.

Ejemplo 2:

$X \equiv$ cantidad de activos en miles de euros

I_i	x_i (Marca de clase)	n_i	N_i
[42,48]	45	3	3
(48,54]	51	5	8
(54,60]	57	7	15
(60,66]	63	3	18
(66,72]	69	7	25

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{N} = \frac{1461}{25} = 58,44 \text{ Miles de } \text{€}$$

En promedio, hay unos activos financieros de 58.440€

4.2.1.2. Media geométrica

Definición: “La media geométrica de una distribución de frecuencias $(x_i; n_i)$, que se representa por G , se define como la raíz N -ésima del producto de los valores de la variable elevados a sus correspondientes frecuencias absolutas” (Montero, 2007).

$$G = \sqrt[N]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \dots x_n^{n_n}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^n x_i^{n_i}}$$

En la práctica, es frecuente tomar logaritmos de los valores de la variable, indistintamente logaritmos decimales o neperianos. Como resultado obtenemos que el logaritmo de la media geométrica es igual a la media aritmética.

Demostración:

$$\log G = \log \sqrt[N]{\prod_{i=1}^n x_i^{n_i}} = \log \left(\prod_{i=1}^n x_i^{n_i} \right)^{\frac{1}{N}}$$

Haciendo uso de las propiedades de los logaritmos,

$$\log G = \frac{1}{N} \log \left(\prod_{i=1}^n x_i^{n_i} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \log x_i^{n_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (\log x_i) n_i$$

Como resultado tenemos:

$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^n (\log x_i) n_i}{N}$$

■

Esta medida de tendencia central se suele utilizar para promediar porcentajes, tasas, números índices, etc., es decir, casos en que la variable representa valores acumulativos como indica Hernández (2007).

Una de las ventajas que nos proporciona la media geométrica es que, en su cálculo, intervienen todos los valores de la distribución.

Como inconveniente destacable es su falta de representatividad en el caso de que uno o varios de los valores sea 0, ya que esto conlleva a la nulidad de G . Otra desventaja ocurre cuando nos encontramos con casos en los que hay valores de la variable negativos, lo que podría implicar que no exista.

Vamos a ejemplificar lo anterior:

Ejemplo 3:

Los tipos de interés que ofrece una determinada entidad bancaria durante 4 años sucesivos para depósitos a plazos son 4'5, 5, 5'5 y 6%, respectivamente. Calcular el tipo de interés medio anual que ofrece la entidad.

$$\text{Año 1. } C_1 = C_0 + 0,045C_0 = 1,045C_0$$

$$\text{Año 2. } C_2 = C_1 + 0,05C_1 = 1,05C_1 = 1,05 \times 1,045C_0$$

$$\text{Año 3. } C_3 = C_2 + 0,055C_2 = 1,055C_2 = (1,055 \times 1,05 \times 1,045)C_0$$

$$\text{Suponiendo que } K = (1 + a)^3 C_0 \Rightarrow (1 + a)^3 C_0 = (1,055 \times 1,05 \times 1,045)C_0$$

$$(1 + a)^3 = (1,055 \times 1,05 \times 1,045) ; (1 + a) = \sqrt[3]{(1,055 \times 1,05 \times 1,045)}$$

$$1 + a = \sqrt[3]{1,055 \times 1,05 \times 1,045} ; 1 + a = \sqrt[3]{1,1576} ; 1 + a = 1,05 ; a \cong 0,05$$

El tipo de interés medio anual que ofrece el banco es del 5%

4.2.1.3. Media armónica

Definición: “La media armónica H de una distribución de frecuencias $(x_i; n_i)$ se define como la inversa de la media aritmética de los inversos de los valores de la variable” (Montero, 2007).

$$H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} n_1 + \frac{1}{x_2} n_2 + \dots + \frac{1}{x_n} n_n} = \frac{N}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} n_i}$$

La media armónica es utilizada en el promedio de velocidades, rendimientos, productividad, precios, cambios de divisas, etc. En general, su implicación se da cuando las unidades de medida de la variable analizada se muestran a modo de cociente.

Como en las medias anteriormente vistas, en la media armónica también se encuentra la ventaja de que participan todos los valores. Por otro lado, esta media carece de sentido cuando un valor de la distribución es nulo.

Para explicar lo anterior, veamos un ejemplo a partir de la siguiente situación:

Ejemplo 4:

Cinco fincas de olivos, con igual número de hectáreas, han producido 8250, 7900, 8100, 7200 y 7815 kilos de aceituna con unos rendimientos netos de 16'9, 17, 18'1, 20 y 21'7 de aceite de oliva. Calcular el rendimiento medio.

x_i	n_i	n_i/x_i
16'9	8250	488'166
17	7900	464'706
18'1	8100	447'514
20	7200	360'000
21'7	7815	360'138

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} n_i} = \frac{1}{\frac{1}{39265} 2120'524} = \frac{39265}{2120'524} = 18'517$$

El rendimiento medio es de 18,517%.

4.2.1.4. Media cuadrática

Definición: *La media cuadrática de una distribución de frecuencias ($x_i; n_i$) denotada por Q , se define como la raíz cuadrada de la media de los elementos del conjunto de valores al cuadrado.*

$$Q^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 f_i \implies Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 f_i} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 n_i}$$

La media cuadrática se suele utilizar en el cálculo de errores o distancias. Sirva de ejemplo la siguiente situación:

Ejemplo 5:

Se tienen cuatro parcelas cuadradas de lados 2, 4, 9 y 12 metros, respectivamente. Se requiere hallar el lado de la parcela que tiene área media.

$$Q = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 n_i} = \sqrt{\frac{1}{4} (2^2 + 4^2 + 9^2 + 12^2)} = 7,83m$$

El lado de la parcela que tiene área media es de 7,83 metros

RELACIÓN EXISTENTE ENTRE LAS MEDIAS

La relación existente entre las medias es:

$$H \leq G \leq \bar{x} \leq Q$$

Ejemplo 6:

Calcular la relación existente entre las medias de los siguientes números: 2, 5, 7 y 9.

$$\text{Media aritmética: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{N} = \frac{2+5+7+9}{4} = \frac{23}{4} = 5,75$$

$$\text{Media Geométrica: } G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^n x_i^{n_i}} = \sqrt[4]{2 \times 5 \times 7 \times 9} = \sqrt[4]{630} = 5,01$$

$$\text{Media Armónica: } H = \frac{N}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} n_i} = \frac{4}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}} = \frac{4}{0,954} = 4,19$$

$$\text{Media Cuadrática: } Q = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 n_i} = \sqrt{\frac{4+25+49+81}{4}} = \sqrt{39,75} = 6,30$$

Podemos observar que calculando todas las medias para el mismo grupo de datos se cumple la relación existente entre ellas: $H \leq G \leq \bar{x} \leq Q$.

4.2.1.5. Mediana

Definición: Se define la función de distribución, $F(x)$ como la proporción de elementos en la muestra menores o iguales a x . La mediana, Me , es el primer valor para el cual $F(Me) \geq \frac{1}{2}$.

Montero (2007) afirma que "suponiendo que los valores de la variable están ordenados de menor a mayor, la mediana se define como aquel valor que divide la distribución de frecuencias de forma que el número de frecuencias que quedan a su izquierda es igual al número de las que quedan en su derecha". Por tanto, la mediana es el menor valor que verifica que $F(Me) \leq \frac{1}{2}$ y $F(Me) \geq \frac{1}{2}$; cumpliéndose tanto para variables discretas como para continuas.

Propiedades de la mediana:

- 1) A diferencia de la media, la mediana no dispone de propiedades para ser utilizada en desarrollos algebraicos.
- 2) La mediana no se ve afectada por los valores extremos, debido a que, en su cálculo, solo influyen los valores centrales.
- 3) La aplicación de la mediana se ve limitada ya que sólo tiene en cuenta el orden de los datos y no se ve afectada por alguna característica que puedan poseer los datos como, por ejemplo, la dispersión.

Se debe hacer una distinción para el cálculo de la mediana según si la variable es discreta o continua.

➤ Variable discreta.

El primer paso para calcular la mediana es ordenar las observaciones de menor a mayor. Una vez ordenados los valores, podemos estar ante dos situaciones.

Una primera situación ocurre cuando disponemos de pocos datos; es entonces, cuando podemos pasar al cálculo de la mediana. Si tenemos un número impar de valores, la mediana sería el valor central. En cambio, si estamos ante un número par de datos, la mediana es la media de los valores que ocupan el centro de la distribución.

La otra situación se da cuando el número de datos es mayor y, por tanto, requiere que los valores se dispongan en forma de tabla con sus frecuencias correspondientes. El valor $N/2$ buscado en las frecuencias absolutas acumuladas (F_i) que deje la mitad de las observaciones por debajo de él, es la mediana.

Haciendo distinción en el número de observaciones, si es par, puede que $N_i = N/2$, por tanto, x_i y x_{i+1} son las dos observaciones (valores) que ocupan las posiciones centrales de los datos, por tanto, la mediana sería el punto medio de ambos valores.

$$Me = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Si $N_i \neq N/2$, entonces, el valor x_i que se corresponda con la F_i cuya $N_i > N/2$ ocupa una posición central, es la mediana. Por tanto, en ese caso sería como la misma forma anterior o, en cualquier caso $Me = x_i$.

➤ Variable continua.

Dado que las observaciones de la distribución se encuentren agrupadas en intervalos, estaríamos ante un intervalo mediano en lugar de un valor mediano. Dentro del

intervalo mediano establecido hay que determinar un valor que se corresponda con la mediana. Este valor, no se puede hallar de forma exacta, ya que en los intervalos se desconocen los valores numéricos que toma la variable.

Para aproximar el valor de la mediana, se considera que todos los valores del intervalo están distribuidos de manera uniforme dentro de él, se puede aproximar la mediana a partir de la siguiente fórmula de interpolación:

$$Me = L_{i-1} + \frac{\frac{N+1}{2} - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

donde L_{i-1} es el extremo inferior del intervalo y a_i es la amplitud del intervalo.

No podemos olvidar que estamos ante una medida de centralización, donde sólo intervienen los valores centrales de la variable, quedando indiferente a los valores extremos. Ésta es una ventaja que presenta la mediana, ya que incluso puede llegar a ser más representativa que la media cuando la población es muy dispersa.

Como inconveniente, destacamos cuando nos encontramos con una cantidad elevada de datos no agrupados, el tratamiento de estos para proceder a ordenarlos puede llevar mucho tiempo y acarrear equivocaciones si se hiciera de forma manual, sin embargo, lo habitual hoy en día es hacerlo con ordenador.

4.2.1.6. Moda

Definición: La moda, Mo , es el valor de la variable más frecuente, es decir, aquel que presenta una mayor frecuencia absoluta (n_i) o relativa (f_i).

En algunas distribuciones, puede haber diferentes valores que presenten la máxima frecuencia, por tanto, estamos ante una distribución con varias modas, llamada distribución plurimodal, pudiendo ser ésta a su vez bimodal (dos modas), trimodal (tres modas), etc.

Para el cálculo de la moda en variables discretas, es decir, en variables donde nos encontramos los datos sin agrupar, sólo basta con mirar qué valor es el que más se repite de la variable. Pongamos por caso el ejemplo 1, cuya variable es discreta, vemos que el valor que tiene una mayor frecuencia absoluta es 2, por tanto, es el valor modal ($Mo=2$). Es decir, dos suelen ser el número de miembros que trabajan en una familia.

En el caso de variables continuas, cuya distribución está agrupada en intervalos, es imprescindible seleccionar el intervalo modal, para a continuación, determinar la moda en dicho intervalo.

Para conjuntos de valores de igual amplitud, Hernández (2007) *define el intervalo modal como el de mayor frecuencia por unidad de amplitud*. Cabe la posibilidad de que haya varios intervalos modales y, por lo tanto, varias modas.

Aunque existen algunos criterios para hallar la moda dentro del intervalo modal, una solución lógica es la de seleccionar como moda el punto medio del intervalo. También, para un cálculo más exacto, podemos recurrir a la fórmula obtenida por proporcionalidad:

$$Mo = L_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}} a_i$$

dónde, $h_{i-1} = n_i - n_{i-1}$ y $h_{i+1} = n_i - n_{i+1}$

En cambio, cuando los intervalos tienen distinta amplitud, el intervalo modal se considera aquél que, por unidad de intervalo, tiene más frecuencia, es decir, una densidad de frecuencia superior $\left(d_i = \frac{n_i}{a_i}\right)$.

Tras determinar el intervalo modal, aproximamos el valor de la moda a partir de la siguiente expresión:

$$Mo = L_{i-1} + \frac{k_{i-1}}{k_{i-1} + k_{i+1}} a_i$$

dónde, $k_{i-1} = d_i - d_{i-1}$ y $k_{i+1} = d_i - d_{i+1}$

Como ventajas que posee la moda podemos destacar principalmente dos:

- Su cálculo e interpretación son muy sencillos.
- La moda tiene la peculiaridad de que puede ser calculada para variables cualitativas, ya que solo depende de las frecuencias.

Como inconveniente podemos decir que, si se producen grandes variaciones en los datos distintos al valor de la moda, ésta no se ve afectada, no refleja esas variaciones.

4.2.2. Medidas de tendencia no central

Las medidas de tendencia (o posición) no central son parámetros estadísticos que, como su propio nombre indica, no proporcionan ninguna información sobre la tendencia central de la muestra. Los cuantiles son una medida que no van a reflejar ningún valor necesariamente central.

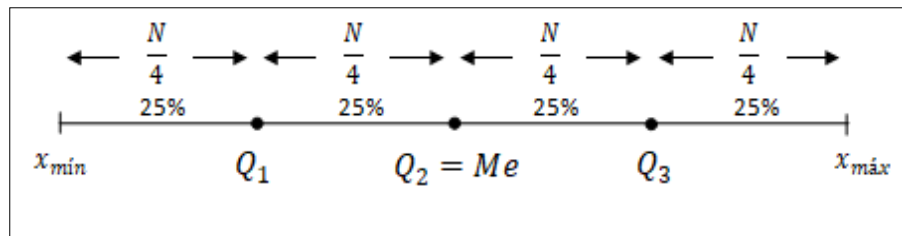
Definición: *Los cuantiles son los valores de la variable que dividen la muestra en intervalos con un mismo número de observaciones. Sea $F(x)$ la función de distribución de la variable X y α un valor entre 0 y 1, se define el cuantil de orden α a la cantidad C_α que verifica la siguiente igualdad:*

$$F(C_\alpha) = \alpha$$

Los cuantiles más frecuentes son:

- Los Cuantiles (Q_i), son tres valores (Q_1, Q_2 y Q_3) que dividen la población alineada en cuatro intervalos que contienen el mismo número de valores, es decir, cada uno incluye el 25% de las observaciones de la distribución, por lo que en cada intervalo encontramos $\frac{N}{4}$ observaciones. Un caso concreto de cuantil, que, además, coincide con el cuartil dos (Q_2) y por tanto, divide la muestra en dos partes iguales es la mediana.

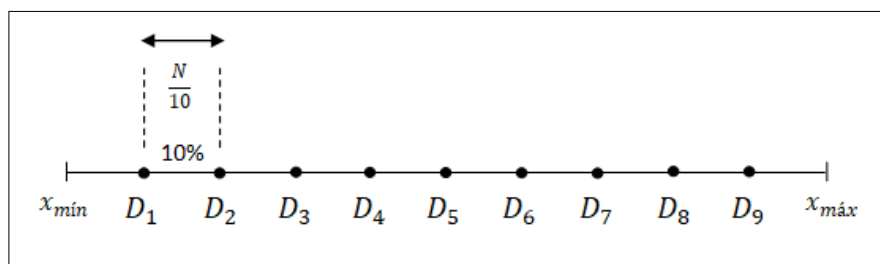
Gráfico 3: Esquema de los cuantiles



Fuente: Elaboración propia

- Los deciles (D_i), son nueve valores (D_1, D_2, \dots, D_9), los cuales segmentan la población en diez intervalos iguales. Cada parte implica el 10% de la distribución, es decir, en cada intervalo encontramos $\frac{N}{10}$ observaciones. En este caso, el decil cinco, coincide con el cuartil dos que, como hemos indicado anteriormente, coincide con la mediana $Me = Q_2 = D_5$.

Gráfico 4: Esquema de los deciles



Fuente: Elaboración propia

- Los percentiles (P_i), son noventa y nueve valores ($P_1, P_2, P_3, \dots, P_{99}$) que dividen la población en cien intervalos iguales. En cada una de las partes o intervalos se encuentra $\frac{N}{100}$ observaciones.

Gráfico 5: Esquema de los percentiles



Fuente: Elaboración propia

Para el cálculo de los cuantiles es necesario que las observaciones estén ordenadas de menor a mayor, como ocurre con la obtención de la mediana.

Si estamos ante una situación con variables de tipo discreto, para el cálculo de los cuantiles basta con aplicar lo visto anteriormente. Veamos, con los datos del ejemplo 1, como se hallan los cuantiles. En este caso, vamos a calcular el cuartil tres (Q_3), el decil cuatro (D_4) y el percentil noventa y uno (P_{91}).

x_i	n_i	N_i
0	4	4
1	9	13
2	11	24
3	2	26
4	1	27
5	1	28

$$N \frac{i}{4} = 28 \frac{3}{4} = 21 \rightarrow Q_3 = 2$$

$$N \frac{i}{10} = 28 \frac{4}{10} = 11,2 \rightarrow D_4 = 1$$

$$N \frac{i}{100} = 28 \frac{91}{100} = 25,48 \rightarrow P_{91} = 3$$

Para el caso de las variables de tipo continuo, Hernández (2007) distingue entre dos casos que se pueden dar:

- Si la frecuencia acumulada N_α hasta el cuantil C_α , se encuentra en la columna de frecuencias acumuladas, $N_i = N_\alpha \Rightarrow C_\alpha = L_i$, siendo L_i el extremo superior del intervalo que corresponde a la frecuencia acumulada N_i .
- Si el valor N_α no se haya en la columna de las frecuencias acumuladas, suponiendo una distribución uniforme de las observaciones dentro de cada clase, el cuantil será calculado a partir de la siguiente expresión:

$$C_\alpha = L_{i-1} + \frac{N_\alpha - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

donde a_i es la amplitud del intervalo correspondiente a la frecuencia acumulada $N_i > N_\alpha$, así como, N_{i-1} es la frecuencia absoluta acumulada de las observaciones menores de dicho intervalo y, por último, n_i la frecuencia absoluta correspondiente a dicho intervalo.

Con el siguiente ejemplo, vamos a ilustrar el cálculo de los cuantiles en variables de tipo continuo.

Ejemplo 7:

Hallar la cantidad de activos máxima no superada por el 60% y el 70% de las empresas.

$X \equiv$ cantidad de activos en miles de euros

I_i	x_i	a_i	n_i	N_i
[42,48]	45	6	3	3
(48,54]	51	6	5	8
(54,60]	57	6	7	15
(60,66]	63	6	3	18
(66,72]	69	6	7	25

El valor que nos piden es el percentil sesenta (P_{60}) y setenta (P_{70})

$$N \frac{i}{100} = \frac{25 \cdot 60}{100} = 15 \Rightarrow \text{Vemos que } N_\alpha = N_i = 15 \Rightarrow P_{60} = 60 \text{ mil } \text{€}$$

$N \frac{i}{100} = \frac{25 \cdot 70}{100} = 17,5 \Rightarrow$ *Vemos que no hay ningún N_i que coincida con $N_\alpha = 17,5$. En este caso utilizamos la fórmula descrita anteriormente.*

$$P_{70} = 60 + \frac{17,5-15}{3} * 6 = 64,999 \cong 65 \text{ mil } \text{€}$$

4.3. Medidas de dispersión

Para conocer el grado de representatividad de las medidas de tendencia central vistas anteriormente nos apoyamos en las medidas de dispersión, que son coeficientes que sintetizan en un solo valor la variabilidad o dispersión de los datos que forman la distribución de la variable con respecto a una medida de posición central.

Hernández (2007), afirma que cuanto más concentrados se encuentran los valores alrededor de un promedio, mejor resumirá éste el comportamiento global de la variable, y cuanto más dispersos se encuentren los valores peor será la representatividad del promedio considerado.

Las medidas de dispersión se clasifican en dos grupos: las absolutas y las relativas. Las absolutas, estudian la variabilidad de una única distribución de frecuencias. En cambio,

las medidas de dispersión relativas estudian la variabilidad comparándola en dos o más distribuciones de frecuencias, debido a la carencia de dimensión por poseer magnitudes con unidades iguales.

4.3.1. Medidas de dispersión absolutas

Las medidas de dispersión absolutas pueden ser obtenidas por una comparación directa entre los distintos valores que componen la variable, de este modo, se consigue obtener los resultados de las medidas de recorrido o rango e índice de Gini. También, estas medidas se pueden obtener por comparación de los valores de la variable con respecto a una medida de tendencia central; así obtenemos la desviación absoluta media, la varianza y la desviación típica.

4.3.1.1. Recorrido o rango

Definición: *El recorrido o rango, R , es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la variable.*

$$R = \text{máx}(x_i) - \text{mín}(x_i)$$

Esta medida es la más fácil de calcular de todas las medidas de dispersión. Fijándonos en los datos del ejemplo 1, el recorrido o rango es 5, ya que la diferencia entre el valor máximo, 5, y el valor mínimo, 0, es 5.

