Centro de Estudios de Postgrado

Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Universidad de Jaén

Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA CLÁSICA EN PRIMERO DE LA ESO. UNA PROPUESTA DIDÁCTICA.

Alumno/a: **Román Ruiz, L. David.**

Tutor: Prof. D. Julio Guerrero García.
Prof. D. Rafael Florencio Díaz.
Dpto: Matemáticas.

Septiembre, 2023

Resumen

Este documento responde como Trabajo de Fin de Máster para Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

En él, se desarrolla una fundamentación curricular que recoge y comenta los aspectos esenciales del currículo; además, se realiza un análisis exhaustivo de dos libros de texto aplicando la '*Teoría de Idoneidad Didáctica*' y construyendo sus polígonos de idoneidad didáctica para realizar una comparativa crítica y sustentada. La fundamentación epistemológica desarrolla formalmente las bases de la geometría clásica, intentando aunar el contenido de la Unidad Didáctica para 1º de ESO con el '*Tema 39. Geometría del triángulo*' del temario de oposiciones, partiendo desde su desarrollo axiomático. La fundamentación didáctica analiza dos artículos sobre metodologías de enseñanza-aprendizaje, prometedoras y altamente compatibles: el *aprendizaje invertido* y la *gamificación*. Ambas son aplicadas en la Unidad Didáctica junto con otras mecánicas; como el *aprendizaje dialógico*, unas *fichas de reflexión* o la *autocorrección*.

Palabras clave: '*Máster de Profesorado*', '*Teoría de Idoneidad Didáctica*', '*Geometría clásica*', '*Axiomática*', '*Aprendizaje Invertido*', '*Gamificación*', '*Aprendizaje Dialógico*', '*Ficha de reflexión*' & '*Autocorrección*'.

Abstract

The present document serves as Master's Final Project in Secondary Mandatory Education, Bachillerato, Professional Training and Language Teachings.

In it, a curricular foundation is developed, which includes and comments on essential aspects of the curriculum; in addition, an exhaustive analysis of two textbooks is carried out applying the '*Theory of Didactic Suitability*' and constructing their didactic suitability polygons to make a critical and sustained comparison. Epistemological foundation formally elaborates on the basis for classical geometry starting from its axiomatic development, aiming to combine the contents of the Didactic Unit for 1st course of ESO and '*Unit 39. Geometry of triangle*' of Public Competition Oppositions' syllabus. Didactic foundation analyses two articles on promising and highly compatible teaching-learning methodologies: '*flipped learning*' and '*gamification*'. Both are applied in the didactid unit along with other mechanics, such as '*dialogical learning*', '*meditating worksheets*' or '*self-correction*'.

Keywords: '*Master's Degree in Teachings*', '*Theory of Didactic Suitability*', '*Classical Geometry*', '*Axiomatic*', '*Flipped learning*', '*Gamification*', '*Dialogical learning*', '*Meditation worksheet*' & '*Self-correction*'.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Parte I

Capítulos.

Capítulo 1

Introducción.

El trabajo aquí presentado es el Trabajo de Fin de Máster (en lo que sigue, *TFM*) de *Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas* (en lo que sigue, simplemente Máster de Profesorado), con una estructura estándar y siguiendo las directrices de formato establecidas por la Universidad de Jaén.

El documento ha sido plenamente elaborado con LaTeX, por lo que todas las referencias internas a secciones del documento, a referencias bibliográficas y a enlaces externos son todos ellos activos. Asimismo, se ha comprobado la semana anterior a la entrega que todos los enlaces, tanto internos como externos siguen operativos.

Todo el trabajo desarrollado a lo largo del TFM está enfocado para su posterior integración en la UD, dotando así de cohesión y completitud a este proyecto. La UD que se desarrolla está diseñada para 1º de ESO, versará sobre geometría clásica y responde en gran medida a problemas y necesidades del alumnado que observé a lo largo del periodo de prácticas (desinterés, desmotivación, reticencia al trabajo, miedo al error, percepción errónea sobre las matemáticas, etc.).

Creo firmemente que debe ser posible –aunque no sea fácil– encontrar algún enfoque didáctico que permita conciliar los intereses docentes con los del alumnado de manera fructífera, un enfoque con el que dar una formación de calidad y nivel a la par que se consigue acercar al alumnado a las matemáticas, una praxis que ayude a inculcar en el alumnado una actitud intelectual más sana. En esos términos, un tema de geometría clásica como el desarrollado, que apenas requiere conocimientos previos, que trata cuestiones que no les resultan desconocidas, que puede enfocarse sin álgebra ni análisis, pero que permite un enfoque más constructivo y manipulativo puede ser una buena base sobre la que trabajar.

Tras esta breve presentación sobre el trabajo y las motivaciones que lo conducen, procedo a introducir el resto de capítulos del documento.

Los Capítulos 3 y 4 conforman el bloque de fundamentación curricular. En el Capítulo 3 se realiza una revisión de la legislación docente contemplada, el "*Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*" y la "*Instrucción Conjunta 1/2022, de 23 de junio, por la que se establecen aspectos de organización y funcionamiento para los centros que impartan Educación Secundaria Obligatoria para el curso 2022/2023*". Ambas han sido la legislación vigente durante el periodo de prácticas docentes en centros y durante el desarrollo de este trabajo. De manera complementaria a este capítulo, se incluye el Anexo A, donde se da un desarrollo más detallado de los saberes matemáticos según dicha legislación y el Anexo B, donde se hace una ampliación sobre la atención a la diversidad.

En el Capítulo 4 se realiza un análisis descriptivo y cualitativo de dos libros de texto. Dado que lo ideal era analizar libros de texto acorde a la legislación del capítulo anterior, se contactó con varias editoriales y, finalmente, tanto la editorial *McGraw-Hill* como *Edebé* concedieron una licencia digital temporal. Para concluir, se incluye el *análisis de idoneidad didáctica* de Godino, Batanero y Font para ambos libros de texto, siendo posible revisar su elaboración en el Anexo D.

El trabajo continúa con la elaboración epistemológica en el Capítulo 5, acompañado por el Anexo E. El primero de ambos es una adaptación del 'Tema 39. Geometría del triángulo' del temario de oposiciones, pero más enfocado a una elaboración clásica para que encaje mejor con la UD para 1º de ESO; el segundo de ellos es una ampliación y elaboración de los conceptos desde su formalización axiomática.

El Capítulo 6 integra la fundamentación didáctica y en él se analizan dos artículos que cubren metodologías de enseñanza-aprendizaje distintas pero complementarias: el *aprendizaje invertido* (o *flipped learning/classroom*) y la *gamificación*. Ambos artículos señalan sendas metodologías como prometedoras y efectivas, por lo que han sido implementadas en la UD.

Finalmente, en el Capítulo 7 se elabora la UD '*Introducción a la Geometría Clásica*' para 1º de ESO, que se desarrolla en 12 sesiones plenamente detalladas en el Anexo F. En este capítulo se formulan los objetivos de la UD, conocimientos previos necesarios, el contenido que se cubre, una amplia variedad de metologías y mecánicas utilizadas, además de una muestra de ejercicios y la incorporación de recursos con los que completar la UD.

Capítulo 2

Objetivos.

El hecho de que el TFM esté encaminado a la elaboración de una unidad didáctica tras el desarrollo de tres bloques de fundamentación pone de manifiesto ciertos objetivos básicos:

- Tener un mejor conocimiento de la legislación vigente, tanto a nivel general (conociendo qué elementos componen el currículo) como de cara a la materia de matemáticas (su organización en sentidos del saber y saberes básicos, las competencias específicas que se cubren y los criterios de evaluación relacionados).
- Manejar y analizar libros de texto para un mejor conocimiento de la herramienta principal del alumnado y reconocer virtudes e inconvenientes de dichas obras.
- Mostrar un conocimiento matemático profundo de las matemáticas que sustente el contenido que podemos ofrecer al alumnado; un contenido elaborado, de calidad y bien fundamentado.
- Iniciarse en la búsqueda de metodologías de enseñanza-aprendizaje para reconocer las ventajas y limitaciones de las distintas praxis, reconociendo la utilidad de la investigación docente y la necesidad de mantenerse actualizados como docentes.
- Implementar de manera efectiva metodologías (como la *ficha personal de reflexión*, la *gamificación*, el *aprendizaje dialógico*...) que se demuestren útiles, evitando limitarse a la mera clase magistral.
- Conocer mejor los aspectos a tener en cuenta de cara al diseño o adaptación de una UD.

También se han establecido una serie de objetivos propios que se han ido alcanzando con el desarrollo de este trabajo:

- Atender a los elementos curriculares de cara al desarrollo de material y de la práctica docente.
- Disponer de herramientas concretas y presentes en la literatura científica para el

análisis de libros de texto, permitiendo así una mejor elección del mismo y una mejor compensación de sus aspectos menos cuidados.

- Alcanzar una mejor percepción de lo que puede implicar la preparación de oposiciones.
- Conocer metodologías eficaces así como medios adecuados para implementarlos, permitiendo un desarrollo óptimo para el alumnado y una mayor riqueza de recursos de cara al desarrollo de la labor docente.
- Estar atento a las distintas vicisitudes que pueden surgir a lo largo del desarrollo de las clases; tanto a la preparación de material complementario, a la adaptación de los contenidos en función del alumnado y a la distribución del tiempo de clase.

Capítulo 3

Disposición curricular.

En España, la educación obligatoria se estructura tanto a nivel nacional como a nivel autonómico, de manera que por ejemplo, en Andalucía en el curso 22/23, conviven

1. El Real Decreto 217/2022 de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria -en adelante, el *RD 217/2022*–. Legislación de ámbito estatal.
2. La Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía –en adelante, la *Orden 15/1/2021*–. Legislación de ámbito autonómico.
3. La Instrucción conjunta 1/2022, de 23 de junio, por la que se establecen aspectos de organización y funcionamiento para los centros que impartan Educación Secundaria Obligatoria para el curso 2022/2023, –en adelante, la *IC 1/2022*. Legislación de ámbito autonómico que regula la transición legislativa para los cursos impares durante dicho curso académico actual.

Dado que este trabajo se enfoca en un 1º curso de ESO, se toman como referencia el *RD 217/2022* y la *IC 1/2022*.

Si bien la legislación no suele caracterizarse como algo de carácter subjetivo, sí que tiene una componente plenamente interpretativa que, en particular en educación, se traduce a una amplia variedad de praxis, todas ellas compatibles con la legislación en común.

3.1. Definiciones.

En el RD 217/2022, Art. 2, encontramos a disposición los siguientes conceptos, todos ellos indispensables de cara a su lectura, su análisis o su práctica:

a) **Objetivos:** Son los logros que se espera que el alumnado alcance al finalizar la etapa. Su consecución está vinculada a las *competencias clave*. Se disponen 12 *objetivos* (ver RD 217/2022, Art. 7 o la Subsección 7.4.1).

b) **Competencias clave:** Son los desempeños que se consideran imprescindibles para que el alumnado pueda progresar con garantías de éxito en su itinerario formativo. Éstas aparecen recogidas en el *Perfil de salida* del alumnado (y son la adaptación de las establecidas en la Recomendación del Consejo de la Unión Europea de 22 de mayo de 2018 relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente). Se disponen de 8 *competencias clave*, que serán desarrolladas más adelante en la Sección 3.2.

c) **Competencias específicas:** Son los desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los *saberes básicos* de cada materia o ámbito. Constituyen un elemento de conexión entre el *Perfil de salida* del alumnado, los *saberes básicos* de las materias o ámbitos y los *criterios de evaluación*.

d) **Criterios de evaluación:** Son los referentes que indican los niveles de desempeño esperados en el alumnado en las situaciones o actividades referidas en las *competencias específicas* en un momento determinado de su proceso de aprendizaje.

e) **Saberes básicos:** Son los conocimientos, destrezas y actitudes que constituyen los contenidos propios de una materia o ámbito cuyo aprendizaje es necesario para la adquisición de las *competencias específicas*.

f) **Situaciones de aprendizaje:** Son las situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a *competencias clave* y *competencias específicas* y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas. Para orientaciones de cara a su elaboración se puede consultar el Anexo VII de la IC 1/2022.