Al implicar solamente dos valores de la variable en su cálculo, es decir, los dos valores extremos, se pueden originar una resolución errónea o confusa, ya que estos valores se pueden encontrar alejados del resto, pudiendo ser valores atípicos (outliers).

Los valores atípicos son aquellos valores de la distribución que se encuentran más alejados de lo normal que el resto de valores. Los valores atípicos se pueden dar por diferentes causas, ya sean por errores procedimentales, como por ejemplo un fallo de recogida de datos o por datos procedentes de sucesos poco comunes. Para establecer un criterio, un valor x es atípico:

- Por la derecha, si $x > Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)$
- Por la izquierda, si $x < Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1)$

4.3.1.2. Recorrido o rango intercuartílico

Definición: *El recorrido o rango intercuartílico, R_I , es la diferencia entre el tercer y primer cuartil. En él están comprendidos el 50% central de los valores de la distribución, evitando con esto la alteración que pueden causar los valores atípicos.*

$$R_I = Q_3 - Q_1$$

Análogamente, también nos encontramos con el recorrido interdecílico, $R_D = D_9 - D_1$, e intercentílico, $R_P = P_{99} - P_1$.

4.3.1.3. Índice de Gini

Definición: *Montero (2007) define el índice de Gini como el promedio de las diferencias en valor absoluto entre cada par de valores de la distribución, es decir, expresado de forma algebraica tenemos que:*

$$\Delta = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| n_i n_j$$

Aunque su cálculo es pesado y su uso no es muy común en la estadística propia de secundaria o bachillerato, me parece interesante y útil destacarlo, aunque sea brevemente, por su gran utilidad a la hora de calcular la desigualdad existente entre los ingresos de los ciudadanos de un determinado territorio, ya sea un país o región concreta. Su valor oscila entre 0 y 1. Un valor cercano a 0 indica que los ingresos de los ciudadanos son equitativos, mientras que un valor próximo o igual a uno apunta una gran disparidad entre los ingresos de la población.

4.3.1.4. Desviación absoluta media

Definición: *Hernández (2007) afirma que la desviación absoluta media respecto a un valor τ se define como la media aritmética de las desviaciones en valor absoluto entre los valores de la variable y τ , siendo m un promedio para medir la mayor o menor dispersión de los datos respecto a éste.*

$$D_\tau = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n |x_i - \tau| n_i = \sum_{i=1}^n |x_i - \tau| f_i$$

La resolución de operaciones con valores absolutos tiende a ser más tediosa, por lo que podemos sustituirlos por los cuadrados, consiguiendo así obtener la desviación cuadrática media.

τ puede ser igual a la media aritmética ($\tau = \bar{x}$) por lo que estamos ante la desviación absoluta media respecto a la media $D_{\bar{x}}$, a partir de la cual obtenemos información sobre la representatividad de este promedio y sobre la dispersión de los datos en torno a este.

τ puede ser igual a la mediana ($\tau = Me$) por lo que estamos ante la desviación absoluta media respecto a la mediana D_{Me} , a partir de la cual obtenemos la misma información que para el caso de la media aritmética (representatividad y dispersión de los datos respecto a la mediana).

τ puede ser cualquier otra medida de tendencia central, obteniendo, en todos los casos, información sobre la representatividad y la variabilidad de dicha medida.

Propiedad de la desviación absoluta media:

Para el caso de la mediana, la desviación absoluta media toma el menor valor posible con respecto a las otras medidas de posición central.

4.3.1.5. Varianza

Definición: la varianza, denotada por S_X^2 o σ_X^2 , se define como la sumatoria de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable con respecto a la media aritmética, o bien, la desviación cuadrática media con respecto a la media aritmética, como hemos indicado anteriormente. Luego, la varianza, tiene la siguiente expresión:

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N}$$

La varianza mide la dispersión de las observaciones de la población, poniendo como punto de referencia la media aritmética. Cuanto mayor sea la varianza, mayor variabilidad y dispersión entre los datos existe, por el contrario, cuanto menor sea el resultado más homogéneas son las observaciones.

Propiedades de la varianza:

- 1) La varianza siempre es positiva, nunca negativa ($\sigma_X^2 \geq 0$). La varianza será 0 si todos los valores que componen la variable son iguales, son constantes, ya que la media sería igual al valor de las mismas y, por tanto, las desviaciones quedarían con un valor nulo, dando lugar a una varianza con resultado igual a cero.
- 2) La varianza se puede expresar como (Teorema de König):

Demostración:

$$\begin{aligned} S_X^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) n_i}{N} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 n_i}{N} - 2\bar{x} \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{N} + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 n_i}{N} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

■

- 3) La varianza es la medida cuadrática de dispersión mínima.

Corolario (Sección 2.1):

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} < \sum_{i=1}^n (x_i - k)^2 \frac{n_i}{N} \quad \forall k \neq \bar{x}$$

- 4) Si a los valores de la variable de la distribución en estudio $(x_i; n_i)$ se les suma o se les resta una constante b , la varianza de la nueva distribución originada $(y_i; n_i)$ es la misma que la varianza de la distribución original. La varianza no se ve afectada por los cambios de origen.

Demostración:

$$\begin{aligned} y_i = x_i \pm b \quad \Rightarrow \quad S_Y^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 n_i}{N} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i \pm b) - (\bar{x} \pm b)]^2 n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} = S_X^2 \end{aligned}$$

- 5) Si a los valores de la variable de la distribución en estudio $(x_i; n_i)$ se les multiplica o divide una constante a , distinta de 0, la varianza de la nueva distribución originada $(y_i; n_i)$ queda multiplicada o dividida por dicha constante al cuadrado. La varianza se ve afectada por los cambios de escala.

Demostración:

$$\begin{aligned} y_i = ax_i \quad \Rightarrow \quad S_Y^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n (ax_i - a\bar{x})^2 n_i}{N} \\ &= a^2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} = a^2 S_X^2 \end{aligned}$$

- 6) De las dos propiedades previas, podemos deducir esta última propiedad, que nos dice que si una variable sufre un cambio de origen b y un cambio de escala a , la varianza de la nueva variable $y_i = ax_i \pm b$ es:

$$S_Y^2 = a^2 S_X^2$$

4.3.1.6. Desviación típica o estándar

Debido a que las unidades en las que está expresada la varianza están elevadas al cuadrado hace difícil su interpretación; en una distribución de tiempo, la varianza, por ejemplo, vendrá en minutos cuadrados, por lo que resultaría más natural que este

resultado se interprete solo en minutos. Para ello, es conveniente fijar otra medida que se refleje en las unidades propias de la variable objeto de estudio, dicha medida se trata de la desviación típica o estándar. Esta medida es la raíz cuadrada positiva de la varianza, cuya expresión es la siguiente:

$$S_X = +\sqrt{S_X^2} = +\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N}}$$

Las propiedades de la desviación típica se deducen fácilmente de las de la varianza.

Como hemos dicho antes, al expresarse la desviación típica en las mismas unidades de la variable de estudio su interpretación resulta más natural y sencilla. Cuando esta medida presenta un valor alto, mayor será la dispersión de las observaciones con respecto a la media aritmética, por lo que esta medida de tendencia central (la media), será menos representativa.

Se debe añadir que, la desviación típica viene bien para comparar distribuciones expresadas en las mismas unidades de medida. En caso contrario, se utilizan las medidas de dispersión relativas.

Haciendo un inciso, supongamos que tenemos una distribución de frecuencias $(x_i; n_i)$ con media y desviación típica concreta. Si a todas las observaciones que componen la distribución se les resta la media y se dividen entre la desviación típica, la variable obtenida es denominada variable tipificada:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_X}$$

Su característica principal es que tiene como media el valor cero y como varianza uno.

4.3.2. Medidas de dispersión relativas

En algún momento determinado, puede que sea necesario comparar distribuciones para sacar conclusiones acerca de la dispersión o variabilidad de los datos. Hay que advertir que no siempre es posible comparar magnitudes absolutas, ya sea porque estas variables tienen distintas unidades de medida o porque poseen diferentes medias.

Por ejemplo, disponemos de los datos de las distribuciones de altura y peso de los alumnos de educación secundaria de cierto instituto. Nos encontramos con una altura media de 171 centímetros y una desviación típica de 0.4 centímetros; por otro lado, el peso medio es de 70 kilos con una desviación típica de 5 kilos. Obviamente, vemos que los valores medios son distintos, así como sus unidades de medida. Por tanto, resulta

imposible comparar resultados y obtener conclusiones. Lo mismo ocurre si nos encontramos con variables cuyas medias poseen las mismas unidades de medidas, pero la cuantía es diferente, como por ejemplo una media de edad de 15 años para una variable y de 17 para la otra.

Concluyendo, en los dos casos explicados anteriormente, es imprescindible relativizar resultados y para ello, utilizamos las medidas de dispersión relativas; medidas adimensionales que gracias a esta característica permiten la comparación de varias distribuciones, siendo la más común el coeficiente de variación de Pearson.

4.3.2.1. Coeficiente de Variación de Pearson

Definición: cociente obtenido de la división de la desviación típica y la media aritmética en valor absoluto. De aquí se deduce la relación entre las medidas de dispersión con las de tendencia central, obteniendo un resultado que carece de unidad de medida. Su expresión es:

$$CV = \frac{S_x}{|\bar{x}|}$$

El valor obtenido se puede expresar en porcentaje. Cuanto mayor sea este valor más veces estará la media contenida en la desviación típica, por tanto, mayor será la dispersión, por tanto, habrá una menor homogeneidad entre los valores a causa de la falta de representatividad de la media aritmética.

El coeficiente de variación engloba a todos los datos de la distribución. Si la media aritmética es cero, evidentemente no tiene sentido su cálculo, así como, si la desviación típica fuese cero, el coeficiente de variación se anularía, ya que estaríamos ante una distribución con valores constantes y no existiría dispersión.

4.4. Medidas de forma

Además de las medidas de posición y dispersión, utilizadas en el estudio de la tendencia y variabilidad de los datos de la distribución con la que trabajamos, es necesario caracterizar la distribución según los rasgos que presente su representación gráfica; con esto podremos detallar aún más la conducta y tendencia del conjunto de datos estudiados. Esta caracterización la realizaremos a partir de las medidas de forma, como son los coeficientes de asimetría y el coeficiente de apuntamiento o curtosis.

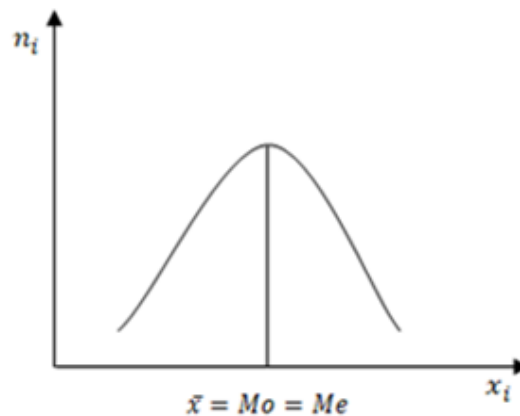
4.4.1. Coeficientes de asimetría

Montero (2007) afirma que el objetivo de estas medidas es determinar, sin necesidad de dibujar la distribución de frecuencias, la deformación horizontal de los valores de la variable analizada respecto a un valor central, generalmente la media aritmética.

Una distribución de frecuencias es simétrica cuando a ambos lados de la media está la misma cuantía de valores. A su vez, los valores equidistantes de la variable estadística con respecto a un determinado valor central, poseen análoga frecuencia. Este valor suele corresponderse con la media, la mediana y la moda. Si la variable fuera multimodal, el punto solamente coincidiría con la media y mediana.

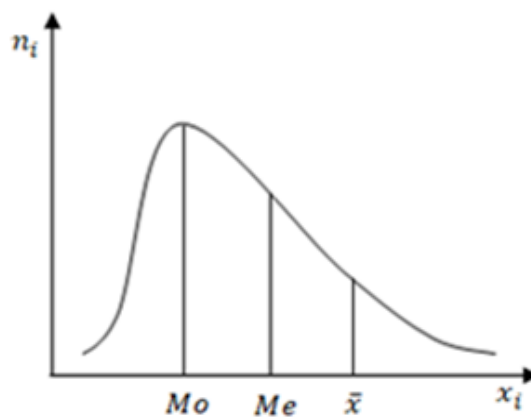
A continuación, en los Gráficos 6, 7 y 8, podemos ver los tres casos posibles de asimetría que se pueden dar:

Gráfico 6: Distribución simétrica



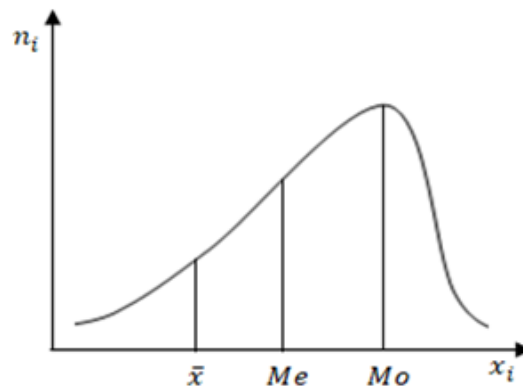
Fuente: Elaboración propia

Gráfico 7: Distribución asimétrica positiva o asimétrica a la derecha



Fuente: Elaboración propia

Gráfico 8: Distribución asimétrica negativa o asimétrica a la izquierda



Fuente: Elaboración propia

Con respecto a lo anterior, vamos a ver una serie de medidas de las que podemos obtener información sin necesidad de visualizar los datos ni de saber el valor de la mediana y de la moda.

En primer lugar, tenemos la siguiente expresión, denominada momento centrado de orden 3 y expresada en las unidades de medida al cubo de la variable de estudio:

$$m_3 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 \frac{n_i}{N}$$

La interpretación de m_3 es la siguiente:

- Si $m_3 = 0$, entonces la distribución es simétrica.
- Si $m_3 > 0$, entonces la distribución es asimétrica positiva (o a la derecha).
- Si $m_3 < 0$, entonces la distribución es asimétrica negativa (o a la izquierda).

Para obtener una medida adimensional y así, su interpretación resulte más sencilla, dividimos m_3 entre un valor medido en sus mismas unidades. Ese valor es la desviación típica al cubo, obteniendo así el **coeficiente de asimetría de Fisher**, cuya expresión viene dada por:

$$g_1 = \frac{m_3}{S_X^3} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 n_i}{N}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La interpretación del coeficiente es la misma que la de m_3 .

El cálculo es arduo y tedioso, sin embargo, presenta la gran ventaja de que se puede calcular para todas las distribuciones y es estable a las variaciones de escala.

Otra medida usual es el **coeficiente de asimetría de Pearson**, A_p . Con él, cabe destacar la rapidez con la que se intuye la simetría, ya que en este caso $\bar{x} = Mo$ y por tanto, el coeficiente es 0, puesto que su expresión es la siguiente:

$$A_p = \frac{\bar{x} - Mo}{S_x}$$

Este coeficiente es interpretado de igual forma que el de Fisher. Igualmente, también es adimensional y no le afectan los cambios de origen y escala. Sin embargo, esta medida no puede ser empleada en distribuciones multimodales, en su lugar se utiliza el segundo coeficiente de asimetría de Pearson (A'_p):

$$A'_p = \frac{3(\bar{x} - Me)}{S}$$

4.4.2. Coeficiente de Apuntamiento o Curtosis

El coeficiente de curtosis permite comparar el nivel de apuntamiento de una distribución concreta con respecto al nivel que tiene la distribución de referencia, denominada distribución de Laplace-Gauss, comúnmente conocida como distribución normal. Las medidas de curtosis tienen que ser aplicadas a distribuciones caracterizadas por ser campaniformes (para poder llevar a cabo la relación con la campana de Gauss), simétricas o levemente asimétricas.

El cálculo del coeficiente de curtosis es, al igual que el de simetría, dificultoso. También tiene como característica la ausencia de dimensión. Su expresión es la siguiente:

$$g_2 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 n_i}{N}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N}\right)^2} - 3$$

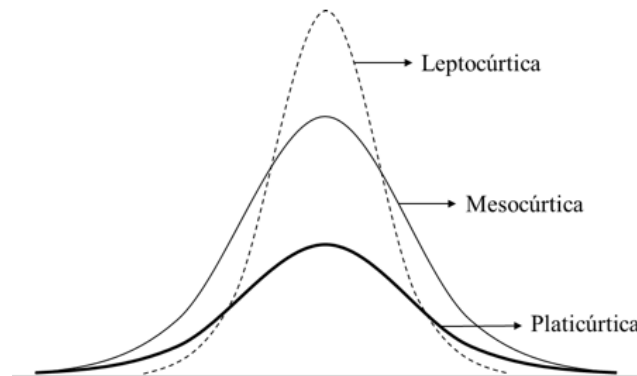
El signo de este coeficiente nos indica el apuntamiento de los datos de la distribución. Los nombres que recibe la distribución dependiendo del apuntamiento se observan en el Gráfico 9. Además, tener en cuenta que la distribución normal presenta un coeficiente de curtosis nulo. Dicho esto:

- Si la distribución tiene el mismo apuntamiento que la distribución normal, la denominaremos mesocúrtica: $g_2 = 0$

- Si la distribución tiene un apuntamiento menor que la distribución normal, la denominaremos platicúrtica: $g_2 < 0$
- Si la distribución tiene un apuntamiento mayor que la distribución normal, la denominaremos leptocúrtica: $g_2 > 0$

La relación existente entre el coeficiente de asimetría y curtosis es: $g_2 > g_1^2 - 2$

Gráfico 9: Nombres de la distribución según su apuntamiento



Fuente: <https://www.rankia.com/blog/tomas-garcia/2226562-volatilidad-ii-curtosis-asimetria>

5. FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA

Hace miles de años, las Matemáticas eran esenciales para el progreso de las sociedades. Matemáticos como Pitágoras que asentaron las bases de la aritmética y la geometría hace unos 3000 años, pasando por Newton, que aportó teoremas que permitieron empezar con el desarrollo del cálculo diferencial e integral, hasta la matemática Emmy Noether, que a pesar de las trabas que la Alemania de principios del siglo XX le puso, no le impidió enunciar teoremas fundamentales que permiten comprender la relatividad; todos ellos, junto con muchos otros, han sido precursores de la base de enunciados y teoremas que, hoy en día, permiten seguir con el estudio y desarrollo de las Matemáticas en todas sus áreas.

5.1. Importancia de las matemáticas. Actitud de los alumnos hacia ellas

Las Matemáticas siguen ocupando un papel clave en la sociedad actual, si cabe, cada día aún más. Todo lo que nos rodea depende de esta ciencia: el ordenador, el móvil, la música, los horarios, las predicciones de tiempo, nuestra cuenta bancaria, o incluso, las numerosas estimaciones junto con indicadores y gráficos, proporcionadas por el Instituto Nacional de Estadística (INE), que se están utilizando en la actual crisis del Covid-19 para mostrar la situación económica, social y demográfica. Sin embargo, a pesar de la importancia y de la continua presencia de las matemáticas en nuestras vidas, cada vez más alumnos no comprenden y rechazan el estudio de las mismas. Además, los resultados obtenidos por los estudiantes españoles que se recogen en el informe PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes) de 2018, nos dice que *los estudiantes españoles puntuaron por debajo de la media de la OCDE en matemáticas y ciencias, con puntuaciones similares a los estudiantes de países como Hungría y Lituania.*

Núñez et al. (2005) afirman que, como matiz notable, se ha encontrado que conforme el alumno avanza en sus estudios básicos hasta los más avanzados, es decir, desde primaria hasta bachillerato, la negatividad hacia las Matemáticas va aumentando. Por otro lado, afirman que, dada la gran trascendencia de las matemáticas en las sociedades modernas occidentales, existe una progresiva intranquilidad debido a que una parte considerable de los alumnos, así como de la población en general, tiene impedimentos notables para la comprensión y uso de los conocimientos matemáticos. Esto conlleva un gran problema para la sociedad y su toma de decisiones. A continuación, veamos la importancia de una buena base estadística desde los primeros años académicos.

5.2. Importancia de la alfabetización y formación Estadística

Debido a la ingente cantidad de datos con la que nos encontramos día a día en redes sociales y medios de comunicación, o las habituales encuestas o cuestionarios que se nos muestran cada día con resultados de tendencia pública, resulta imprescindible que

los ciudadanos puedan comprender y hacer uso de esta información con actitud crítica y un sólido conocimiento a la hora de tomar decisiones.

La incorporación de la Estadística en el currículo de educación primaria y secundaria, es relativamente reciente. Desde hace años, numerosos autores han estudiado por qué se debe incluir la Estadística en la enseñanza matemática de los alumnos en sus diferentes etapas. Es el caso de Holmes (1980) argumenta las siguientes razones:

- La Estadística forma parte esencial de la educación general que se desea ser alcanzada por los ciudadanos. Son éstos los que requieren desarrollar una buena competencia en lectura y análisis de elementos estadísticos como tablas y gráficos que aparecen de forma habitual en los medios de comunicación. En la sociedad actual, resulta esencial poder interpretar una gran cantidad de información muy variada y de temas diversos relacionados con las telecomunicaciones e interdependencia social, política y económica.
- La Estadística resulta conveniente para las etapas posteriores a la educación, es decir, en muchas profesiones se requieren competencias básicas de esta disciplina. En el estudio de fenómenos complejos, la Estadística resulta esencial, se empieza definiendo el objeto de estudio, así como las variables relevantes, coger datos de ellas, interpretarlos y analizarlos.
- El estudio de la Estadística impulsa el desarrollo personal, favoreciendo un razonamiento crítico, apoyado en la valoración de la evidencia objetiva. Hay que ser capaces de emplear los datos cuantitativos para dominar los entendimientos y analizar los de los demás.
- Refuerza y apoya la comprensión de otros temas del currículum, tanto de educación obligatoria como posterior, ya que es normal que aparezcan gráficos, resúmenes o conceptos básicos.