Aunque no aparece reflejado en las definiciones, se incluye a continuación un concepto relevante que suele darse por sentado y que viene igualmente dispuesto en el RD 217/2022: el *currículo*, que viene definido como “el conjunto de objetivos, competencias, contenidos enunciados en forma de saberes básicos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria” (Art. 13, punto 1).

Conviene también recalcar que el RD 217/2022, con el fin de garantizar una educación adaptada, recoge aspectos como “*la atención a las diferencias individuales*” (ver Art. 19, pág.13), al “*alumnado con necesidades educativas especiales*” (ver Art. 20), al “*alumnado con dificultades específicas de aprendizaje”* (ver Art. 21, pág. 14), al “*alumnado de incorporación tardía al sistema educativo español*” (ver Art. 22) y al “*alumnado de altas capacidades intelectuales*” (ver Art. 23). Se pude encontrar un comentario con información ampliada en el Anexo B.

3.2. Perfil de salida y competencias clave.

Las competencias clave van a ser brevemente introducidas, pero no van a ser desarrolladas en detalle dado que son suficientemente autodescriptivas. En cualquier caso, y para más información, éstas vienen desarrolladas en el '*Anexo I. Perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica*' del RD 217/2022, así como los desafíos a los cuales responden. Cada una de las competencias clave llevan asociadas una serie de *descriptores operativos* enumerados que "hacen función de marco referencial a partir del cual se concretan las competencias específicas de cada área, ámbito o materia" (Anexo I, pág. 26). Éstos no van a ser desarrollados, pero se indicará dónde localizarlos.

Asimismo, conviene recalcar el carácter transversal e interconectado del Perfil de salida: todos los aprendizajes contribuyen a su consecución y del mismo modo, la adquisición de cada competencia clave contribuye a la adquisición de las demás.

A continuación, se listan las ocho competencias clave junto con una breve descripción:

●) **Competencia en comunicación lingüística**. En adelante, *CCL*. Cuenta con 5 descriptores operativos detallados en el RD 217/2022 (Anexo I, pp. 27-28).

La *CCL* implica interacciones adecuadas para cada contexto y el uso consciente de las destrezas lingüísticas para la comprensión de mensajes, reduciendo la sensibilidad a la manipulación o desinformación. Constituye, además, la base del pensamiento propio y de construcción de conocimiento.

●) **Competencia plurilingüe**. En adelante, *CP*. Cuenta con 3 descriptores operativos detallados en el RD 217/2022 (Anexo I, pág. 28).

La *CP* supone el uso de distintas lenguas de manera apropiada y eficaz, respetando los diversos perfiles lingüísticos y desarrollar estrategias para mejorar la destreza en dichas lenguas. Incluye una componente histórica e intercultural en aras de la diversidad y convivencia.

●) **Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería**. En adelante, *STEM* (por el acrónimo en inglés '*Science, Technology, Engenieering and Mathematics*'). Esta competencia cuenta con 5 descriptores operativos detallados en el RD 217/2022 (Anexo I, pp. 29-30).

La *STEM* se enfoca a la comprensión de fenómenos por medio de métodos científicos, pensamiento, matemáticas y tecnologías de manera responsable y sostenible. En particular, la competencia matemática se enfoca en el desarrollo y aplicación del razonamiento matemático con el fin de ser resolutivos.

●) **Competencia digital**. En adelante, *CD*. Cuenta con 5 descriptores operativos detallados en el RD 217/2022 (Anexo I, pp. 30-31).

La *CD* se enfoca al uso seguro, saludable, crítico y responsable de las tecnologías digitales; tanto para uso laboral, como personal. Incluye la alfabetización digital, comunicación, educación, creación de contenido, ciberseguridad, privacidad, propiedad intelectual, etc.

●) **Competencia personal, social y de aprender a aprender**. En adelante, *CPSAA*. Cuenta con 5 descriptores operativos detallados en el RD 217/2022 (Anexo I, pp. 31-32).

La *CPSAA* supone auto-reflexión para conocerse, promover el crecimiento personal, aceptarse, hacer una gestión constructiva del tiempo y de la información, así como mantener la resiliencia. Incorpora, además, la capacidad de enfrentar la incertidumbre y complejidad, adaptación al cambio, contribuir al bienestar en todas sus facetas, empatía y más.

●) **Competencia ciudadana**. En adelante, *CC*. Cuenta con 4 descriptores operativos detallados en el RD 217/2022 (Anexo I, pp. 32-33).

La *CC* contribuye a una ciudadanía responsable, participativa y cívica; busca en entendimiento de las estructuras socio-económicas y político-jurídicas, acontecimientos de escala global, además del compromiso activo de sostenibilidad planteados en la Agenda 2030 (consultar ONU, 2015 o Gobierno de España, 2018). Incluye la alfabetización cívica, valores democráticos, derechos humanos y reflexión al respecto de los grandes problemas éticos actuales.

●) **Competencia emprendedora**. En adelante, *CE*. Cuenta con 3 descriptores operativos detallados en el RD 217/2022 (Anexo I, pp. 33-34).

La *CE* busca desarrollar un enfoque para aprovechar ideas y oportunidades, usando conocimientos adecuados y generando resultados de valor. Aporta estrategias de análisis y evaluación de oportunidades, el uso de la creatividad, pensamiento estratégico y reflexión, despertar la disposición a aprender y arriesgar, así como a tomar decisiones informadas y colaboraciones para llevar lo planteado a la acción.

●) **Competencia en conciencia y expresión culturales**. En adelante, *CCEC*. Cuenta con 4 descriptores operativos detallados en el RD 217/2022 (Anexo I, pp. 34-35).

La *CCEC* promueve comprender y respetar ideas, opiniones, sentimientos y emociones en distintas culturas y sus manifestaciones artísticas y culturales. Supone un compromiso con el mutuo entendimiento, la expresión de ideas propias y sentido del lugar o papel que se desempeña, así como comprensión del patrimonio cultural y de la diversidad.

3.3. La materia de matemáticas.

La materia de matemáticas en el currículo no tiene una organización específica para cada curso, sino una organización distinguida para cada ciclo –siendo el primer ciclo de 1º a 3º de ESO y el segundo ciclo en 4º de la ESO–. Ambos ciclos comparten unas competencias específicas con *criterios de evaluación* y *saberes básicos* que son adaptados a cada ciclo. Además, en el segundo ciclo, con motivo de atención a la diversidad de motivaciones e intereses, se disponen dos opciones para la materia de matemáticas: las 'Matemáticas A' y las 'Matemáticas B', las cuales no van a ser detalladas en este documento. El desarrollo al completo de las asignaturas de matemáticas para el resto de cursos y modalidades, está disponible en el RD 217/2022 (Anexo II, pág. 155-174).

3.3.1. Competencias específicas.

Centrándonos en el primer ciclo (dado que el trabajo se enfoca para 1º de ESO), se dispondrán a continuación las competencias específicas de la materia de Matemáticas. Éstas son agrupadas en torno a cinco bloques competenciales según su naturaleza:

- Competencias específicas 1 y 2 $\longrightarrow$ Bloque '*Resolución de problemas*'.
- Competencias específicas 3 y 4 $\longrightarrow$ Bloque '*Razonamiento y prueba*'.
- Competencias específicas 5 y 6 $\longrightarrow$ Bloque '*Conexiones*'.
- Competencias específicas 7 y 8 $\longrightarrow$ Bloque '*Comunicación y representación*'.
- Competencias específicas 9 y 10 $\longrightarrow$ Bloque '*Destrezas socioafectivas*'.