De forma más actual podemos destacar a Begg (1997), que en su artículo apunta el buen camino que es la Estadística para llegar a las capacidades de comunicación, manejo de la información, conclusión de problemas, utilización de ordenadores y trabajo tanto cooperativo como en grupo. A estos procesos se les da una gran consideración y envergadura en los nuevos currículos.

Del Pino y Estrella (2012), sostienen que *la Estadística no solo tiene un importante papel para potenciar el desempeño de cada uno como un ciudadano activo, sino que puede apoyar la toma de decisiones en asuntos de la vida cotidiana, tales como la calidad nutricional de los alimentos, la seguridad y eficacia de los fármacos, la información bursátil y económica, los sondeos electorales, los índices de audiencia de programas televisivos, el rendimiento, seguridad y confiabilidad de los automóviles, etc. De esta forma, la inversión en alfabetización estadística es también una inversión en el bienestar*

individual y colectivo de los ciudadanos. Además, defienden que un graduado de educación secundaria instruido estadísticamente tiene que ser capaz de comprender la importancia de los resultados de las investigaciones científicas y atesorar un criterio instruido sobre la legitimidad de las conclusiones obtenidas. Estas destrezas son esenciales para subsistir y permanecer en la sociedad contemporánea.

Otro artículo interesante en el que se reflexiona sobre la formación y educación Estadística y sus expectativas a largo plazo en nuestro país es el que ofrece Batanero (2000), en el que afirma que *el siglo XX ha sido el siglo de la Estadística, la cual ha pasado a considerarse como una de las ciencias metodológicas fundamentales y base del método científico experimental. La enseñanza de la Estadística, sin embargo, aún se encuentra en sus comienzos, aunque como hemos descrito parece avanzar de una forma imparable.*

Watson y Moritz (2000a), encuentran como dificultad en su estudio *lograr que los estudiantes se involucren significativamente en los contextos sociales presentados en los artículos de los periódicos.*

Por lo que se puede concluir que si se desea conseguir una población instruida estadísticamente y que sea suficiente para valorar de forma crítica lo afirmado en los medios de comunicación es necesaria una mejor alfabetización y formación estadística.

5.3. Cómo enseñar y cómo aprender Estadística. Dificultades

Numerosas investigaciones se han centrado en el estudio de la búsqueda de la forma más adecuada de enseñar Matemáticas. A continuación, vamos a tratar algunas de ellas.

Batanero (2000) explica la forma en la que se debe de llevar a cabo una buena formación estadística, es decir, impartir una buena enseñanza de esta materia. Para ello, propone considerar los principales fines de la enseñanza, planteando la autora los siguientes:

- *Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la Estadística en la sociedad, conociendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo.*
- *Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la Estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones.*

En su artículo sostiene también la importancia de que los alumnos desarrollen una buena actitud y unas formas de razonamiento e interés que ayude a formar su aprendizaje a pesar de los cambios rápidos que experimenta la ciencia.

Por otro lado, diversos autores coinciden en que, para que el alumno considere el valor y el uso de la Estadística, es esencial poner ejemplos reales, pudiendo estar relacionados

con la población, con la salud, resultados de deportes, etc. En este caso, ella propone como papel primordial los proyectos estadísticos y la experimentación con fenómenos aleatorios. Los proyectos permiten a los alumnos elegir un tema de su interés en el cual precisen definir los objetivos, elegir los instrumentos de recogida de datos, seleccionar las muestras, recoger, codificar, analizar e interpretar los datos para dar respuesta a las preguntas planteadas. Los proyectos introducen a los alumnos en la investigación, les permiten apreciar la dificultad e importancia del trabajo del estadístico y les hace interesarse por la estadística como medio de abordar problemas variados de la vida real. La experimentación con fenómenos aleatorios (real o simulada) proporciona al alumno una experiencia estocástica difícil de adquirir en su relación empírica con lo cotidiano.

La enseñanza de la Estadística debe ayudar a comprender la variabilidad y hacerlo a través de la resolución de problemas para que no se confunda con aplicaciones triviales de la matemática, del Pino y Estrella (2012).

Del Pino y Estrella (2012), en su artículo, impulsados por las ciencias experimentales, pero en un campo de aplicación más amplio, aclaran que la posibilidad de ver la solución de un problema estadístico se puede representar como un proceso de investigación formado por cuatro componentes:

- 1. Plantear las preguntas de interés, asegurándose de que se pueda conseguir datos adecuados para responderlas. El alumno debe lograr proponer y distinguir preguntas estadísticas de las que no lo son, para lo cual debe comprender conceptos tales como variabilidad, no determinismo y comportamiento conjunto.*
- 2. Recopilar los datos pertinentes, diseñando un plan para ello y poniéndolo en práctica. El alumno debe dominar algunos métodos para obtener datos mediante muestras o experimentos. Es importante que el alumno comprenda cómo el diseño de muestreo o el diseño experimental ayuda a diferenciar los efectos sistemáticos de aquellos atribuibles a la casualidad (variación debida al azar).*
- 3. Analizar los datos, seleccionando los tipos de representación gráfica y numérica más apropiados para el análisis.*
- 4. Interpretar los resultados del análisis de los datos en términos de la pregunta original. Casos familiares para los alumnos y para los ciudadanos en general son los de las encuestas electorales y los sondeos de opinión, en los cuales se usan los conceptos estadísticos de margen de error y nivel de confianza. Estos conceptos se basan en la distribución de las estimaciones en repeticiones de un muestreo aleatorio; que los resultados de una encuesta varíen entre una muestra y otra es tanto lógico como fundamental, aunque generalmente olvidado.*

Además, estos aportan que, pasar de los datos individuales a su conducta de forma conjunta, es verdaderamente complicado para los alumnos, suponiéndole una verdadera dificultad, lo que conlleva un gran impedimento para la comprensión de las tablas y de los gráficos. A pesar de su condición informativa, los gráficos son vistos por los alumnos como simples ilustraciones. Otra dificultad analizada es que, tanto los alumnos como los profesores, comparan la Estadística con la Matemática, confiando que tras los cálculos y los resultados aportados esté la respuesta correcta, como siempre suele ocurrir en el contexto escolar. Por el contrario, en Estadística es distinto, hay que utilizar la escritura y habilidades de comunicación.

El profesor no es ya un transmisor del conocimiento, sino un gestor de este conocimiento y del medio (instrumentos, situaciones) que permita al alumno progresar en su aprendizaje, sostiene Batanero (2000).

5.4. Importancia de la media. Errores, conflictos y dificultades

Centrándonos en las medidas de centralización, en concreto, las más utilizadas, como son la media aritmética, mediana y moda, podemos percibir que, a pesar de ser conceptos relativamente sencillos y que se deberían haber trabajado desde la etapa escolar de Primaria, se observa en numerosos estudios publicados en los diferentes artículos en los que nos basamos, una importante falta de comprensión y dificultades a la hora de enfrentarse a una de estas operaciones. Esta problemática preocupa aún más si añadimos la vital importancia y aplicación directa que tienen estas medidas en la vida diaria.

Concretamente, en el caso de la media, numerosos estudios manifiestan que, a pesar de la elementalidad y sencillez de este concepto, no es tan fácil de entender para los alumnos y surgen numerosas dudas acerca de la comprensión y uso adecuado de su algoritmo de cálculo.

Molero et al. (2019), utilizan la idea de conflicto semiótico, que afirman que surge *“cuando se realiza una interpretación no acorde con la institución matemática de una de estas funciones, es decir, una disparidad entre el significado de un objeto matemático y el que le atribuye el estudiante”*. En este trabajo, identifican algunos conflictos semióticos relacionados con cuestiones y métodos vinculados con la media aritmética; conflictos en las propiedades y algoritmos de la media, falta de identificación de determinados campos de problemas y hasta obstáculos con la definición.

Garrett y García (2008), tras el análisis y obtención de resultados de su trabajo realizado con alumnos de secundaria y bachillerato, encuentran varias dificultades por parte de estos hacia aspectos de la media aritmética, como, por ejemplo, no reconocer que la media, dentro de las medidas de tendencia central, es el mejor estimador. También,

presentan inconsciencia ante los valores nulos en el cálculo de la media, pudiendo ser influyentes en el resultado; así como aproximar el valor medio a un número entero, dando la impresión de que no conciben un valor decimal como media. Otro concepto sencillo y no menos importante dentro del entorno de la media es el de valor atípico. Los autores observan que, cuando los escolares están frente a un valor atípico no saben cómo tratar estos datos en el cálculo de la media aritmética, no están acostumbrados a esta idea.

Garrett y García (2008), afirman que *“las dificultades surgen porque los alumnos no están familiarizados con los aspectos conceptuales de la media. Estudian el algoritmo de cálculo, utilizan las representaciones, pero las propiedades más tangibles no son abordadas de forma expresa”*. Proponen una contextualización de las tareas y de los problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Watson y Moritz (2000b) examinaron el desarrollo de la comprensión del promedio o de su crecimiento evolutivo y establecieron seis niveles de respuesta dada por los estudiantes basada en un patrón jerárquico de actividad cognitiva. Los niveles son los siguientes:

- 1) Respuesta preestructural o prepromedio: son aquellas que no se vinculan de forma evidente con ningún concepto de promedio. El planteamiento de promedio no es utilizado ni formalmente ni coloquialmente.
- 2) Respuesta uniestructural: la respuesta está relacionada con el uso de la media de forma coloquial, donde se aplican juicios imaginarios relacionados con la tarea. Se vincula con la idea de suma, pero esto se hace sin saber ni comprender el algoritmo correcto y el significado.
- 3) La respuesta multiestructural: se observa que se dominan varios aspectos de la tarea, aunque no se puedan asignar en situaciones complejas. Se suele mezclar las medidas de media, mediana y moda. Llega haber enfrentamiento entre el cálculo erróneo de la media y su concepto.
- 4) Media como representante (nivel relacional): las soluciones aportadas en este nivel vinculan la media con su algoritmo en las etapas más elementales, relacionándolas ocasionalmente con las ideas de mayoría y mitad. Para describir los conceptos recurren al algoritmo de cálculo. En un conjunto de datos, para la estimación o predicción se refleja alguna idea de representatividad. En situaciones difíciles no se sabe usar y es frecuentemente preferible, en lugar de sus promedios, utilizar los gráficos que aportan detalles visuales.

- 5) Aplicación de la media en un contexto complejo: tiene capacidad de hacer el proceso inverso para hallar el total a través de la media, además de las competencias del nivel anterior. No acostumbra a usar la media para la comparación de varios conjuntos de datos.
- 6) Aplicación de la media en dos o más contextos: además de las particularidades anteriores, también puede llegar a invertir el algoritmo para calcular el total a través de la media y calcular medias ponderadas. La noción de distribución es comprendida. Para comparar dos o más conjuntos de datos hace uso de la media.

Cobo y Díaz (2003) estudian el significado que tiene la media, la mediana y la moda para los estudiantes de la etapa de secundaria a partir de una muestra más moderada y con una clase de ítems más variados que en el estudio realizado por Watson y Moritz (2000b). Ellas afirman que *comprender un concepto es un proceso constructivo continuo en que el estudiante adquiere progresivamente los diferentes elementos de significado del concepto y los pone en relación. Esta comprensión emerge de las prácticas significativas del estudiante en la resolución reiterada de problemas específicos del concepto.*

5.5. Medidas de dispersión y su visión en el aula

Hasta ahora nos hemos centrado en las medidas de tendencia central, haciendo hincapié aún más en la media. Con respecto a las medidas de dispersión, su investigación no se promovió hasta mediados de los años 90, por lo que es relativamente reciente.

Batanero et al. (2015) consideran que *el primer contacto del estudiante con la idea de dispersión es desde la perspectiva de la estadística descriptiva, es decir, cuando el interés de un estudio estadístico radica en analizar un conjunto de datos sin pretensiones de generalizar los resultados del análisis.*

Del Pino y Estepa (2019), de acuerdo con otros autores, sostienen que la medida de dispersión que más aparece en los libros y a la que más importancia se le da, es la desviación típica. Estos mismos consideran una formación insuficiente en el ámbito de la Estadística en el profesorado, aún más cuando provienen de carreras técnicas; con la incorporación de asignaturas específicas se podrá mejorar de forma notable la comprensión de las diferentes medidas, en este caso las de dispersión.

6. UNIDAD DIDÁCTICA

6.1. Título de la unidad

El título de la unidad didáctica, correspondiente al Bloque 5 de Estadística y Probabilidad de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y dirigidas al alumnado de 4º curso de E.S.O., es “Estadística”.

6.2. Justificación

Desde el punto de vista curricular, para el que nos basamos en la normativa vigente tanto a nivel nacional como autonómico, los contenidos que engloba nuestra unidad didáctica aparecen reflejados en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, ligado a la Orden 14 de julio por la que además de desarrollarse el currículo pertinente a E.S.O., se regulan algunos aspectos relacionados con la atención a la diversidad y la forma en la que se desarrollará la evaluación relacionada con la forma de aprendizaje del alumnado. En esta unidad didáctica se repasará y se reforzarán nociones y conceptos estudiados en cursos anteriores, siendo éstos la base de los nuevos que se aprenderán durante la unidad, como, por ejemplo: análisis crítico de tablas y gráficas que puedan aparecer en los medios de comunicación, las medidas de centralización y dispersión, comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión, etc. Además, la unidad también conecta con el Bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, común para los cursos de 3º y 4º, donde se requiere procesos y actitudes básicos que resultan esenciales para el trato con las matemáticas.

Desde los primeros años de la E.S.O., incluso en el colegio, los alumnos estudian las nociones básicas de Estadística y el cálculo de los principales parámetros. En esta asignatura, se debe profundizar mucho más en la interpretación, análisis y utilización de las medidas de posición y dispersión y que el alumnado sea más intuitivo a la hora de detectar errores.

Desde el punto de vista social o profesional, los contenidos de esta unidad resultan esenciales y útiles para la alfabetización estadística del alumnado. Como afirma Cuadras (2006), *la importancia de la Estadística se pone de manifiesto por ser una especialidad de todas las carreras de matemáticas, ciencias económicas, agrícolas, biológicas y médicas*. Una ciudadanía con una buena educación estadística que tenga capacidad para interpretar y comprender tablas, gráficos y datos estadísticos que podemos encontrar habitualmente, tendrán una mayor capacidad de razonamiento y una mejor toma de decisiones. Por ello, es necesario que los alumnos tengan un buen aprendizaje de los contenidos propuestos en la unidad.

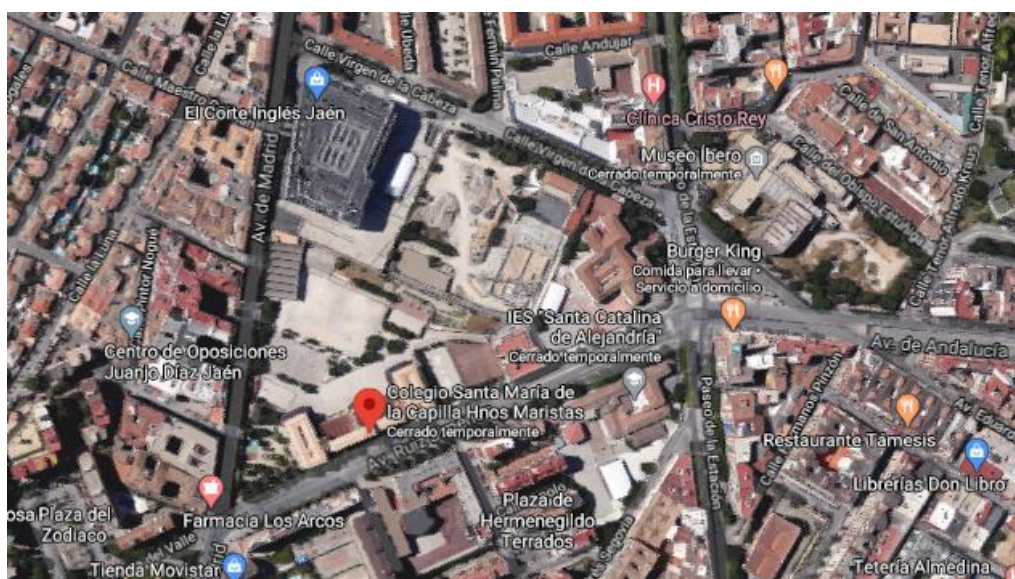
6.3. Contextualización del centro y del aula

El centro educativo “Santa María de la Capilla de Jaén” será el lugar de referencia donde se realice la contextualización de la unidad didáctica.

6.3.1. Disposición y características del centro

El colegio “Santa María de la Capilla” se encuentra en Jaén (Andalucía), concretamente en la Avenida Ruiz Jiménez, número 1. Esta zona se encuentra muy bien comunicada, es nexos de unión con otros barrios de la capital, consta de una buena combinación de transporte público, con servicios para los padres y alumnos (cafeterías, ultramarinos, papelerías, etc.). Como se observa en la Imagen 1, el centro está situado al lado del Corte Inglés y con una gran afluencia de centros educativos a su alrededor con ofertas similares, tanto públicos como I.E.S. Santa Catalina de Alejandría o I.E.S. Virgen del Carmen, como concertados, es el caso de C.D.P. Cristo Rey.

Imagen 1: Plano de localización del centro



Fuente: Google Maps

“Santa María de la Capilla” es un centro concertado que pertenece a la congregación religiosa católica de los Hermanos Maristas, fundada por Marcelino Champagnat, en el que se imparten clases de las etapas de Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria y Bachillerato en diferentes modalidades. Los alumnos pertenecen a una clase social media-alta, con padres de edades comprendidas entre los cuarenta y los cincuenta años y con un número medio de hijo por familia de 1,7. Aunque en la mayoría de las familias ambos cónyuges trabajan en profesiones liberales, funcionariado, sector servicios o propietarios, la parte no activa suelen ser amas de casa.

El centro tiene establecidas relaciones con agentes externos y de otros ámbitos, como educativo, empresarial, cultural y religioso. El centro interactúa y participa con organizaciones externas como el Ayuntamiento, el cual presenta plena disposición ante cualquier necesidad o problema que pueda surgir, la diócesis, organizando campañas de recogida de alimentos o encuentros como el diocesano de jóvenes, Universidad de Jaén, y asociaciones católicas de educación, entre otras.

Por último, la Asociación de Madres y Padres de Alumnos (AMPA) que pertenece al centro educativo, tiene su sede en el colegio y algunos de sus miembros forman parte del consejo escolar. El AMPA aporta ayuda cuando hay algún problema y recursos cuando se organizan actividades.

6.3.2. Instalaciones disponibles

El Centro es un edificio de cuatro plantas que presenta un vestíbulo, pasillos y escaleras que dirigen a las diferentes dependencias. Consta de:

- Ascensor, cuyo uso está restringido para el profesorado y alumnado que lo necesiten.
- Aulas, con sus mesas y sillas, tanto para los alumnos como para el docente. Deben de estar ordenadas y cuidadas, siendo responsable el grupo que las utilice. Hay dos tipos de aulas:
 - * Aulas de referencia, son las aulas que se asignan al comienzo del curso y en las que tendrán lugar la impartición de las clases de la mayor parte de las materias. Todas ellas disponen de los pupitres correspondientes, pizarra digital, proyector y pizarra de tiza tradicional.
 - * Aulas de uso común, entre las que están: el aula de informática, aula de tecnología, aula de plástica, aula de música, laboratorios, biblioteca (para lecturas, investigación escolar, trabajos, ...), salón de usos múltiples (para actos institucionales y reuniones), etc.
- En el aulario, también se encuentran otras dependencias como son la portería, secretaría, sala de profesores, jefatura, dirección, servicio de reprografía, aula matinal, comedor escolar, aula de apoyo a la integración y aula de diversificación curricular.
- Otro componente del centro es un edificio anexo dentro del recinto escolar con instalaciones deportivas.
- Dispone de patios espaciosos y pistas deportivas al aire libre.

6.3.3. Personal del centro

El centro dispone de una plantilla de unos 70 profesores distribuidos entre los diferentes departamentos, que van desde profesorado de Educación Infantil hasta de Bachillerato. Por lo general, los docentes son participativos con las actividades organizadas en el centro, como por ejemplo feria del libro, semana cultural, viajes, etc.

6.3.4. Disposición del aula

La organización del alumnado en el aula dependerá del número de alumnos que haya en la clase, que suele ser de unos 30 alumnos, así como de las necesidades que estos puedan tener, pero normalmente, los alumnos se suelen sentar por parejas. Si están realizando un proyecto cooperativo se disponen en grupos de cuatro.

6.4. Objetivos

Los objetivos pueden ser definidos como los logros que debe conseguir el estudiante al final de cada etapa, como fruto de las experiencias de enseñanza-aprendizaje programadas para su consecución. Vamos a diferenciar entre objetivos de etapa, objetivos de área y objetivos de la unidad.