Cada competencia específica tiene una descripción detallada, además de especificar los descriptores operativos de cada competencia clave relacionados con cada competencia específica (consultar la Tabla 3.1).

Tabla 3.1

Competencias específicas de la asignatura de matemáticas y descriptores operativos de las competencias clave (Fuente: Real Decreto 217/2022. Elaboración propia).

Competencias Específicas	Descripción de la Competencia Específica	Descriptores Relacionados
Competencia específica 1	Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.	STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4

– Continúa en la siguiente página –

– Continuación de la Tabla 3.1 –

Competencias Específicas	Descripción de la Competencia Específica	Descriptores Relacionados
Competencia específica 2	Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.	STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3
Competencia específica 3	Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.	CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3
Competencia específica 4	Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.	STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3
Competencia específica 5	Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1
Competencia específica 6	Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.	STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1
Competencia específica 7	Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.	STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4
Competencia específica 8	Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3

– Continúa en la siguiente página –

– Continuación de la Tabla 3.1 –

Competencias Específicas	Descripción de la Competencia Específica	Descriptores Relacionados
Competencia específica 9	Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.	STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3
Competencia específica 10	Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.	CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3

3.3.2. Criterios de evaluación.

Los criterios de evaluación (revisar su definición en la Sección 3.1) son detallados para cada competencia específica y reflejan capacidades esperadas en el alumnado. Los criterios de evaluación pueden consultarse en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2

Criterios de evaluación asociados a cada competencia específica de la materia de matemáticas (Fuente: Real Decreto 217/2022. Elaboración propia).

Competencias Específicas	Criterios de Evaluación
Competencia específica 1	**1.1** Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. **1.2** Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. **1.3** Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.

– Continúa en la siguiente página –

– CONTINUACIÓN DE LA TABLA 3.2 –

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
COMPETENCIA ESPECÍFICA 2	**2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema. **2.2** Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc).
COMPETENCIA ESPECÍFICA 3	**3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones. **3.2** Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema. **3.3** Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.
COMPETENCIA ESPECÍFICA 4	**4.1** Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional. **4.2** Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos.
COMPETENCIA ESPECÍFICA 5	**5.1** Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente. **5.2** Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
COMPETENCIA ESPECÍFICA 6	**6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. **6.2** Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados. **6.3** Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.
COMPETENCIA ESPECÍFICA 7	**7.1** Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información. **7.2** Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.

– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

– Continuación de la Tabla 3.2 –

Competencias Específicas	Criterios de Evaluación
Competencia específica 8	**8.1** Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. **8.2** Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.
Competencia específica 9	**9.1** Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. **9.2** Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.
Competencia específica 10	**10.1** Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. **10.2** Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.