6.4.1. Objetivos generales de etapa

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, concretamente en el capítulo II artículo 11, se establecen los objetivos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, los cuales permitirán el desarrollo de las capacidades de los discentes para su logro (también vienen en el Decreto 111/2016). Los objetivos son los siguientes:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o

social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

- I) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

6.4.2. Objetivos específicos de área

En la Orden 14 de julio de 2016 se regulan los objetivos específicos de área para la asignatura de 4º de E.S.O de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, asignatura obligatoria para la comunidad autónoma de Andalucía. Los objetivos son los siguientes:

1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e

instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

6.4.3. Objetivos específicos de la Unidad Didáctica

Los objetivos específicos que se proponen para el desarrollo de las competencias de esta unidad didáctica se apoyan en los estándares de aprendizajes evaluables del RD 1105/2014 de 26 de diciembre, propuestos en el Bloque 5 de Estadística y Probabilidad de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de E.S.O.

- O1.** Interpretar un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.
- O2.** Interpretar críticamente datos de tablas y gráficos estadísticos.
- O3.** Representar datos mediante tablas y gráficos estadísticos utilizando los medios tecnológicos más adecuados.
- O4.** Calcular e interpretar los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador).
- O5.** Seleccionar una muestra aleatoria y valorar la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas.
- O6.** Representar diagramas de dispersión e interpretar la relación existente entre las variables.

No se deber olvidar trabajar de forma transversal con los objetivos relacionados con el Bloque 1 “Métodos, procesos y actitudes en Matemáticas”. Algunos propuestos son:

- 1) Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
- 2) Analizar y comprender el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
- 3) Valorar la información de un enunciado.
- 4) Realizar estimaciones y elaborar conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver; valorar su utilidad y eficacia.
- 5) Exponer y defender el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.
- 6) Establecer conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
- 7) Interpretar la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
- 8) Desarrollar actitudes adecuadas para el trabajo en Matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.
- 9) Plantear la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.
- 10) Distinguir entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.
- 11) Seleccionar herramientas tecnológicas adecuadas y utilizarlas para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.
- 12) Utilizar medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.
- 13) Utilizar los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.
- 14) Usar adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Por último y, por otra parte, añadir que los objetivos propuestos apoyarán y ayudarán a desarrollar las siete capacidades matemáticas fundamentales utilizadas en el marco PISA 2015. Se puede hacer uso y sostenerse en ellas para obtener una mayor comprensión y llegar así, a una mejor resolución de los problemas. Estas capacidades son: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación,

diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico y utilización de herramientas matemáticas.

6.5. Competencias clave

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, establece que las competencias se relacionan como un “saber hacer” aplicado a numerosos ámbitos académicos, sociales y profesionales. En él se definen las competencias como *las capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.*

El papel del docente es esencial para un buen aprendizaje por competencias, el cuál apoya tanto al proceso de aprendizaje como a la motivación de los alumnos por aprender, ya que el aprendizaje del concepto y el procedimiento de aprenderlo van de forma conjunta.

Según el Real Decreto mencionado anteriormente y la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, las competencias clave del currículo apoyadas por la LOMCE y que abarcan la presente unidad didáctica, son:

- 1. Competencia en comunicación lingüística (CCL):** la evaluación de esta competencia se abordará a partir de la corrección de ejercicios y trabajos colectivos en clase que realizará el alumnado, lo que servirá para que el profesorado pueda valorar las habilidades en comunicación lingüística y el uso del léxico y terminología. También se verá el grado de desarrollo de esta competencia a través de la comprensión de los enunciados de los problemas y a la hora de realizar y mostrar un informe tras un proceso de investigación.
- 2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT):** durante toda la unidad estará presente esta competencia ya que, será evaluada a partir de la resolución y cálculo de los ejercicios y actividades propuestas, así como los posibles trabajos planteados para realizarlos en grupo.
- 3. Competencia digital (CD):** se valorará con el uso de los programas y herramientas informáticas empleadas para los cálculos y análisis de datos necesarios, ya sean propuestos en clase o extraídos de los medios de comunicación, inculcándoles un uso responsable y educativo.

4. **Aprender a aprender (CAA):** a partir de esta competencia se promueve el interés por el aprendizaje y su continuidad en el día a día, haciéndolo de forma constante, autónoma y ordenada.
5. **Competencias sociales y cívicas (CSC):** estas competencias son esenciales para una buena convivencia e interacción entre compañeros, que permita tener unas buenas relaciones sociales y profesionales. Se evaluará el buen comportamiento y respeto que el educando tenga en clase y en las actividades que la compongan.
6. **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE):** se evaluará a partir de la iniciativa que tenga el alumno a la hora de resolver problemas, participación en investigaciones, creatividad, etc.
7. **Conciencia y expresiones culturales (CEC):** debido al auge que las Matemáticas tienen en la sociedad actual, y aún más si hablamos de la Estadística y análisis de datos, el alumno debe de ser consciente de la importancia de los contenidos estudiados, para ello se harán actividades que formen parte de la vida cotidiana.

Como indica la Orden 14 de julio de 2016, se observa que las Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, ayudan a la obtención de las competencias clave. Además, dado que la unidad didáctica desarrollada en este TFM pertenece a dicha asignatura del curso de 4º de E.S.O. y contiene los contenidos comprendidos en el bloque de Estadística y Probabilidad del currículo, es imprescindible indicar que, la competencia CMCT tiene un rol principal frente a las otras, reconocida como fundamental por la Unión Europea.

Todas las competencias comentadas anteriormente, serán evaluadas y trabajadas en clase durante el desarrollo de la unidad. Las competencias y los objetivos guardan una estrecha relación entre ellos. En la Tabla 4 podemos observar la relación de los objetivos de la unidad didáctica del Bloque 5 con las competencias.

Tabla 4: relación entre los objetivos de la unidad y las competencias clave

OBJETIVOS DE LA UNIDAD. BLOQUE 5	COMPETENCIA
01. Interpretar un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.	CMCT, CAA, CSC y CCL
02. Interpretar críticamente datos de tablas y gráficos estadísticos.	CMCT, CAA y CEC

03. Representar datos mediante tablas y gráficos estadísticos utilizando los medios tecnológicos más adecuados.	CMCT, CD
04. Calcular e interpretar los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador).	CMCT, CD
05. Seleccionar una muestra aleatoria y valorar la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas.	CMCT, CAA, CSC y SIEE
06. Representar diagramas de dispersión e interpretar la relación existente entre las variables.	CMCT

Fuente: Elaboración propia

6.6. Contenidos

Como viene recogido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, los contenidos se definen como un *conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias*. Los contenidos son organizados por asignaturas, que a su vez se clasifican en materias y ámbitos, según las fases educativas o los programas que curse el estudiantado.

Los contenidos propuestos por el Real Decreto en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º de E.S.O., concretamente en el Bloque 5 de Estadística y Probabilidad, y que se trabajarán y tienen relación con la unidad didáctica propuesta, son los siguientes:

- C1.** Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística.
- C2.** Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.
- C3.** Gráficas estadísticas. Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.
- C4.** Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis utilización.
- C5.** Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.

C6. Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.

Hacer referencia que, la Orden 14 de julio de 2016, recoge los mismos contenidos propuestos en el Real Decreto y nombrados anteriormente.

En la Imagen 2, observamos los estándares de aprendizaje y criterios de evaluación relacionados con los contenidos y recogidos en el Bloque 5. Las partes resaltadas en amarillo son las que tienen que ver con esta unidad didáctica.

Imagen 2: Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables amparados en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 5. Estadística y probabilidad		
Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento. Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística. Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.	1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas. 2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias. 3. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación. 4. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.	1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación. 1.2. Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos. 1.3. Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. 1.4. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. 1.5. Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. 1.6. Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno. 2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias. 2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia. 2.3. Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada. 2.4. Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas. 3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, cuantificar y analizar situaciones relacionadas con el azar. 4.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos estadísticos. 4.2. Representa datos mediante tablas y gráficos estadísticos utilizando los medios tecnológicos más adecuados. 4.3. Calcula e interpreta los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador). 4.4. Selecciona una muestra aleatoria y valora la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas. 4.5. Representa diagramas de dispersión e interpreta la relación existente entre las variables.

Fuente: Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre

Hay que tener en cuenta, que, durante el desarrollo de la unidad didáctica, también se trabajarán contenidos del Bloque 1, “Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas”, los cuales, por mayor extensión de la tabla en la que vienen reflejados en el RD, los ponemos en forma de listado:

- Planificación del proceso de resolución de problemas.
- Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, recuento

exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.

- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.
- Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: la recogida ordenada y la organización de datos, la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos, para facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico o la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.

Por otra parte, a continuación, se indican los contenidos más específicos que componen la unidad didáctica y que están conectados con los que se recogen en el Real Decreto 1105/2014 y en la Orden 14 de julio de 2016:

U1. Etapas de un estudio estadístico

- Etapas
- Iniciación a la estadística inferencial

U2. Tablas de frecuencia

- Tablas unidimensionales. Datos aislados y agrupados

U3. Gráficos estadísticos. Detección de falacias

- Representación gráfica de una variable unidimensional

U4. Parámetros en variables unidimensionales

- Parámetros de posición
 - Tendencia central
 - Tendencia no central
- Parámetros de dispersión
- Diagrama de cajas y bigotes

U5. Variables bidimensionales

- Tablas estadísticas en variables bidimensionales
- Representación gráfica de variables bidimensionales

U6. Dependencia y correlación entre variables

U7. Coeficiente de correlación lineal. Rectas de regresión

U8. Estadística con EXCEL

6.7. Metodología

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, la metodología didáctica se define como el *conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados.*

En el Decreto 111/2016, de 14 de junio, concretamente en el artículo 7, vienen recogidas las recomendaciones que hay que seguir para la metodología didáctica, concretamente para la etapa educativa de E.S.O.:

- a) El proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe caracterizarse por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral y, por ello, debe abordarse desde todas las materias y ámbitos de conocimiento.
- b) En el proyecto educativo del centro y en las programaciones didácticas se incluirán las estrategias que desarrollará el profesorado para alcanzar los objetivos previstos, así como la adquisición por el alumnado de las competencias clave.
- c) Los métodos deben partir de la perspectiva del profesorado como orientador, promotor y facilitador del desarrollo en el alumnado, ajustándose al nivel competencial inicial de este y teniendo en cuenta la atención a la diversidad y el respeto por los distintos ritmos y estilos de aprendizaje mediante prácticas de trabajo individual y cooperativo.
- d) Los centros docentes fomentarán la creación de condiciones y entornos de aprendizaje caracterizados por la confianza, el respeto y la convivencia como condición necesaria para el buen desarrollo del trabajo del alumnado y del profesorado.
- e) Las líneas metodológicas de los centros docentes tendrán la finalidad de favorecer la implicación del alumnado en su propio aprendizaje, estimular la superación individual, el desarrollo de todas sus potencialidades, fomentar su autoconcepto y su autoconfianza, y los procesos de aprendizaje autónomo, y promover hábitos de colaboración y de trabajo en equipo.
- f) Las programaciones didácticas de las distintas materias de la Educación Secundaria Obligatoria incluirán actividades que estimulen el interés y el hábito de la lectura, la práctica de la expresión escrita y la capacidad de expresarse correctamente en público.
- g) Se estimulará la reflexión y el pensamiento crítico en el alumnado, así como los procesos de construcción individual y colectiva del conocimiento, y se favorecerá

el descubrimiento, la investigación, el espíritu emprendedor y la iniciativa personal.

- h) Se desarrollarán actividades para profundizar en las habilidades y métodos de recopilación, sistematización y presentación de la información y para aplicar procesos de análisis, observación y experimentación, adecuados a los contenidos de las distintas materias.
- i) Se adoptarán estrategias interactivas que permitan compartir y construir el conocimiento y dinamizarlo mediante el intercambio verbal y colectivo de ideas y diferentes formas de expresión.
- j) Se emplearán metodologías activas que contextualicen el proceso educativo, que presenten de manera relacionada los contenidos y que fomenten el aprendizaje por proyectos, centros de interés, o estudios de casos, favoreciendo la participación, la experimentación y la motivación de los alumnos y alumnas al dotar de funcionalidad y transferibilidad a los aprendizajes.
- k) Se fomentará el enfoque interdisciplinar del aprendizaje por competencias con la realización por parte del alumnado de trabajos de investigación y de actividades integradas que le permitan avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.
- l) Las tecnologías de la información y de la comunicación para el aprendizaje y el conocimiento se utilizarán de manera habitual como herramientas integradas para el desarrollo del currículo.

En el apartado 5 de Fundamentación Didáctica se hace alusión a estudios sobre cómo llevar a cabo una buena enseñanza de la Estadística. Los autores proponen, además del desarrollo de una buena actitud e interés hacia su aprendizaje, contextualizar los ejemplos y actividades que se plantean a los alumnos en ámbitos de la vida real, así como ver la solución de un problema estadístico como un proceso de investigación. Por tanto, para afianzar estas proposiciones, vamos a trabajar con las siguientes metodologías en las distintas sesiones de clase:

- Metodología de tipo transmisivo: se basa en el método de enseñanza tradicional, por la cual el profesor trasmite los conocimientos a los alumnos mediante explicaciones en clase apoyándose de apuntes, recursos digitales y pizarra tradicional. Es importante que las explicaciones no se hagan demasiado largas y pesadas, para que el alumno no se canse ni se distraiga. Esta forma de llevar la clase es necesaria, ya que habrá momentos en los que resultará esencial explicar conceptos concretos, pero sin dejar atrás un estilo de enseñanza que permita a los alumnos ser colaborativos y dinámicos con un apropiado clima de participación e interactividad (dando oportunidad de que

expresen sus dudas o se encarguen de la corrección o explicación de algún ejercicio), disponiendo de ejemplos y recursos que permitan apoyarse en la vida real a la hora de transmitir los conocimientos y así poder garantizar la atención e interés del alumnado.

- Metodología basada en la investigación y resolución de problemas: es muy diferente al tipo de metodología de enseñanza directa explicada anteriormente. Se distingue mayormente por el tipo de comunicación matemática generada, es decir, por los roles del profesor y estudiante y por el desarrollo de las tareas de forma grupal y colaborativa. A los alumnos se les propondrán una serie de tareas e investigaciones y deberán resolverlas a partir de un proceso basado en fases (fase de inicio o introducción, de exploración, discusión y síntesis); el profesor resuelve posibles dudas, aumenta el interés y la inquietud, cohesiona los conocimientos y asegura que todas las ideas y conclusiones queden anotadas.
- Metodología basada en el aprendizaje cooperativo: esta metodología parte de una organización de la clase en pequeños grupos heterogéneos, en lo que los alumnos podrán interactuar y enriquecerse unos de otros.
- Metodología basada en el uso de herramientas TIC: se desarrollarán actividades mediante el uso de las TIC en el aula de informática.

6.8. Actividades y recursos

6.8.1. Actividades

Las actividades propuestas en esta unidad didáctica para realizarlas con los alumnos y poder trabajar los contenidos, los criterios y llegar a conseguir los objetivos planteados, se adjuntan en los diferentes Anexos. Los tipos de actividades que se trabajarán vienen recogidos en la Tabla 5, así como lo que se desea conseguir.

Tabla 5: Tipos de actividades y propósito que se busca con ellas.

TIPO DE ACTIVIDAD	PROPÓSITO
Introducción y/o motivación	Situar y motivar al alumno de lo que se va a estudiar
Aprendizaje y/o desarrollo	Aprender y desarrollar los contenidos propuestos
Consolidación	Asegurar y afianzar aprendizajes
Apoyo y refuerzo	Asegurar e intensificar los contenidos aprendidos

Investigación	Llevar a cabo una investigación a partir de los contenidos aprendidos
Autoevaluación	Mostrar al alumno el grado de consecución de los objetivos

Fuente: Elaboración propia

En la unidad didáctica se proponen actividades generales para todos (Anexos I, II y III), es decir, actividades que los alumnos pueden hacer independientemente de sus características y también algunas actividades destinadas para la inclusión y atención a la diversidad del alumnado, como las propuestas en el Anexo V. Es difícil plantear actividades dirigidas a alumnado con capacidades diferentes ya que no todos los niños presentan las mismas dificultades ni las mismas necesidades. Por ejemplo, en el caso de discentes con altas capacidades resulta muy complicado plantear ejercicios o actividades destinadas para alumnos así, ya que, si en el aula tenemos dos alumnos con altas capacidades uno puede que resuelva actividades propias de un curso correspondiente a dos niveles por encima del suyo, y, el otro alumno, puede que tenga capacidad de resolver actividades propias de estudiantes de grado. Por tanto, cuando nos encontramos con algún alumno así, lo propio será evaluar el caso y decidir qué tipo de actividad y motivación son las adecuadas.

6.8.2. Recursos

Esta unidad didáctica se desarrollará en el aula de clase, a excepción de dos sesiones que se impartirán en el aula de informática. Los recursos que vamos a utilizar son:

- Libro de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º de E.S.O., además de los apuntes del profesor.
- Para los apuntes y notas, los alumnos utilizarán su cuaderno y en él resolverán los problemas propuestos, mediante el uso de lápiz, bolígrafos, goma, ...
- La pizarra será un elemento esencial. En ella se desarrollarán ejemplos y se llevará a cabo la corrección de ejercicios.
- Las fotocopias que sean necesarias (de problemas, esquemas, etc.) serán aportadas por el profesor.
- Para el cálculo de las operaciones, podrán hacer uso controlado de una calculadora no programable.
- Los recursos tecnológicos que componen el aula son: pizarra digital, proyector, conexión a internet, ordenador del profesor en clase y ordenadores en el aula de informática.

6.9. Atención a la diversidad

El Decreto 111/2016, de 14 de junio, dedica el capítulo VI a la atención a la diversidad. En él se indica que, la atención a la diversidad, es un indicio de respeto a las diferencias y equiparación a las posibles desigualdades sociales, económicas culturales y personales. Por ello, la comunidad autónoma de Andalucía dispone de un modelo educativo inclusivo que sostiene principios de igualdad y equidad y permite una educación centrada en las dimensiones individual y social del alumno.

Por tanto, para tener en cuenta al alumnado con necesidades educativas concretas el profesorado puede adaptar y modificar las actividades propuestas a los menesteres del discente, teniendo una adaptación individual pero no quedando exento del grupo. Se desean conseguir los mismos conocimientos, pero con distintos niveles de dificultad, así como garantizar el alcance de las competencias necesarias que permitan al alumno no sólo hacerse con el título de E.S.O., sino también aprovechar y beneficiarse de los conocimientos de esta etapa.

Hay que tener en cuenta que estamos en una clase en la que se imparten las Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, y en ellas, no suele haber alumnos con demasiados problemas, ya que, normalmente, estos suelen decantarse por las Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. En el grupo en el que he realizado las prácticas hay dos repetidores, del que hay que estar un poco más pendiente para ver si necesitan alguna adaptación. Pero ellos van bien, en ocasiones el profesor les modifica las actividades más complejas o necesitan que se les repita de nuevo algún contenido de los explicados, lo que se hace sin problema.

6.10. Temporalización

Se va a proceder a realizar la temporalización de la Unidad Didáctica (Tabla 6), planificando el número de sesiones y la distribución de los contenidos y actividades, que se impartirán en el tercer trimestre de 4º curso de E.S.O. y como espacio de tiempo mayo de 2021.

El número de horas de esta asignatura (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas) es de 4 horas por semana. El número de sesiones previstas para el desarrollo de esta unidad es de 12. Cada una de ellas tiene una duración de 60 minutos y se desarrollarán en el aula habitual de clase o en el aula de ordenadores, lo cual será indicado a los alumnos.

Tabla 6: Temporalización de la Unidad Didáctica

Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4
Días 18, 20 y 21 de mayo	Días 24, 25, 27 y 28 de mayo	Días 31 de mayo, 1, 3 y 4 de junio	Día 7 de junio (Evaluación)
Sesiones 1, 2 y 3	Sesiones 4, 5, 6 y 7	Sesiones 8, 9 10 y 11	Sesión 12

Fuente: Elaboración propia

6.10.1. Programación de aula

A continuación, se muestra cómo será el trascurso de cada una de las sesiones. En la última se hará el examen de evaluación.

Indicar que además de los objetivos y contenidos específicos aquí mostrados y pertenecientes al Bloque 5, también se trabaja de forma transversal con los del Bloque 1, todos ellos recogidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre.

SESIÓN 1: Conocimientos previos e introducción del tema. Etapas de un estudio estadístico.	
Recursos: Ficha de las actividades del grupo I, pizarra tradicional y digital, libro de texto y cuaderno de trabajo.	Actividades: Se trabajan las del grupo I. Tipo: - Introducción y motivación -Aprendizaje y desarrollo
Objetivos: O1 y O5	
Competencias: CMCT, CAA, CSC, SIEP	
Contenidos: C1, C2, C4 y U1 (ETAPAS DE UN ESTUDIO ESTADÍSTICO)	
Desarrollo de la clase: La primera parte de la clase la dedicamos a la introducción del tema que vamos a estudiar, nos llevará unos 5 minutos. Para ello, visualizamos en clase dos vídeos cogidos del INE (Instituto Nacional de Estadística):	
<ul style="list-style-type: none"> - Vídeo 1: “La Estadística cosa de todos”. En este vídeo se muestran cifras y datos relevantes que elabora el INE de diferentes ámbitos. Con él se pretende que el alumno se dé cuenta de la relevancia de la Estadística en todos los contextos en los que se trabaja. Link: https://youtu.be/KGMSSlftpGg - Vídeo 2: “Cómo se realizan las estadísticas”. En el vídeo se muestra qué estadísticas se hacen, cómo se hacen, dónde y cómo se recoge la información, etc. El vídeo ayuda a ver al alumno la manera en la que se trabaja cuando se procede a realizar un estudio estadístico. Link: https://youtu.be/S00kv3rk2o 	

A continuación, tras repartir a los alumnos la ficha con las actividades correspondientes al grupo I y para recordar conocimientos previos relacionados con las medidas de posición y dispersión, se realiza de forma conjunta la actividad 1 propuesta en este grupo, que consiste en completar un crucigrama y que será aportada por el profesor. A partir de ella, se procederá a recordar contenidos y servirá para que el docente capte qué es lo que los alumnos recuerdan y conocen del tema que se van a estudiar. A esta parte le dedicaremos unos 20 minutos.

Para empezar el tema, se leerá y se comentará en clase la lectura de la actividad 2 titulada “el valor de las muestras”. Con ella, se explicará la importancia de las muestras y desarrollarán las etapas que forman parte de un estudio estadístico. Con el punto de estadística inferencial se hablará de cómo deben de ser las muestras.

Para casa, se proponen los ejercicios 3, 4 y 5 de dicho grupo.

SESIÓN 2: Tablas de frecuencia

Recursos: Ficha de las actividades del grupo II, pizarra tradicional, libro de texto, calculadora y cuaderno de trabajo.

Actividades: Se trabajan las del grupo II. Tipo: -Aprendizaje y desarrollo

Objetivos: O2, O3

Competencias: CMCT, CAA, CSC, SIEP

Contenidos: C1, C3 y U2 (TABLAS DE FRECUENCIA)

Desarrollo de la clase:

En primer lugar, al inicio de la clase se corregirán las tres actividades propuestas en la sesión anterior. Podrán participar los alumnos explicando cómo las han resuelto y el profesor subsanará los posibles fallos y resolverá las dudas que puedan surgir. Esto nos llevará unos 15 minutos.

La siguiente parte de la clase la dedicamos a la explicación de la construcción de tablas de frecuencias tanto en variables discretas como continuas. Se hará mediante la exposición de dos ejemplos con datos agrupados y sin agrupar y en base a ellos, se calcularán las frecuencias absolutas y relativas, así como las marcas de clase cuando proceda. El tiempo estimado es de 30 minutos.

La última parte de la clase, los 15 minutos restantes, se dedicará a la resolución de los problemas planteados en este grupo. Las dudas que les vayan surgiendo a los alumnos serán resueltas por el profesor en voz alta para que todos los discentes se enteren. El ejercicio que quede sin resolver lo harán en casa.

SESIÓN 3: Gráficos estadísticos. Detección de falacias	
Recursos: Ficha de las actividades del grupo III, pizarra tradicional y digital, libro de texto y cuaderno de trabajo.	Actividades: Se trabajan las del grupo III. Tipo: - Introducción y motivación - Aprendizaje y desarrollo - Consolidación
Objetivos: O2	
Competencias: CMCT, CAA, CSC, SIEP, CEC y CCL	
Contenidos: C3 y U3 (GRÁFICOS ESTADÍSTICOS. DETECCIÓN DE FALACIAS)	
<p>Desarrollo de la clase:</p> <p>Antes de empezar con el nuevo punto del tema, corregimos en unos 10 minutos la actividad del día anterior.</p> <p>Para empezar a trabajar con los gráficos estadísticos, a modo de introducción, procedemos a la lectura planteada en la actividad 1 del grupo III, la cual se han proporcionado a partir de una ficha a todos los alumnos. Con esta actividad se pretende hacer ver a los alumnos que no siempre nos debemos de fiar de la primera impresión, sino que debemos ser críticos y observar para evitar las posibles falacias. El tiempo estimado es de unos 10 minutos.</p> <p>Para la siguiente parte, a partir del libro de texto se explican los diferentes gráficos: diagrama de barras, histograma y diagrama de sectores (se pondrán ejemplos proyectados en la pizarra digital). Nos llevará unos 20 minutos.</p> <p>Los restantes 20 minutos, los dedicaremos a hacer en clase los ejercicios 2, 3 y 4 planteados en el grupo III. No llevarán ninguna tarea para casa.</p>	

SESIÓN 4: Parámetros en variables unidimensionales	
Recursos: Ficha de las actividades del grupo IV, pizarra tradicional y digital, libro de texto, calculadora y cuaderno de trabajo.	Actividades: Se trabajan las del grupo IV. Tipo: - Aprendizaje y desarrollo - Consolidación
Objetivos: O2, O4 y O5	
Competencias: CMCT, CAA y CSC	
Contenidos: C1, C4, C5 y U4 (PARÁMETROS EN VARIABLES UNIDIMENSIONALES)	
<p>Desarrollo de la clase:</p> <p>Esta sesión es la más densa de todas a nivel de contenido.</p> <p>Se empieza la clase con el desarrollo de las medidas de posición, tanto de tendencia central (media, mediana y moda) como de tendencia no central (cuartiles, deciles y percentiles). Todo se explica mediante ejemplos con sus respectivas interpretaciones. Una vez terminadas las</p>	

medidas de posición, se realiza un ejemplo resuelto con todas las medidas completas. El tiempo que se estima para esta parte es de unos 30 minutos.

Continuamos con las medidas de dispersión (varianza, desviación típica, recorrido y coeficiente de variación) para las que también se realizan ejemplos y además se calcularán para el ejercicio resuelto anteriormente las medidas de dispersión. Nos llevará unos minutos.

Los últimos 10 minutos, los dedicaremos a una breve explicación sobre el diagrama de caja y bigotes, la cual continuaremos el próximo día.

Como actividades para que practiquen lo explicado se plantean 1, 2, 3 y 5.

SESIÓN 5: Variables bidimensionales

Recursos: Ficha de las actividades del grupo V, pizarra tradicional y digital, libro de texto, calculadora y cuaderno de trabajo.	Actividades: Se trabajan las del grupo V. Tipo: -Aprendizaje y desarrollo -Consolidación
--	---

Objetivos: O3, O4 y O6

Competencias: CMCT, CAA y CSC

Contenidos: C3, C4, C5 y U5 (VARIABLES BIDIMENSIONALES)

Desarrollo de la clase:

La primera parte de la clase la vamos a dedicar a explicar los gráficos de caja y bigotes. Para ello, vamos hacer en clase el ejercicio 7 propuesto en el grupo IV. Y también pasaremos a corregir los ejercicios que había para casa. Dedicaremos unos 40 minutos.

El resto de la clase la empleamos en la explicación de cómo elaborar tablas estadísticas con variables bidimensionales, para lo que nos apoyaremos en ejemplos que iremos resolviendo en pizarra. Actividades propuestas 1 y 2 del grupo V.

SESIÓN 6: Dependencia y correlación entre variables.

Recursos: Ficha de las actividades del grupo VI, pizarra tradicional y digital, libro de texto y cuaderno de trabajo.	Actividades: Se trabajan las del grupo VI. Tipo: -Aprendizaje y desarrollo -Consolidación
--	--

Objetivos: O6

Competencias: CMCT, CCL, CAA, CSC y SIEP

Contenidos: C5, C6 y U6 (DEPENDENCIA Y CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES)

Desarrollo de la clase:

Empezamos con la corrección de las actividades del día anterior; le dedicamos unos 15 minutos.

Durante los 20 minutos siguientes, continuamos con la representación gráfica de variables bidimensionales (nube de puntos), para la que veremos algún ejemplo.

El tiempo restante de clase lo emplearemos en la explicación de dependencia y los diagramas de dispersión diferentes que se les asocia y lo iremos enlazando con la relación de dependencia que hay entre las dos variables que forma una distribución bidimensional para así llegar también hasta la correlación. Para ello veremos ejemplos de graficas (diagramas de dispersión) en el proyector.

Se harán en clase las actividades 1, 2 y 3 propuestas en el grupo de ejercicios, no llevarán nada para casa.

SESIÓN 7: Coeficiente de correlación lineal. Rectas de regresión.

Recursos: Ficha de las actividades del grupo VII, pizarra tradicional y digital, libro de texto, calculadora y cuaderno de trabajo.

Actividades: Se trabajan las del grupo VII.
 Tipo:
 -Aprendizaje y desarrollo
 -Consolidación

Objetivos: O4

Competencias: CMCT, CAA y CSC

Contenidos: C6 y U7 (COEFICIENTE DE CORRELACIÓN LIEAL. RECTAS DE REGRESIÓN)

Desarrollo de la clase:

Empezamos la clase introduciendo el término de coeficiente de correlación lineal. Seguimos con los valores que puede tomar y cómo se ajustan los puntos en la gráfica; la visualización de las gráficas se hará mediante el libro de texto y con ayuda del proyector. Continuaremos con las rectas de regresión y realizaremos un ejemplo. El desarrollo de la explicación prevista para esta sesión nos llevará unos 40 minutos.

El tiempo restante lo dedicamos a realizar los ejercicios 1 y 2 pertenecientes a este grupo de actividades.

Al final de la sesión, se informa a los alumnos que la próxima clase será en el aula de informática.

SESIÓN 8: Estadística con EXCEL

Recursos: Ficha de las actividades del grupo VIII, pizarra digital y cuaderno de trabajo (para tomar apuntes)

Actividades: Se trabajan las del grupo VIII.
 Tipo:
 -Introducción y motivación
 -Aprendizaje y desarrollo

Objetivos: O2, O3 y O4

Competencias: CMCT, CD, CAA, CSC, SIEP y CEE
Contenidos: C3, C4, C5, C6 y U8 (ESTADÍSTICA CON EXCEL)
<p>Desarrollo de la clase:</p> <p>Empezamos la clase explicando el funcionamiento del programa Excel y en qué consiste. Introducimos los datos y elaboramos la tabla adecuada. Vamos resolviendo el ejercicio e interpretando todos los resultados.</p> <p>Comentar en clase que la actividad 2 es voluntaria y quien la entregue tendrá un punto más en el examen. Quien decida no hacerla, ni se le suma ni se le resta nota.</p> <p>Se comunica a los alumnos, que quien quiera practicar más ejercicios de los realizados durante el tema, puede hacer todos los demás propuestos por su cuenta y entregarlos al profesor, el cual, se los corregirá sin problema y así el alumno puede tener más material para su repaso o estudio, además servirá en modo de autoevaluación para que el alumno sepa qué grado de manejo de los conocimientos tiene. Se valorará de forma positiva.</p>

SESIÓN 9: REPASO	
<p>Recursos: Fichas de actividades proporcionadas, fichas de actividades de repaso, ficha de la actividad de investigación, calculadora y cuaderno de trabajo.</p>	<p>Actividades: Se trabajan las del Anexo II -Apoyo y refuerzo</p>
<p>Objetivos: se trabajan todos los objetivos</p>	
<p>Competencias: CCL, CMCT, CAA, CSC, SEIP y CEC</p>	
<p>Contenidos: se trabajan todos los contenidos</p>	
<p>Desarrollo de la clase:</p> <p>Esta sesión la dedicaremos a realizar ejercicios bien del tema o bien de repaso para afianzar contenidos y practicar aún más de cara al examen.</p> <p>Los últimos 20 minutos de clase los dedicaremos a la etapa de introducción de la actividad de investigación, donde se explicará en qué consiste y se realizarán los grupos de trabajo. Hay que indicar que la próxima sesión será en el aula de ordenadores.</p>	

SESIÓN 10: Actividad de investigación	
<p>Recursos: ficha de la actividad de investigación, pizarra y ordenadores.</p>	<p>Actividades: Se trabaja la actividad del Anexo III. Tipo: -Investigación</p>
<p>Objetivos: O1, O3, O4 y O5</p>	

Competencias: CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SEIP y CEC
Contenidos: C1, C2, C3, C4, U1, U2, U3, U4 y U8.
Desarrollo de la clase: La clase se dedica íntegramente al desarrollo de la actividad de investigación.

SESIÓN 11: Repaso	
Recursos: fichas de las actividades, libro y cuaderno de clase	Actividades: Se trabaja la actividad del Anexo II y III. Tipo: -Investigación -Apoyo y refuerzo
Objetivos: se trabajan todos los objetivos	
Competencias: CCL, CMCT, CAA, CSC, SEIP y CEC	
Contenidos: se tratan todos los contenidos	
Desarrollo de la clase: En los primeros 20 minutos de clase, reorganizamos conocimientos y conceptos tratados en la actividad de investigación. El resto de la sesión se dedica a la resolución de actividades y dudas enfocadas al examen.	

SESIÓN 12: Prueba de evaluación
Recursos: calculadora y bolígrafo
Desarrollo de la clase: Con esta prueba o examen de evaluación que se muestra en el Anexo IV, se pretende evaluar los conocimientos adquiridos. Se realizará en un máximo de 60 minutos, a partir de las instrucciones indicadas en el mismo, de manera individual y con el máximo silencio posible. Las hojas serán repartidas por el docente, se les aportarán los folios en blanco que necesiten y se permite el uso de la calculadora. Todos los procedimientos, cálculos e interpretaciones deben de estar correctamente reflejados.

6.11. Evaluación

La educación en Matemáticas junto con su evaluación son esenciales para la educación y enseñanza del estudiantado, midiendo el grado de consecución de los objetivos propuestos. La evaluación se hará teniendo en cuenta tanto los aprendizajes adquiridos como los procesos de enseñanza que se han seguido.

Según lo acordado en el artículo 14 del Decreto 111/2016, de 14 de junio, el proceso de aprendizaje del estudiantado será evaluado de manera continua, formativa, integradora y diferenciada conforme a las diferentes materias que forman el currículo:

- Será continua por la observación constante del progreso del alumno y la toma de medidas en el momento del curso que sea necesario si se llegan a manifestar problemas que impidan conseguir las competencias esenciales.
- Decimos que será formativa porque mediante el aprendizaje se recoge información que permite una mejora de los procesos y de los resultados de enseñanza- aprendizaje.
- Integradora, para que sea considerada en las demás asignaturas y diferenciada según las diversas materias permitiendo al profesor una evaluación individualizada de la materia que imparte.

En la Imagen 2, obtenida del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, vienen señalados los estándares de aprendizaje evaluables correspondientes al Bloque V, de Estadística y Probabilidad, y que tienen coherencia con los criterios seleccionados, no olvidándonos de que este bloque es transversal con los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje pertenecientes al Bloque I. Los demás que no están señalados se trabajarán y se evaluarán en las demás unidades didácticas correspondientes.

6.11.1. Criterios e instrumentos de evaluación

Para evaluar el aprendizaje de los alumnos, establecemos una serie de criterios basados en unos principios de valoración a partir de los cuales obtendremos información sobre lo que domina, entiende y sabe hacer el alumno. Los instrumentos de evaluación son los medios que utilizaremos para la valoración del alumno y nos ayudarán a recabar los datos en los que nos basaremos para evaluar. En la Tabla 7 se muestran los instrumentos y criterios de evaluación utilizados, así como la forma de proceder.

Tabla 7: Instrumentos de evaluación y porcentaje que se le asigna.

INSTRUMENTOS	PORCENTAJE DE CALIFICACIÓN FINAL
<p>Revisión del cuaderno de clase: De forma puntual se revisarán los cuadernos para ver si los alumnos van realizando las actividades y las correcciones adecuadas.</p>	5%
<p>Participación en clase: Será evaluada mediante la observación del profesor. Se valorará positivamente una buena disposición y actitud participativa del alumno, colaborando en la corrección de los ejercicios e interviniendo en clase de forma respetuosa y constructiva, ya sea aportando ideas o preguntando dudas.</p>	10%
<p>Actividades voluntarias: Se valorará la entrega de actividades propuestas como voluntarias, de forma bien presentada y ordenada. Con esto se pretende incentivar al alumno en el trabajo de la materia. En esta unidad, la actividad voluntaria es la que hay que realizar con Excel (Anexo I). Aquí se incluye también las actividades que el alumno puede realizar para practicar y saber cómo va.</p>	15%
<p>Actividades de investigación: Son las actividades en la que los alumnos deben de realizar algún trabajo o actividad, ya sea en grupo o individual, que tengan que investigar o indagar para trabajar sobre un tema determinado.</p>	20%
<p>Examen de evaluación: A partir de una prueba objetiva (Anexo IV), se evaluarán los conocimientos del alumno.</p>	50 %

Fuente: Elaboración propia.

Para facilitar al docente la evaluación de las actividades realizadas por los alumnos (voluntarias y de investigación) y asignar una calificación numeral, en la Tabla 8, se muestra la rúbrica que se va a emplear para valorar diferentes aspectos.

Tabla 8: Rúbrica para la corrección de las actividades

Se valora	Muy bien (8,5-10)	Bien (7-8,5)	Regular (5-7)	Muy mal (<5)	NOTA
Número de actividades	Entrega todas las actividades posibles	Le falta alguna actividad o algún apartado	Hace entrega de una o dos actividades	No entrega casi nada o nada	
Presentación y orden	Muy buena presentación y limpieza. Correcto orden en el desarrollo de las actividades.	Buena presentación y buen orden. Al mirar las actividades dan buena impresión.	Las actividades no son presentadas de una forma adecuada, cuesta seguir procedimientos y orden.	Muy mala presentación. No gusta ver los ejercicios.	
Uso de conceptos	Hace buen uso de los conceptos y términos explicados. Se nota que los entiende y los controla.	Puede haber algún fallo, pero por lo general son utilizados de forma adecuada.	Utiliza los términos, pero da la impresión de que no los termina de entender y hay errores.	No ha entendido los conceptos.	
Diagramas	Representa perfectamente los datos mediante los diagramas indicados.	Buena representación de los datos. Se observan de forma clara.	No hay una buena representación. Son difíciles de entender.	No se entienden bien los diagramas o ni se usan.	
Interpretación de resultados	Los resultados son interpretados de forma correcta y coherente.	La interpretación es adecuada, salvo algunos fallos.	No se comentan de forma adecuada los resultados. Faltan interpretaciones.	No se interpretan los resultados o se hace mal.	

Fuente: Elaboración propia

Para los alumnos que no hayan conseguido superar la unidad didáctica, bien porque les cueste más trabajo y no hayan podido alcanzar las condiciones mínimas requeridas o bien, por posible desinterés hacia la materia, se buscarán alternativas para que puedan conseguir los objetivos y puedan superar la unidad.

7. CONCLUSIONES

Con la realización de este Trabajo Fin de Máster se espera haber logrado los objetivos propuestos al inicio del mismo, además de haber alcanzado el objetivo general, basado en tratar e incorporar habilidades y conocimientos aprendidos en el Máster y en el período de prácticas, que si bien, se ha desarrollado de forma atípica debido a la situación que estamos viviendo causada por el Covid-19, me ha permitido interactuar con el alumnado y estar al frente de una clase, aunque haya sido de forma virtual. Con esto, he podido apreciar las necesidades que algunos alumnos requieren, no sólo a nivel educativo, sino también a nivel social. Hay alumnos que no tienen suficientes recursos para seguir las clases de forma online, o alumnos que se encuentran mal anímicamente por la situación vivida y necesitan un extra de ayuda y motivación. Es aquí cuando he podido aplicar los conocimientos más teóricos estudiados en las diferentes asignaturas impartidas en el Máster, donde se estudiaba el aprendizaje y el desarrollo de la personalidad de los alumnos en sus diferentes etapas.

Del estudio y comparación de las diferentes investigaciones consultadas sobre la influencia de las Matemáticas y Estadística en la sociedad, así como las posibles dificultades que se pueden encontrar en su aprendizaje, podemos sacar como conclusión que una sociedad estadísticamente alfabetizada será más crítica y objetiva. Para que los alumnos valoren la Estadística se deben de proponer situaciones reales, relacionadas con la sociedad, la salud, el deporte, etc.

Tras esto, se ha desarrollado el tema de “Parámetros estadísticos. Cálculo, significado y propiedades” cumpliendo así el objetivo de elaborar un tema del temario oficial de oposiciones. También se ha llevado a cabo la comparación de dos libros de texto empleados en clase para impartir la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º de E.S.O.

Por último, se ha elaborado una unidad didáctica con los objetivos, contenidos, metodología empleada y su evaluación, teniendo en cuenta las necesidades del alumnado que pueda requerir alguna adaptación. Además, se han propuesto diferentes tipos de actividades para que los alumnos puedan practicar los conocimientos estudiados, hacerles partícipes de un estudio estadístico, trabajen en grupo y puedan relacionarse con las TIC.

Para concluir, puedo decir que con el trabajo no sólo se han alcanzado los objetivos, habilidades y conocimientos planteados, sino que también se han ampliado, permitiendo con ello, mejorar mi formación para mi futuro profesional como docente. Además, este estado inusual que actualmente tenemos, ha permitido iniciar una

adaptación a un cambio repentino e inesperado que perdurará en el tiempo y que, con responsabilidad, entusiasmo e ilusión de los docentes, se podrá conseguir que la educación supere los retos que se le impongan.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., Pérez, Antonio., Donaire J.J., (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O.* España. Editorial: SM.
- Apuntes Marea Verde. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º de E.S.O. <http://www.apuntesmareaverde.org.es/>
- Aula abierta de Matemáticas: <https://matematicasiesoja.wordpress.com/4o-eso-b/>
- Batanero, C. (2000). “*¿Hacia dónde va la educación estadística?*”. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada. Blaix15, pp 2-13.
- Batanero, C., González-Ruiz, I., López –Martín, M.M. y Contreras, J.M. (2015). “*La dispersión como elemento estructurador del currículo de estadística y probabilidad*”. Epsilon. pp 7-20.
- Begg, A. (1997). “*Some emerging influences underpinning assessment in statistics*”. En I. Gal, y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education*, pp. 17-26. Amsterdam: IOS Press.
- Cobo, B. y Díaz, C. (2003).” *Media, mediana y moda. ¿Qué significa esto para los estudiantes de secundaria?*”. 27 Congreso nacional de Estadística e Investigación Operativa. Lleida, 8-11 de abril de 2003.
- Colegio concertado Alcaste:
[http://www.alcaste.com/departamentos/matematicas/secundaria/Cuarto/09 Estadistica/Ejercicios_resueltos.pdf](http://www.alcaste.com/departamentos/matematicas/secundaria/Cuarto/09_Estadistica/Ejercicios_resueltos.pdf)
- Cólera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I., Colera, R. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O.* Madrid, España. Editorial: Anaya.
- Cuadras, C.M. (2006). “*La Estadística, un instrumento para el progreso de la sociedad*”. Universidad de Barcelona. Boletín de Estadística e Investigación Operativa, ISSN 1889-3805, Vol. 22, Nº 1, pp 29-38.
- Del Pino, G., y Estrella, S. (2012). “*Educación estadística: relaciones con la matemática*”. Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana, pp 53-64.

- Del Pino, J. y Estepa, A. (2019). “Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria”. Universidad de Jaén. AIEM-Avances de investigación en Educación Matemática, pp 86-102.
- De los Santos, M.I., Martínez, R. A., Martínez, P., Muñoz, M.C., (2020). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O.* España. Editorial: Casals.
- García, A. (2019). Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas: Crucigrama de introducción a la Estadística.
<https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2019/05/07/crucigrama-de-introduccion-a-la-estadistica/>
- Garrett, A.J. y García, J.A. (2008). “Caracterización de algunos aspectos de la comprensión de la media aritmética: un estudio con alumnos de secundaria y bachillerato”. Universidad de La Laguna. Tenerife, España. Vol. 17 Nº1, pp 31-57.
- Hernández, A. (2007). *Curso elemental de Estadística Descriptiva*. Ediciones Pirámide.
- Holmes, P. (1980). “Teaching Statistics”, pp 11 -16. Sloug: Foulsham Educational.
- Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado:
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_4_eso_A_estadistica/impresos/4quincena11.pdf
- Matemáticas online. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º de E.S.O.
<https://www.matematicasonline.es/cuartoeso/apuntes2/estadistica.pdf>
- Mejía, D., Ocaña, J.M., Romero, R., (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O.* Zaragoza, España. Editorial Edelvives, Vol. 1
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. MEC. PISA 2018. Programa para la evaluación internacional de estudiantes. OCDE. Informe español.
- Molero, A., Gea, M.M. y Batanero, C. (2019). “¿Qué conocimientos de la media aritmética tienen los estudiantes al inicio de la Educación Secundaria?”. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 423-432). Valladolid: SEIEM.
- Montero, J.M. (2007). *Estadística descriptiva*. Editorial Thomson.

Núñez J.C., González-Pienda J.A., Álvarez L., González P., González-Pumariiega S., Roces C., Castejón L., Solano P., Bernardo A., García D. (2005). Facultad de ciencias de la educación. Universidad de La Coruña.

Watson, J.M. y Moritz, J.B. (2000a). *“Development of understanding of sampling for statistical literacy”*. Journal of Mathematical Behavior. N.º 19, pp 109-136.

Watson, J.M. and Moritz, J.B. (2000b). *“The longitudinal development of understanding of average”*. Mathematical thinking and learning. pp 11-50.

ANEXO I

Ejercicios para realizar durante el tema

GRUPO I

- **Contenidos:** C1, C2 y U1 (ETAPAS DE UN ESTUDIO ESTADÍSTICO)

- **Tipo de actividad:** Para este grupo se proponen cinco actividades. En primer lugar, y a modo de motivación del tema, vamos a empezar realizando en clase un crucigrama. A partir de él, podemos comprobar lo que saben los alumnos y que recuerdan. A continuación, para introducir el tema, continuamos leyendo una actividad titulada “El valor de las muestras” para comentarla en clase y sacar ideas, además de averiguar cuáles son las etapas de un estudio estadístico y razonar sobre los pasos seguidos y las conclusiones obtenidas. Con esta actividad, mientras trabajamos la lectura, motivamos al alumnado y aprovechamos para introducir el tema. Por tanto, estamos ante dos actividades de tipo introducción y motivación. Las demás de este grupo son de aprendizaje y desarrollo para poner en práctica los contenidos propuestos.

- **Objetivos específicos de la unidad:** O1 y O5

ACTIVIDAD 1:

Rellena el siguiente crucigrama. Recuerda que cuando la respuesta consta de varias palabras, estas se separarán con una casilla en blanco.

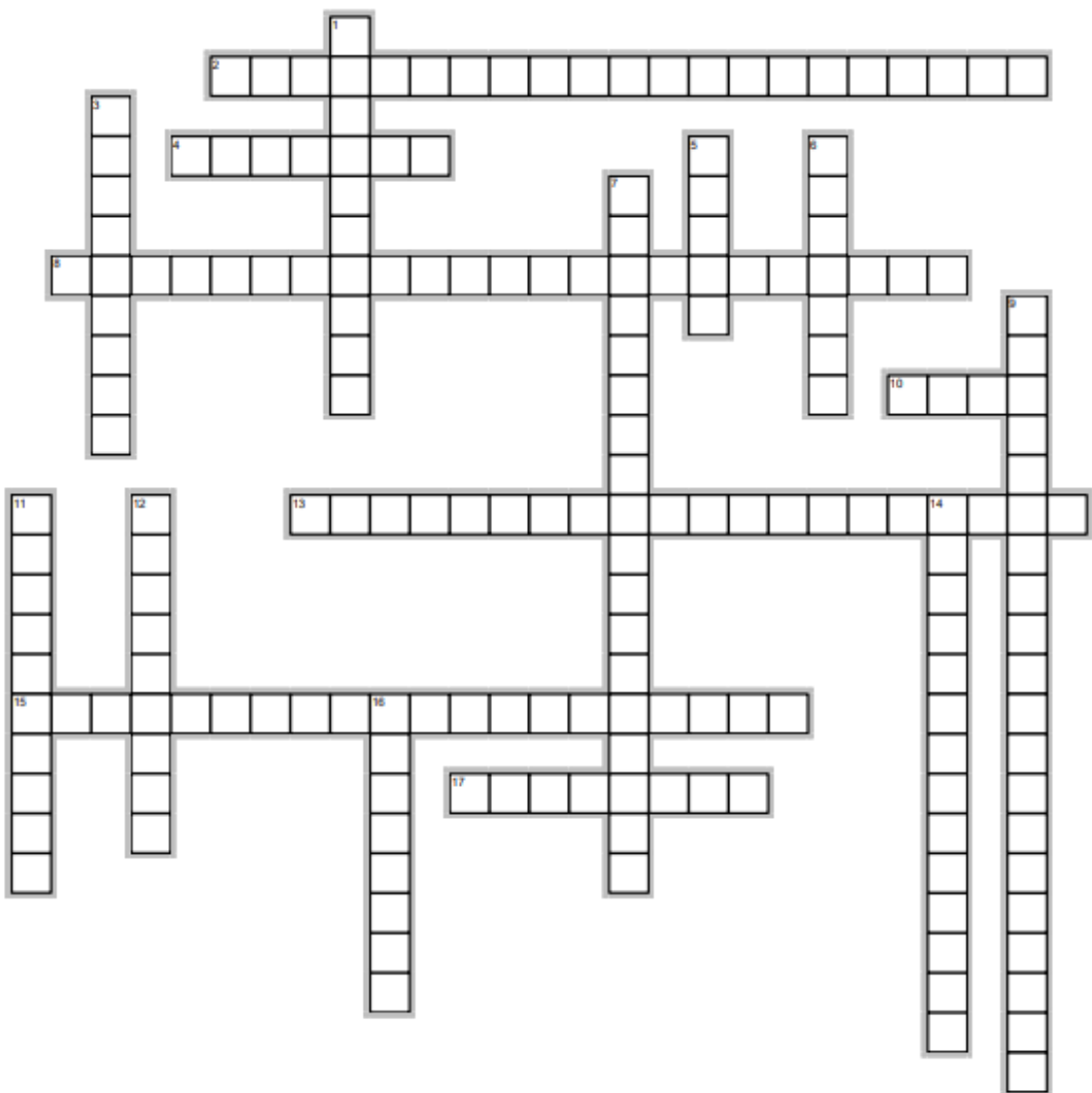
Horizontales

2. Una variable estadística que se expresa mediante un número.
4. Un subconjunto, extraído de la población cuyo estudio sirve para deducir características de toda la población.
8. Sirven para sintetizar la información dada por una tabla o una gráfica.
10. El valor que se repite más.
13. La tabla que sirve para organizar los datos recogidos.
15. Cuando una variable estadística no se expresa mediante un número, sino mediante una cualidad.
17. Cuando una variable cuantitativa sólo puede tomar valores aislados se dice que es.

Verticales

1. La representación para variables continuas.

3. El conjunto de todos los elementos objeto de nuestro estudio.
5. Lo que se obtiene al sumar todos los datos y dividir la suma por el número de datos.
6. La es el valor que tiene tantos individuos por debajo como por encima.
7. La representación para variables cuantitativas discretas o variables cualitativas.
9. Los ángulos en esta representación son proporcionales a las frecuencias.
11. Si la variable toma muchos valores, conviene agruparlos en.....
12. Cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.
14. La media es el parámetro de más utilizado.
16. Se dice de una variable estadística cuantitativa que puede tomar todos los valores de un intervalo.



Fuente: <https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2019/05/07/crucigrama-de-introduccion-a-la-estadistica/>

ACTIVIDAD 2: EL VALOR DE LAS MUESTRAS

Deseamos contar el número de peces que hay en un gran estanque. Procedemos del siguiente modo:

Pescamos con red, o mediante cualquier otra forma que no los lastime, un buen montón de ellos. Supongamos que son 343. Los señalamos (hay unas tintas que, salpicadas sobre los peces, se mantienen indelebles, aunque estos vuelvan al agua), y los devolvemos al estanque. Al cabo de varios días volvemos a sacar una muestra (286, por ejemplo). En esta muestra contamos que hay 37 peces señalados. Inducimos que se cumple lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{c} \textit{Propoción de peces señalados} \\ \textit{en el total del estanque} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \textit{Propoción de peces señalados} \\ \textit{en la muestra de 286} \end{array} \right)$$

Llamando N al número total de peces del estanque, la igualdad anterior queda así:

$$\frac{343}{N} = \frac{37}{286}$$

de donde se deduce que $N \approx 2651$. Inducimos, pues, que hay 2651 peces en el estanque. Ahora debemos hacer las siguientes reflexiones: “¿Podemos asegurar que el número total de peces en el estanque es de 2651?”

Por supuesto que no. Esta valoración es aproximada.

Debemos, por tanto, conformarnos con dar el resultado de forma aproximada. Por ejemplo: el número total de peces está entre 2400 y 2900.

Aun así, no podemos estar seguros del todo. Nos conformaremos con decir que muy probablemente el número total de peces está entre 2400 y 2900.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4ºE.S.O.
Editorial Anaya

ACTIVIDAD 3:

El encargado de calidad de una empresa dedicada a la elaboración de bolígrafos quiere averiguar la superficie de papel capaz de pintar un bolígrafo hasta que se agota su tinta. ¿El estudio se haría sobre la población o la muestra? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 4:

El dueño de un vivero tiene 285 plantas de interior. Para probar la eficacia de un nuevo fertilizante, las mide todas antes y después del semestre que dura el tratamiento.

El conjunto de esas 285 plantas, ¿Es población o muestra? ¿Por qué?

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4ºE.S.O.
Editorial Anaya

ACTIVIDAD 5:

Se quieren realizar los siguientes estudios:

- Tiempo que dedican a la lectura los jóvenes comprendidos entre 12 y 18 años.
- Opinión que tienen sobre una nueva instalación deportiva las personas que en un cierto momento se encuentran allí.
- Qué deporte realizan los estudiantes de 4º ESO de un centro escolar.

En cada uno de estos casos, ¿cuál es la población? ¿En qué casos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

Fuente: http://www.alcaste.com/departamentos/matematicas/secundaria/Cuarto/09_Estadistica/Ejercicios_resueltos.pdf

GRUPO II

- **Contenidos:** C1, C3 y U2 (TABLAS DE FRECUENCIA)
- **Tipo de actividad:** se plantean dos actividades de aprendizaje y desarrollo.
- **Objetivos específicos de la unidad:** O2

ACTIVIDAD 1:

A un grupo de 25 jóvenes se les pregunta por el número de personas que trabajan en su familia. Las respuestas obtenidas son las siguientes:

2 4 3 4 1 4 2 2 3 4 0 4 2 5 3 0 5 3 3 4 1 3 4 5 2

Resume los datos obtenidos en una tabla con las distintas frecuencias estudiadas.

ACTIVIDAD 2:

En un grupo de 30 personas, hemos medido la estatura, en centímetros, de cada una de ellas, obteniendo los siguientes resultados:

160 163 165 164 162 168 175 167 159 160

161 164 167 168 154	163 164 167 164 165
166 168 165 167 169	164 150 166 147 170

Agrupar los datos en intervalos y elaborar una tabla de frecuencias.

Fuente: http://www.alcaste.com/departamentos/matematicas/secundaria/Cuarto/09_Estadistica/Ejercicios_voluntarios.pdf

GRUPO III

- **Contenidos:** C3 y U3 (**GRÁFICOS ESTADÍSTICOS. DETECCIÓN DE FALACIAS**)
- **Tipo de actividad:** Se plantean siete actividades. La primera de ellas, es una lectura de un artículo, que nos permite una vez más trabajar la lectura y con ello, mostrar un ejemplo de falacia (uno de los contenidos requeridos). El estadístico británico Spiegelhalter dijo “los gráficos pueden ser tan manipulativos como las palabras”, por esta razón, para que los alumnos entiendan un ejemplo de falacia e intento de distorsión de la realidad, se propone esta lectura para razonar y comentar en clase. Este tipo de lecturas el alumno las ve interesantes y captan su atención, por lo que estaríamos ante una actividad de introducción y motivación. Las seis actividades restantes son de aprendizaje, desarrollo y consolidación, donde además de aprender y practicar, permiten con su realización asegurar lo aprendido.
- **Objetivos específicos de la unidad:** O2

ACTIVIDAD 1. EL ARTE DE ADORNAR LAS ESTADÍSTICAS.

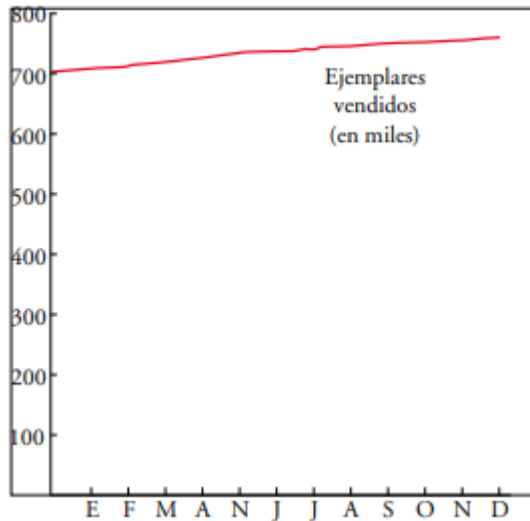
Este brevísimo artículo puede servir como desencadenante de la actitud crítica hacia las estadísticas. “Las estadísticas mienten” es una frase que se usa con demasiada frecuencia y, creemos, que de forma muy injusta. Es cierto que con frecuencia se usan las estadísticas para realzar un lado de la realidad (y, por tanto, para ocultar –o disimular– otros). Y que también se da el caso, no con poca frecuencia, de que las estadísticas se manipulen, distorsionando gráficos, interpretando torcidamente algunas proporciones o porcentajes, etc. No obstante, las estadísticas frecuentemente utilizadas permiten al ciudadano medio conocer con facilidad aspectos de la realidad que, de otro modo, serían solo accesibles a los expertos. Creemos que esto es lo que debemos

inculcar a los alumnos y a las alumnas, solo cuando esta actitud esté razonablemente asentada cabe comenzar a despertar el espíritu crítico.

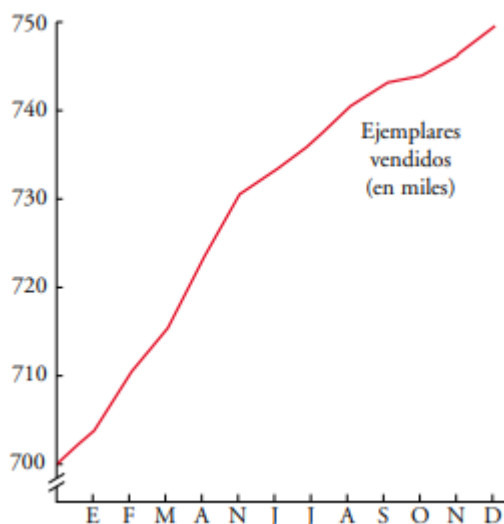
El director comercial de un diario ha decidido impresionar al personal del Consejo de Administración y ha ordenado confeccionar una gráfica de las ventas del año pasado, el primero de su gestión en el diario. Su objetivo es conseguir un aumento en su sueldo. Los ejemplares vendidos por meses son:

Enero	703253	Julio	736506
Febrero	710345	Agosto	740730
Marzo	715247	Septiembre	743802
Abril	723345	Octubre	744900
Mayo	730401	Noviembre	746337
Junio	733405	Diciembre	749638

La gráfica que el estadístico de la empresa le ha entregado es la siguiente:



La verdad es que no es muy impresionante. Parece que las ventas se han estancado y el aumento de sueldo que va a pedir está en peligro. Pero el director es bien astuto. Piensa que con un poco de maña lo puede arreglar. Los mismos datos que tiene los puede representar así:



Esto está mucho mejor. Con un poco de suerte, le dan el aumento.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4ºE.S.O.
 Editorial Anaya

ACTIVIDAD 2:

En la siguiente tabla se resumen las notas obtenidas por los estudiantes de un grupo en un examen de Matemáticas:

NOTAS	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10)
N.º ALUMNOS/ AS	2	3	11	16	8

- a) Elabora una tabla de frecuencias
- b) Representa los datos gráficamente

Fuente: http://www.alcaste.com/departamentos/matematicas/secundaria/Cuarto/09_Estadistica/Ejercicios_voluntarios.pdf

ACTIVIDAD 3:

El sexo de 18 bebés nacidos en un hospital de Madrid ha sido:

H	M	H	H	M	H
H	M	M	H	M	H
M	M	H	H	M	H

Construye la tabla asociada a estos datos y represéntalos.

Fuente: <http://www.apuntesmareaverde.org.es/>

ACTIVIDAD 4:

Representa los valores de la variable de la tabla adjunta con el gráfico adecuado correspondientes a una encuesta realizada sobre el sector al que pertenece un grupo de trabajadores madrileños.

SECTOR	INDUSTRIAL	AGRARIO	SERVICIOS	OTROS
%	20	16	45	19
TRABAJADORES				

Fuente: <http://www.apuntesmareaverde.org.es/>

ACTIVIDAD 5:

Dada la siguiente distribución de frecuencias:

x_i	n_i
1	9
2	22
3	13
4	23
5	8
6	25

- Construye una tabla en la que aparezcan las frecuencias absolutas y relativas.
- Representa la distribución dada mediante un diagrama de barras, así como su correspondiente polígono de frecuencias.

ACTIVIDAD 6:

Dada la siguiente distribución de frecuencias:

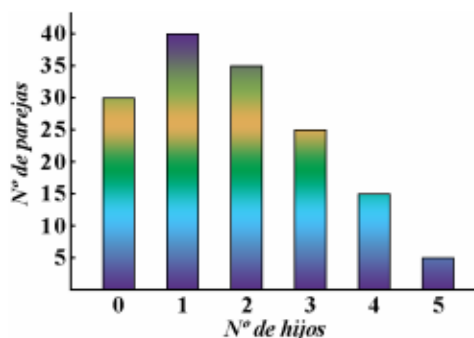
$L_{i-1} - L_i$	n_i
1-3	5
3-7	30
7-8	45

8-10	23
10-13	9
13-20	2

- Construye una tabla en la que aparezcan las marcas de clase, las frecuencias absolutas y relativas.
- Representa la distribución mediante un histograma y su correspondiente polígono de frecuencias.

ACTIVIDAD 7:

Un estudio estadístico sobre el número de hijos de las parejas de una ciudad reflejó los resultados que muestra el siguiente diagrama de barras.



- Define la variable estadística en estudio. ¿Cuáles son los individuos de la muestra?
- ¿De qué tipo es dicha variable? ¿Qué valores toma?
- Elabora una tabla donde solamente aparezcan los valores de la variable y sus correspondientes frecuencias absolutas simples.
- Responde a las siguientes preguntas:
 - ¿De qué tamaño es la muestra del estudio?
 - ¿Cuál es el número de hijos más frecuente en las parejas de esa muestra? ¿Qué porcentaje de las parejas tiene ese número de hijos?
 - ¿Qué porcentaje de parejas tiene dos o menos hijos? ¿Y cuatro o más hijos?

Fuente: <https://www.matematicasonline.es/cuartoeso/apuntes2/estadistica.pdf>

GRUPO IV

- **Contenidos:** C1, C4, C5 y U4 (**PARÁMETROS EN VARIABLES UNIDIMENSIONALES**)
- **Tipo de actividad:** Se plantean ocho actividades. Del tipo aprendizaje y desarrollo y consolidación.
- **Objetivos específicos de la unidad:** O2, O4 y O5

ACTIVIDAD 1:

El IVA aplicado a las compras de obras de arte en diferentes países europeos es:

España	0,16
Italia	0,20
Bélgica	0,06
Holanda	0,06
Alemania	0,07
Portugal	0,17
Luxemburgo	0,06
Finlandia	0,22

Calcula la media aritmética, la mediana, la moda, el CV y los cuartiles.

ACTIVIDAD 2:

La media y la mediana de un conjunto de cinco números naturales distintos es 7, y el rango es 6. Halla dichos números.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O.
Editorial Casals

ACTIVIDAD 3:

Calcula la media, desviación típica y el coeficiente de variación de la siguiente distribución de altura (en metros) de una clase de 27 alumnos de 4º de E.S.O.:

INTERVALOS	FRECUENCIAS
1,53-1,58	2

1,58-1,63	7
1,63-1,68	8
1,68-1,73	6
1,73-1,78	3
1,78-1,83	1

ACTIVIDAD 4:

Al finalizar el curso, el número de asignaturas suspensas en un grupo, A, de 35 alumnos/as se reflejaba en la siguiente tabla:

N.º DE SUSPENSOS	0	1	2	3	4	5	6
N.º DE ALUMNOS/AS	10	8	6	5	3	2	1

- Calcula el número medio de suspensos y la desviación típica.
- En otro grupo, B, el número medio de suspensos fue de 3, con una desviación típica de 2,4. Halla el coeficiente de variación en los dos casos y compara la dispersión en ambos grupos.

Fuente: http://www.alcaste.com/departamentos/matematicas/secundaria/Cuarto/09_Estadistica/Ejercicios_resueltos.pdf

ACTIVIDAD 5:

Un grupo de perros de raza pastor alemán, tienen un peso medio de 70kg y desviación típica 2 kg. Un conjunto de perros caniche tiene una media de 15 kg y desviación típica de 2kh. Compara ambos grupos.

Fuente: <http://www.apuntesmareaverde.org.es/>

ACTIVIDAD 6:

Una muestra de 15 botellas de agua presenta las siguientes capacidades (en litros):

0,5 0,25 0,5 0,75 1,5 0,75 1 1 1,75 1,25 0,25 0,5 0,5 1 1,5

- Calcular las medidas de tendencia central estudiadas.
- Hallar el Q_{25} , Q_{75} y D_{10} . ¿A partir de qué capacidad de recipiente se considera el 20% con mayor capacidad?

- c) Calcula e interpreta la desviación típica y el CV.

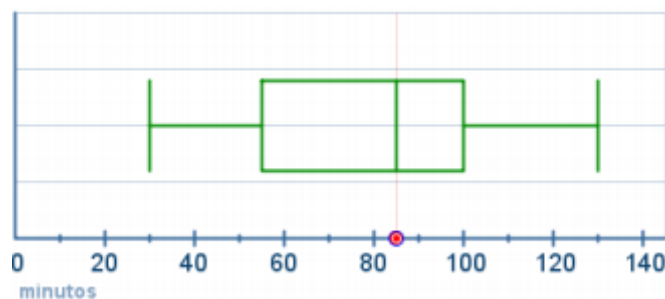
ACTIVIDAD 7:

Elabora un diagrama de cajas y bigotes a partir de los siguientes datos:

$x_{\min} = 2$	$x_{\max} = 12$	$Q_1 = 3$	$Me = 6$	$Q_3 = 7$
----------------	-----------------	-----------	----------	-----------

ACTIVIDAD 8:

Analiza el siguiente diagrama de caja y bigotes. Muestra los minutos que tarda en hacer efecto un medicamento en una población. Interpreta la información que presenta y responde a las preguntas.



- ¿A qué porcentaje de la población había hecho efecto al cabo de 30 minutos?
- ¿Al cabo de cuántos minutos había hecho efecto al 50 % de la población?
- ¿Cuántos minutos tardó en hacer efecto al 100% de la población?
- ¿A qué porcentaje había hecho efecto a los 55 minutos? ¿Cuánto tardó en hacer efecto a las tres cuartas partes de la población?

Fuente: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/E_DAD_4eso_A_estadistica/impresos/4quincena11.pdf

GRUPO V

- **Contenidos:** C3, C4, C5 y U5 (VARIABLES BIDIMENSIONALES)
- **Tipo de actividad:** Se presentan cuatro actividades, del tipo aprendizaje y desarrollo y consolidación.
- **Objetivos específicos de la unidad:** O3, O4 y O6

ACTIVIDAD 1:

En un hospital se registra la temperatura (X), en grados Celsius, y el número de pulsaciones (Y) de un grupo de 13 pacientes. Los resultados obtenidos son los siguientes:

(36,75) (35,5 ,90) (36,85) (37,90) (37,80) (36,5 , 85) (36,5 ,75) (37,5 , 90)
 (38,90) (37,80) (36,5 ,85) (37,90) (36,5 ,75)

- Expresa los valores que toma cada una de las dos variables en una tabla simple.
- Indica los valores que adopta cada una de las dos variables en una tabla de doble entrada.
- ¿Cuántas pulsaciones tienen los pacientes que han tenido una temperatura de 37,5°?
- Establece la distribución marginal de las variables X e Y .

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O.
 Editorial Edelvives

ACTIVIDAD 2:

En una clase de 30 alumnos y alumnas se ha realizado un estudio sobre el número de horas diarias de estudio X y el número de asignaturas suspensas al final de curso Y , obteniendo los siguientes datos. Construir la tabla de doble entrada y calcular la media y desviación típica de cada una de las variables.

(2,0) , (2,2) , (0,5) , (2,1) , (1,2) , (2,1) , (3,1) , (4,0) , (0,4) , (2,2) , (2,1) , (2,1) , (4,0) , (3,1)
 , (2,4), (2,1) , (1,2) , (2,1) , (2,0) , (3,0) , (3,1) , (2,2) , (2,2) , (2,1) , (0,5) , (1,3) , (2,2) ,
 (2,1) , (1,3) , (1,4)

Fuente:http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_4eso_A_estadistica/impresos/4quincena11.pdf

ACTIVIDAD 3:

Copia y completa la siguiente tabla.

$Y \backslash X$	A	B	C	Total
a	2		1	4
b		2	2	5
c			0	7
Total	7	6		

- ¿Qué porcentaje de datos presentan la característica B en la variable unidimensional X?
- ¿Qué porcentaje de datos presentan la característica c en la variable unidimensional Y?
- ¿Qué porcentaje de datos presentan la característica (B, c) en la variable bidimensional (X, Y)?

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4ºE.S.O. Editorial Casals

ACTIVIDAD 4:

En un colegio se ha realizado un recuento del número de nacionalidades diferentes que hay en cada clase (X) y la nota media de la clase en la asignatura de lengua (Y). Los resultados son:

X	3	2	5	4	3	6	4	5	5
Y	7	6	8	9	6	9	7	9	6

- Agrupar los datos en una tabla simple
- Representar gráficamente los puntos en un diagrama de dispersión o nube de puntos
- ¿En cuántas clases hay 5 nacionalidades?
- ¿En cuántas clases la nota media en lengua es de un 9?

GRUPO VI

- **Contenidos:** C5, C6 y U6 (DEPENDENCIA Y CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES)
- **Tipo de actividad:** Se plantean tres actividades, del tipo aprendizaje y desarrollo y consolidación.
- **Objetivos específicos de la unidad:** O6

ACTIVIDAD 1:

En la siguiente tabla se reflejan los datos recogidos en un estudio comparativo entre la variable precio del móvil de una persona (variable X) y sus ingresos medios mensuales (variable Y):

X	200	90	190	250	100	190	110	250	100
Y	1000	1500	1900	1200	2200	1400	700	1200	2200

- Representa gráficamente los datos mediante un diagrama de dispersión.
- A la vista de la nube de puntos obtenida, ¿qué puedes indicar sobre la dependencia de ambas variables?
- Elabora una tabla con unos nuevos valores que establezcan una dependencia diferente a la obtenida a la tabla actual.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4ºE.S.O. Editorial Edelvives

ACTIVIDAD 2:

En una empresa de camiones trabajan 5 conductores. Los años de antigüedad de sus permisos de conducir y las infracciones cometidas en el último año por cada uno son los siguientes:

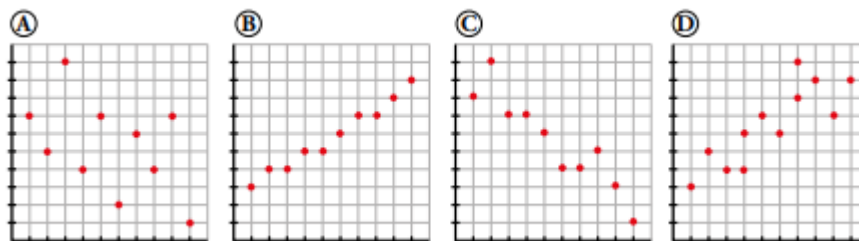
X: Años de antigüedad	Y: Infracciones
2	0
4	3
5	2
6	1
3	4

Representa gráficamente los datos anteriores. Razona si estos muestran correlación positiva o negativa.

ACTIVIDAD 3:

Los siguientes números son los valores absolutos de los coeficientes de correlación, r , de las distribuciones bidimensionales representadas a continuación:

0,75 0,47 0,92 0,97



Asigna cada cual, a la suya, cambiando el signo cuando convenga.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O.
Editorial Anaya

GRUPO VII

- **Contenidos:** C6 y U7 (COEFICIENTE DE CORRELACIÓN LINEAL. RECTAS DE REGRESIÓN)
- **Tipo de actividad:** Se plantean tres actividades, del tipo aprendizaje y desarrollo y consolidación.
- **Objetivos específicos de la unidad:** O4

ACTIVIDAD 1:

Se ha medido la potencia (en kW) y el consumo (litros/100 km) de 6 modelos distintos de coches, obteniéndose los siguientes resultados:

POTENCIA	81	85	66	85	104	83
CONSUMO	7,5	10,6	8,2	9,2	10,7	8,7

Halla la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Cómo es la relación entre las dos variables?

Fuente: <https://www.matematicasonline.es/cuarto-eso/apuntes2/estadistica.pdf>

ACTIVIDAD 2:

Contesta verdadera (V) o falso (F) a las siguientes afirmaciones:

- a) Si $r = 0,34$, las estimaciones con la recta de regresión son poco fiables.

- b) Dos variables no correlacionadas X e Y tienen un coeficiente de correlación de 0,98.
- c) Dos variables X e Y relacionadas por la ecuación $y = 6x - 7$ tienen un coeficiente de correlación lineal $r = 0,85$.
- d) Una variable bidimensional de centro de masas $(3 ; 5,5)$ tiene una recta de regresión que pasa por el punto $(3, -2)$.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O. Editorial Casals

ACTIVIDAD 3:

Una compañía de seguros considera que el número de vehículos (Y) que circulan por una determinada autopista a más de 120 km/h, puede ponerse en función del número de accidentes (X) que ocurren en ella. Durante 5 días obtuvo los siguientes resultados:

Accidentes (x_i)	5	7	2	1	9
N.º vehículos (y_i)	15	18	10	8	20

- a. Calcula el coeficiente de correlación lineal.
- b. Si ayer se produjeron 6 accidentes, ¿cuántos vehículos podemos suponer que circulaban por la autopista a más de 120 km / h?
- c. ¿Es buena la predicción?

GRUPO VIII: Ejercicios con Excel

• **Contenidos:** C3, C4, C5, C6 y U8 (ESTADÍSTICA CON EXCEL)

• **Tipo de actividad:** En este bloque vamos a proponer dos actividades. La actividad 1 la realizaremos en clase junto con el profesor, mientras se explica el modo de proceder. La actividad 2 se propone como voluntaria para entregar. Estamos ante actividades de tipo introducción y motivación, para iniciarnos e incorporarnos en el entorno de trabajo del software Excel, y de aprendizaje y desarrollo, puesto que, con la actividad 2, se da la oportunidad de aprender aún más y desenvolverse con el programa.

• **Objetivos específicos de la unidad:** O2, O3 y O4

ACTIVIDAD 1 (Para realizar en clase):

Tras preguntar a los alumnos de una clase de Matemáticas sobre el tiempo que le dedican a dicha asignatura obtenemos los siguientes datos:

Tiempo (min)	0-15	15-30	30-45	45-60	60-75
N.º de alumnos	2	7	9	11	1

- Construir la tabla de frecuencias correspondiente.
- Calcular la media, la moda, la mediana y los cuartiles. Interpreta todos los resultados obtenidos.
- Calcular la varianza, desviación típica y coeficiente de variación. Interpreta los resultados.
- Dibujar el histograma correspondiente.

ACTIVIDAD 2 (Actividad voluntaria):

A los mismos alumnos de la clase anterior, preguntamos el tiempo que le dedican, en este caso, a la asignatura de lengua. Obtenemos lo siguiente:

Tiempo (min)	0-15	15-30	30-45	45-60	60-75
N.º de alumnos	5	12	8	5	0

Realizar las mismas operaciones que en el ejercicio anterior y comparar ambas distribuciones. Si alguien se anima a calcular el coeficiente de correlación lineal, se tendrá en cuenta.

Esta actividad se hará en una hoja de Excel, en ella deben ir todos los resultados e interpretaciones. Se enviará a la profesora por correo electrónico.

ANEXO II

Ejercicios de repaso

- **Contenidos:** Con estos ejercicios se trabajarán todos los contenidos propuestos
- **Tipo de actividad:** Estas actividades van destinadas al apoyo y refuerzo para intensificar y asegurar los contenidos aprendidos.
- **Objetivos específicos de la unidad:** Se intentan conseguir todos los objetivos.

ACTIVIDAD 1:

Indicar el tipo de variable estadística que estudiamos y razona, en cada caso, si sería mejor analizar una muestra o la población:

- a) El sexo de los habitantes de un país.
- b) El dinero que gastado a la semana por tu hermano.
- c) El color de pelo de tus compañeros de clase.
- d) La temperatura de tu provincia.
- e) La talla de pie de los alumnos del instituto.

Fuente: <http://www.apuntesmareaverde.org.es/>

ACTIVIDAD 2:

Para hacer un sondeo electoral en un pueblo de 2000 electores, aproximadamente, se va a elegir una muestra de 200 individuos. Di si te parece válido cada uno de los siguientes modos seleccionados y explica por qué:

- a) Se le pregunta al alcalde, que conoce a todo el pueblo, qué individuos les parece más representativos.
- b) Se eligen 200 personas al azar entre las que acuden a la verbena el día del patrón.
- c) Se seleccionan al azar en la guía telefónica y se les encuesta por teléfono.
- d) Se acude a las listas electorales y se seleccionan al azar 200 de ellos.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O.
Editorial Anaya

ACTIVIDAD 3:

Se ha contabilizado el número de centros educativos operativos en 30 localidades y se han obtenido estos datos:

3 4 5 2 4 5 3 6 8 4 7 4 5 6 8 6 5 4 5 7

- Elabora una tabla estadística con estos datos.
- Represéntalos en un diagrama de sectores.
- Halla los parámetros estadísticos aprendidos.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O.
Editorial Edelvives

ACTIVIDAD 4:

Se ha elaborado un estudio sobre el tiempo (en horas) que los alumnos de una clase de 4º de E.S.O. les dedican a las redes sociales al cabo de una semana. Las respuestas han sido:

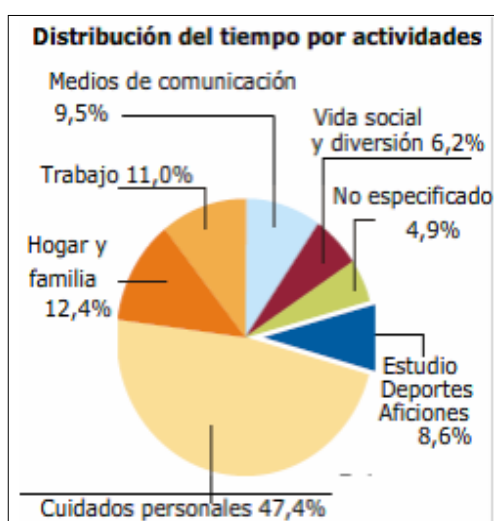
10 7 15 5 8 3 12 7 7 2 6 9 5 10 14 13 11
4 0 7 12 7 8 10 12 7 4 5 2 5

Agrupar los datos y elaborar una tabla de frecuencias con un número de intervalos adecuado. Representar los datos en un histograma.

ACTIVIDAD 5:

Observa los siguientes gráficos y responde a las preguntas de cada uno

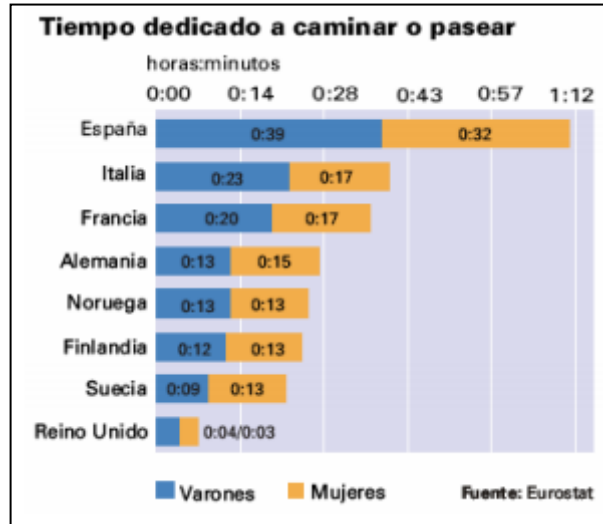
- Gráfico 1



- ¿Cuál es la variable estudiada? ¿Y la frecuencia?
- ¿A qué grupo de actividades dedicamos más tiempo los españoles?

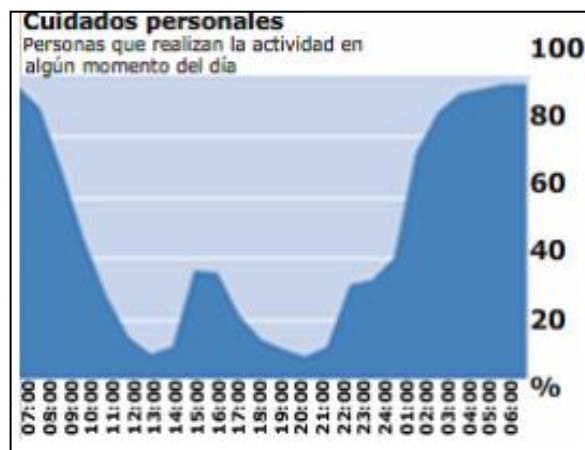
a3. Calcula cuánto tiempo dedicamos al hogar y la familia ¿cuántos grados ocupa este sector en el diagrama?

b) Gráfico 2



- b1. ¿En qué países pasean más las mujeres que los hombres?
- b2. Calcula el tiempo medio que se dedica en cada país a pasear.
- b3. ¿Qué país está en el percentil 50?

c) Gráfico 3



- c1. ¿Crees que el dormir se ha contado como actividad de cuidado personal?
- c2. A las 15:00 hay un máximo local en la gráfica ¿a qué se debe?
- c3. A la hora de la comida el 38% de las personas se dedica al cuidado personal. ¿Significa esto que un 62% de las personas no come?

d) Gráfico 4



- d1. ¿Cuáles son las comunidades en las que se dedica menos tiempo a la vida social y a la diversión?
- d2. ¿Cuánto tiempo dedican a la diversión o a la vida social la mayor parte de las comunidades?
- d3. ¿Cuál es el tiempo medio que se dedica en España a esta actividad?

FUENTE: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_4eso_A_estadistica/impresos/4quincena11.pdf

ACTIVIDAD 6:

Calcula la media, la moda, la mediana, los cuartiles Q_1 y Q_3 y los percentiles P_{30} , P_{60} y P_{90} de los datos.

4 1 3 3 2 3 1 3 3 4 0 0 0 4 4 3 0 3 0 3 2 1 0 0 4 3 0 1

Elabora el diagrama de caja y bigotes.

ACTIVIDAD 7: Los datos de la altura de 116 jóvenes se muestran en la siguiente tabla:

Altura (cm)	120 a	141 a	151 a	156 a	161 a	171 a
	140	150	155	160	170	190
Alumnos	12	23	33	29	11	8

- a) Calcula la media y la desviación típica de las alturas.
- b) Si la media real es de 156,5 cm, ¿a qué crees que se debe el error que has cometido tú?

FUENTE: Libro de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4ºE.S.O.
Editorial SM

ACTIVIDAD 8:

Tenemos una variable bidimensional formada por los siguientes datos:

X	Y
2	3
4	3
6	7
8	11
10	5
12	4
14	8

Calcula las medias y las desviaciones típicas de las variables X e Y . Calcula la covarianza de la variable (X, Y) . Interpreta los resultados obtenidos.

ACTIVIDAD 9:

Los datos aportados por una empresa de fruta son los siguientes:

Número de vendedores	2	3	5	8	10	12
Número de kilos vendidos	80	95	130	180	250	290

- Calcula los parámetros: media, desviación típica y covarianza.
- Calcula el coeficiente de correlación lineal.
- Determina la recta de regresión de y sobre x .
- Estima el número de kilos que demandarían siete vendedores. ¿Es dicha estimación fiable?

ACTIVIDAD 10:

Observa la siguiente variable bidimensional.

N.º de cigarrillos consumidos al día	3	6	8	20	25
---	---	---	---	----	----

Índice de mortalidad	0,2	0,4	0,5	1,2	1,7
-----------------------------	-----	-----	-----	-----	-----

- Representa la nube de puntos.
- Indica el tipo de correlación.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4ºE.S.O.
 Editorial Casals

ACTIVIDAD 11:

Las calificaciones de 40 alumnos en psicología evolutiva y en estadística han sido las de la tabla adjunta.

Psicología (x_i)	3	4	5	6	6	7	7	8	10
Estadística (y_i)	2	5	5	6	7	6	7	9	10
N.º de alumnos	4	6	12	4	5	4	2	1	2

- Obtener la ecuación de la recta de regresión de calificaciones de estadística respecto de las calificaciones de psicología.
- ¿Cuál será la nota esperada en estadística para un alumno que obtuvo un 4,5 en psicología?

Fuente: <https://maticasiesoja.wordpress.com/4o-eso-b/>

ACTIVIDAD 12:

En la tabla siguiente se dan los valores y algunas frecuencias absolutas de un par de variables tratadas conjuntamente. Los valores de la primera fila corresponden a la variable Y, y los de la primera columna a la variable X. La última columna es la marginal de X y la última fila es la marginal de Y.

$X \backslash Y$	1	2	4	7	9	11	
1	1	2		1	0	0	5
3	0			1	1	0	4
4	1	0	2	1	1	3	
5	1	1	3	2	4	0	
6		1	1		1	0	4
7	0	0	0	1	3	1	
	4	5	8	6	10	4	

- Completar la tabla.
- Calcular el coeficiente de correlación y las rectas de regresión.
- ¿Sirven las rectas de regresión para hacer predicciones de una variable en función de la otra? ¿Por qué?

Fuente: <https://maticasiesoja.wordpress.com/4o-eso-b/>

ACTIVIDAD 13:

En las siguientes distribuciones bidimensionales referentes a tus compañeros y compañeras de clase, estima si la correlación será positiva o negativa, muy fuerte, fuerte, débil o casi nula:

- Medida de un palmo - Medida del pie.
- Número de horas semanales de estudio - Número de horas semanales viendo la televisión.
- Número de horas semanales de estudio - Número de suspensos en la última evaluación.
- Estatura - Peso.
- Nota en Matemáticas en el último examen - Número de asignaturas suspensas en la última evaluación.
- Peso - Nota en Matemáticas.
- Estatura media de los padres - Estatura del alumno.
- Distancia de su casa al centro de estudios - Tiempo medio que tarda en llegar.
- Número de libros leídos al año - Número de asignaturas suspensas en la última evaluación.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 4ºE.S.O. Editorial Anaya

ACTIVIDAD 14:

En una población, la media de los pesos es de 70 kg, y la de las estaturas, de 175 cm. Las desviaciones típicas son 5 kg y 10 cm, respectivamente, y la covarianza de ambas variables es 40.

- a) Estima el peso de una persona de esa población que mide 185 cm de estatura.
- b) Usando el coeficiente de correlación lineal, explica hasta qué punto confiarías en la estimación que se ha hecho en el apartado a.

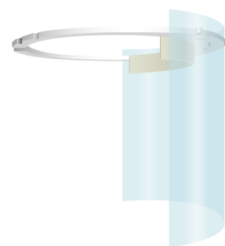
Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º E.S.O. Editorial SM.

ANEXO III

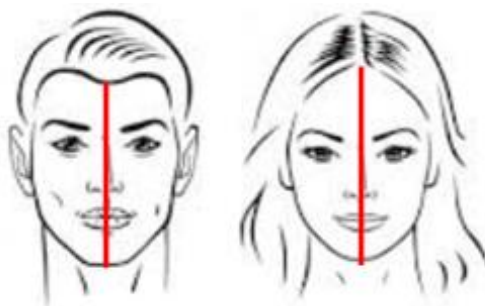
Actividad de investigación

- **Contenidos:** C1, C2, C4, U1, U2, U4 y U8
- **Tipo de actividad:** Actividad basada en la resolución e investigación de problemas
- **Objetivos específicos de la unidad:** O1, O3, O4 y O5

Como medida de protección para el COVID-19, el departamento de tecnología, propone realizar unas viseras de protección para el alumnado del centro. El alumnado de cada clase colabora de diferente manera.



Los alumnos de 4º de ESO de Matemáticas académicas se encargarán de recoger, analizar y tomar conclusiones sobre las medidas de la cara de cada alumno, que van desde el principio de la frente (dónde nos empieza a crecer el pelo) hasta el final de la barbilla, es decir, lo indicado por la línea roja.



Con esto se quiere conseguir una medida adecuada para el plástico de la visera que cubra el rostro de todos los alumnos.

La clase de Matemáticas académicas consta de 28 alumnos, por tanto, se harán 7 grupos de 4 escolares que se encargan de recoger las medidas, las cuales se darán en centímetros y aproximadas a un decimal (por ejemplo, si obtenemos 17'32 cm, aproximamos a 17'3 cm). Además, como las pantallas no tienen una longitud igual a la de la cara, sumamos tres centímetros más para que sobrepasen de lo que es el rostro; con esto, aprovechamos para utilizar la propiedad de linealidad de la media para determinar la longitud de las pantallas a través de la media de las medidas obtenidas.

(Propiedad de linealidad: $Y = a + bX \Rightarrow \bar{y} = a + b\bar{x}$)

Cada grupo debe medir a sus componentes. Una vez recogidas las medidas, serán puestas en común en la pizarra, obteniendo así los 28 datos.

Es entonces cuando los alumnos se ponen a trabajar por grupos elaborando la tabla de frecuencias y posteriormente calculando las medidas que se les pide:

- El valor medio de las medidas de las caras, así como, la mediana y el valor más frecuente.
- Medir la dispersión de los datos y la variabilidad entre ellos utilizando una medida adecuada.
- Valor medio de las pantallas (es aquí cuando utilizamos la propiedad de linealidad).

Una vez que cada grupo ha obtenido los resultados, se comparan en clase y se decide qué medida y por qué hay que darle al departamento de tecnología sobre lo que tiene que medir el plástico que cubra la cara de los alumnos.

Con esta actividad, los alumnos aplicarán los parámetros estadísticos y comprenderán que la estadística descriptiva no sólo es aplicar una fórmula.

La actividad se desarrollará en las aulas de ordenadores, ya que nos apoyaremos en el programa de hoja de cálculo EXCEL.

Possible solución o soluciones

En el caso de esta actividad, estamos ante una solución, es decir, se piden unos valores concretos y no se puede admitir más de una solución.

La solución exacta será el valor medio de las pantallas obtenido partir de las operaciones hechas con las medidas tomadas por los alumnos. No creo que algo tan sencillo como medir, lo hagan de forma errónea. Puede haber algún error de milímetros, pero pienso que esto no perjudicaría al resultado buscado.

Plan de clase

Esta tarea nos llevará una hora y cuarenta minutos aproximadamente, y en el aula, se desarrollará mediante las siguientes fases:

- Fase de introducción de la tarea

Introducimos la tarea en clase, no nos llevará más de veinte minutos (se hará en la sesión 9), recalando que estamos ante una situación real y prestando ayuda a un

proyecto verídico como es el de la realización de viseras. Es necesario que se conciencien que la actividad es totalmente diferente a lo que están acostumbrados a realizar día a día. Se proporcionará una copia de la actividad a cada estudiante. Comunicar que, para la próxima clase, tienen que tener tomadas las medidas correspondientes. Les propongo que lean el problema en clase y pregunten las posibles dudas. Está claro que estamos con parámetros estadísticos. Si no recuerdan alguna fórmula o detalle, pueden utilizar el libro o los apuntes sin problema, aunque hay que recordar, que para facilitar el cálculo de las operaciones y trabajar con una hoja de cálculo, nos vamos a apoyar en EXCEL.

Antes de salir de clase, los grupos de trabajo se quedan hechos. En principio, se agrupan ellos, si se observa que la agrupación no es adecuada o algún alumno queda excluido del resto, el profesor intervendrá para solventar este problema.

➤ Fase exploratoria

En la sesión 10, los 28 alumnos, salen a la pizarra, en grupos de 4, a poner sus medidas. Tras tener todas las medidas, los alumnos empiezan a introducir sus datos en el ordenador y a elaborar las correspondientes tablas de frecuencias. Los cálculos que se les piden son muy sencillos, y aún más, realizados con la hoja de cálculo. No debería de llevarles más de 40 minutos en hacer los cálculos.

Mientras tanto, el profesor está circulando por la clase, pendiente de lo que hablan y deciden; dispuesto a orientarlos con posibles dudas bien argumentadas o alguna complicación que pueda darle el programa, ya que, creo que por lo demás, la actividad está muy clara.

➤ Fase de debate y discusión

Una vez que todos los alumnos han obtenido los resultados, animamos a los estudiantes a comparar y evaluar lo obtenido y el resultado que se ha decidido aportar al departamento de tecnología. Si hay diferentes resultados, se razona cuál de ellos puede ser más coherente y donde está el error.

Una vez hecha la discusión entre grupos, el profesor da el resultado correcto, explica los errores y apoya o corrige las conclusiones aportadas.

Si fuera necesario un poco más de tiempo, cogeríamos un rato de la siguiente sesión (en la que vamos a abordar la siguiente fase)

➤ Fase de sistematización del aprendizaje matemático:

Una parte de la siguiente clase (sesión 11), la utilizamos para reorganizar los conocimientos y conceptos estadísticos utilizados durante la resolución de la actividad, entre los que podemos destacar:

- Media, mediana y moda.

- Medidas de dispersión y variabilidad
- Propiedad de linealidad

También comentaremos la experiencia de la actividad.

ANEXO IV

Evaluación final

Apellidos, Nombre:

Curso:

INSTRUCCIONES:

- Disponéis de 60 minutos para realizar el examen.
- Se debe de hacer individualmente.
- Todas las operaciones que queráis que sean corregidas deben de hacerse con bolígrafo, de forma clara y ordenada.
- Se permite el uso de la calculadora.

ACTIVIDAD 1:

De un manzano se recoge una caja de sus frutos y se desea estudiar su peso (gramos). Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla.

Peso (gramos)	[118,135)	[135,152)	[152,169)	[169,186)	[186,203)
N.º de manzanas	12	14	5	3	1

- a) ¿Cuál es la variable estadística objeto de estudio? ¿Es cualitativa o cuantitativa?
- b) Define la población, la muestra y el tamaño muestral de la misma.
- c) Elabora la tabla completa de frecuencias (absolutas y relativas) de la distribución estadística.
- d) Responde a las siguientes cuestiones:
- ¿Cuántas manzanas pesan entre 152 y 169 gramos?
 - ¿Qué porcentaje de manzanas tiene un peso inferior a 186 gramos?
 - ¿Qué proporción de manzanas tiene un peso comprendido entre 135 y 152 gramos?
 - ¿Cuántas manzanas pesan menos de 152 gramos?

- ¿Qué porcentaje de manzanas tienen un peso que oscila entre 169 y 186 gramos?

e) Calcula el peso medio de las manzanas y el coeficiente de variación. Interpreta los resultados.

f) Representa los datos en un histograma.

ACTIVIDAD 2:

A modo de experimento se ha medido el área de distintos triángulos equiláteros de lados 1, 2, 3 decímetros, respectivamente, y se han obtenido los siguientes resultados:

(Lado) ²	2	4	9	16	25
Área	0,42	1,65	3,7	6,5	10,2

a) Calcula el coeficiente de correlación lineal entre el cuadrado del lado y el área del triángulo. ¿Qué tipo de correlación existe?

b) ¿Debería haber una correlación funcional? ¿A qué se debe que la relación no llegue a ser funcional?

c) Dibuja la nube de puntos.

Fuente: Libro de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4ºE.S.O.
Editorial Casals

ANEXO V

Actividades para la atención a la diversidad

- **Contenidos:** Se trabajan todos los contenidos
- **Tipo de actividad:** Estas actividades son propuestas para alumnos que presenten algunas dificultades a la hora de seguir el ritmo general de la clase. Son actividades de refuerzo, más intuitivas y teóricas, que facilitan una mayor comprensión de los conceptos. Presentan menor grado de dificultad que las demás actividades.
- **Objetivos específicos de la unidad:** O1, O2, O3, O4, O5 y O6

ACTIVIDAD 1:

Completa:

- La población es el conjunto de.....
- Muestra: es un subconjunto de.....
- Individuo: es cada uno de.....

ACTIVIDAD 2:

La población de la comunidad autónoma de Andalucía está formada, aproximadamente, por 8.476.718 habitantes. Se desea realizar un estudio estadístico sobre la altura, edad y peso. Para ello, se seleccionaron 5000 de diferentes zonas de Andalucía. Indica:

- Población:
- Muestra:
- Individuo:
- Tamaño de la muestra:
- Variables estadísticas objeto de estudio:

ACTIVIDAD 3:

Completa las siguientes definiciones y pon ejemplos.

- Las variables cuantitativas son las que y pueden ser de dos tipos: si toma un único valor o , puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo.
- Las variables cualitativas son aquellas que

Ejemplo de variables cuantitativas:

Ejemplo de variables cualitativas:

ACTIVIDAD 4:

Con el siguiente grupo de datos, realiza una tabla de frecuencias absolutas y acumuladas:

2 5 6 7 3 2 4 5 6 1 1 5 7 3 2

ACTIVIDAD 5:

La altura, en centímetros, de los componentes de una orquesta es la siguiente:

150 163 157 168 174 176 155 169 170 156 178 180 172 169 167 177
 156 168 165 171 179 183 177 171

Realiza una tabla de frecuencias para esta distribución de datos continua. Representa los datos en un histograma.

ACTIVIDAD 6:

Escribe las fórmulas de la media, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.

ACTIVIDAD 7:

Completa la siguiente tabla con datos sobre el número de libros que lee una persona al mes. Calcula la media, la desviación típica y el coeficiente de variación. Interpreta los resultados.

N.º de libros	n_i	N_i	f_i	F_i
0		5	$5/50 = 0,1$	0,1
1	14	19		
2	22			
3				
4	4	50		
	50			

ACTIVIDAD 8:

Calcula la media, la moda y el coeficiente de variación de los datos del ejercicio 5.

ACTIVIDAD 9:

Completa las siguientes definiciones sobre las medidas de posición:

- La, Me , es el valor que ocupa la posición en una lista ordenada.
- Los, son tres valores que dividen a un grupo de datos en partes iguales.
- Los, son nueve valores que dividen a un grupo de datos en partes iguales.

ACTIVIDAD 10:

A continuación, se muestra un diagrama de caja y bigotes; coloca en él los valores siguientes donde corresponda:

Valor máximo Valor mínimo Q_1 Q_2 Q_3 Me



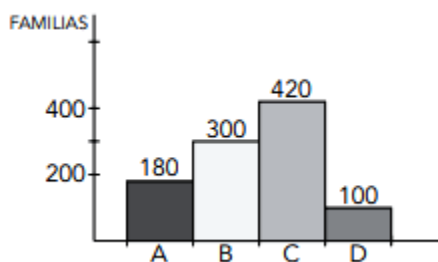
ACTIVIDAD 11:

Calcula la Me , Q_1 , Q_3 y D_{10} a partir de los datos de la siguiente distribución:

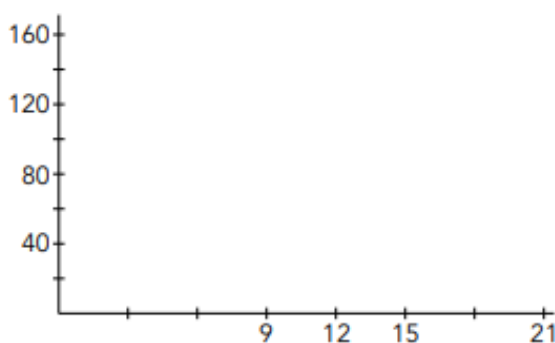
2,2,4,7,7,9,11,11,10,7,11,8,8,5,6,6,3

ACTIVIDAD 12:

El profesor de Geografía de una de tus amigas les ha pedido que hagan un trabajo sobre el nivel económico de vuestra región. A tu amiga le hacen falta unas cuantas herramientas matemáticas que tú conoces, por lo que le ayudas a hacer su trabajo. El diagrama de barras que te muestra indica el nivel de ingresos anuales de 1000 familias encuestadas. Los niveles A, B, C y D corresponden a los intervalos de ingresos (en miles de euros) $[0, 9)$, $[9, 12)$, $[12, 15)$ y $[15, 21)$, respectivamente.



- a) Lo primero que necesita tu amiga es un histograma, teniendo en cuenta que los intervalos no tienen todos el mismo ancho. Constrúyeselo.



- b) Realiza la tabla de frecuencias y calcula los parámetros \bar{x} , Var , σ y $C.V.$
 c) ¿Cuántas familias están por debajo de la media de ingresos anuales?
 d) Tu amiga necesita tu ayuda para calcular los niveles de ingresos correspondientes a Q_1 , Q_2 y Q_3 . Necesita, además, interpretar los resultados. Ayúdala.

Fuente: Material de inclusión y atención a la diversidad editorial Anaya. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º de E.S.O.

ACTIVIDAD 13:

Completa la información siguiente acerca de las variables estadísticas bidimensionales.

- Una variable estadística bidimensional recogecaracterísticas, X e Y , de una población o muestra.
- Cada dato está formado por una pareja, (x_i, y_i) , donde el primer dato, x_i , corresponde a la variable X , mientras que el segundo dato, y_i , se refiere a la variable unidimensional Y .
- Las variables bidimensionales también se pueden representar gráficamente mediante un o

ACTIVIDAD 14:

En un grupo de amigos se recogen datos sobre la relación entre las horas de estudio (X) y las invertidas en redes sociales (RRSS) al día (Y), obteniéndose los siguientes resultados:

Horas de estudios	1	2	3	4	5	6
Horas de RRSS	5	4	3	3	2	1

- Realiza una tabla bidimensional simple y otra de doble entrada.
- Dibuja la nube de puntos correspondiente.

ACTIVIDAD 15:

La relación entre dos variables (X) e (Y), viene dada en la siguiente tabla.

(X)	3	4	5	6	7
(Y)	6	8	10	12	14

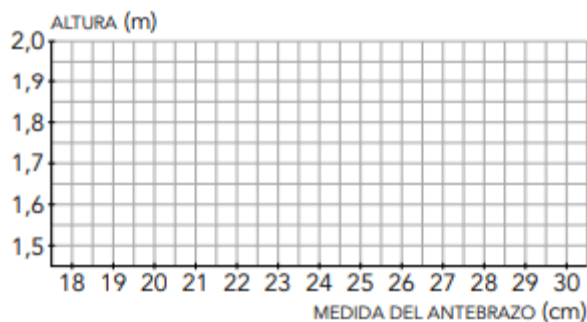
- Dibuja el diagrama de dispersión correspondiente. ¿Qué puedes indicar sobre la dependencia de ambas variables?
- Elabora una tabla de doble entrada y calcula \bar{x} , \bar{y} y s_{xy} .
- Calcula el coeficiente de correlación lineal e indica que tipo de correlación es.

ACTIVIDAD 16:

Existen estudios que han detectado una alta correlación entre varias partes de la anatomía humana: entre otras, las medidas del antebrazo de las personas y su correspondiente altura. En una consulta médica se ha querido comprobar este hecho, a modo de curiosidad y con el consentimiento de los pacientes. Para ello, se han tomado al azar 10 varones de distintas edades menores de 65 años. Se ha medido la altura y la longitud del antebrazo de cada uno. Estos son los resultados:

Medida del antebrazo (cm)	22	31	25	18	30	24	27	29	20	23
Altura (m)	1,60	1,92	1,70	1,50	1,89	1,64	1,75	1,83	1,53	1,60

- 1) Representa en unos ejes como estos la nube de puntos correspondiente:



- 2) La recta de regresión tiene como ecuación $y = 0,033x + 0,88$.
 Representala sobre la nube de puntos del ejercicio anterior.
- 3) Uno de los siguientes valores es el coeficiente de correlación. Indica cuál es:
 $r = -0,99$ $r = 0,85$ $r = -0,99$ $r = 1$
- 4) Estima, a partir de la recta de regresión, las alturas de las personas que tienen las siguientes medidas de antebrazo:

a) 12 cm b) 25,5 cm c) 40 cm

- 5) ¿Qué grado de fiabilidad tienen las estimaciones que has realizado en la actividad anterior?

Fuente: Material de inclusión y atención a la diversidad editorial Anaya.
 Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º de E.S.O.