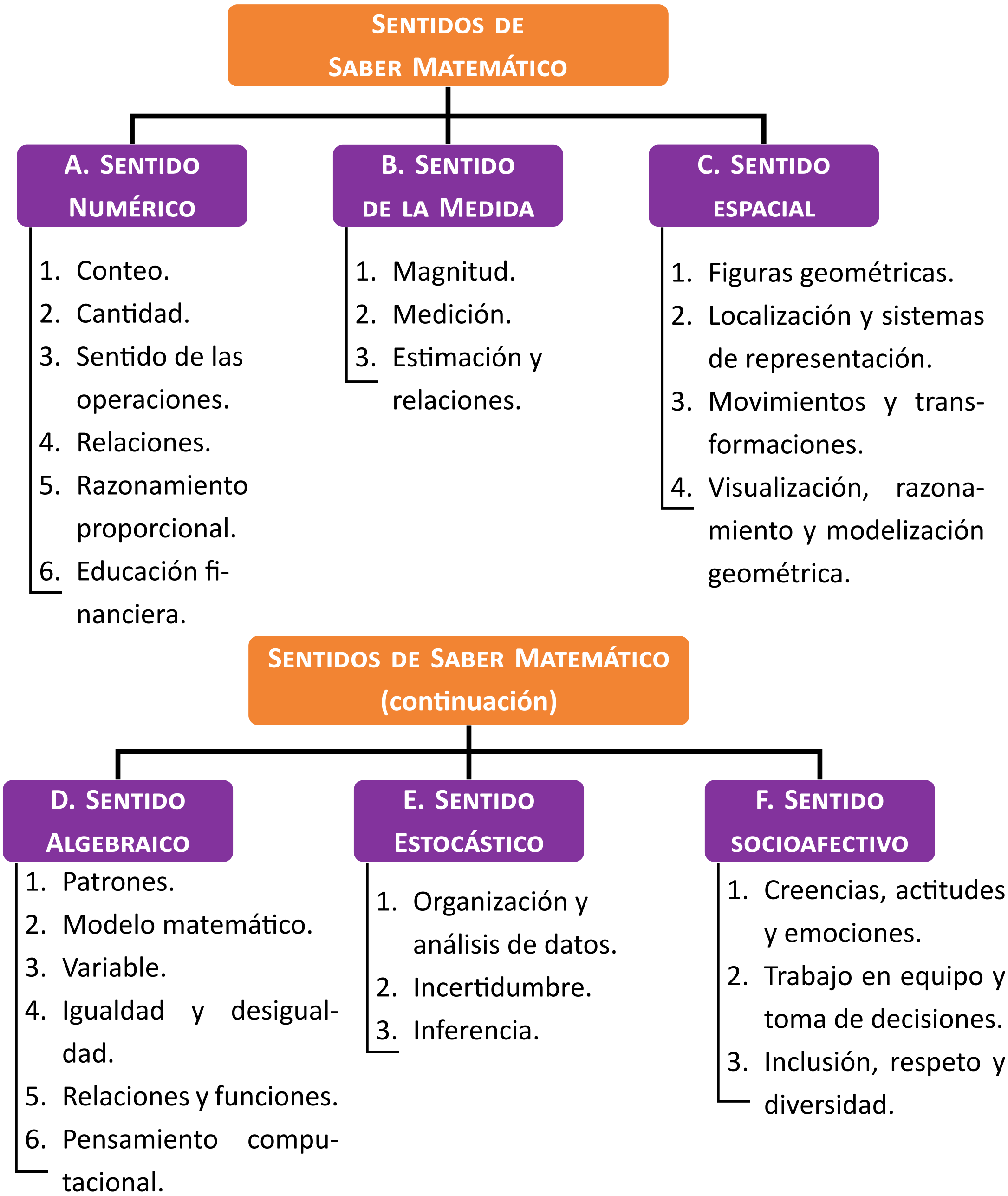
3.3.3. Saberes básicos y sentidos matemáticos.

El saber matemático en el currículo está estructurado en torno a *sentidos* del saber matemático que, a su vez, se desglosan en *saberes básicos*, cada cual ligado a una serie de habilidades y estrategias. Dichos sentidos y saberes se pueden consultar en la Figura 3.1, mientras que las habilidades ligadas a cada saber pueden consultarse en el Anexo A.

Cada sentido, saber básico o habilidad lleva asociado un código de referencia, al igual que en el RD 217/2022 y en la IC 1/2022. Los sentidos se indexan alfabéticamente, cada saber básico se codifica con la letra de su sentido y un número y, finalmente, cada habilidad hereda el código del saber básico al que está asociado añadiendo un nuevo número. Así pues, por ejemplo, A.6.1. será la primera habilidad del sexto saber básico del sentido numérico.

Figura 3.1

Esquema (en dos partes) de los saberes matemáticos dispuestos por sus respectivos sentidos del saber (Fuente: Real Decreto 217/2022. Eleboración propia).



Capítulo 4

Análisis comparativo de libros de texto.

Hoy en día se están procurando novedosos métodos y prácticas que supongan un avance y una mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje, planteando otros métodos y enfoques para las clases como las Standard Units, los proyectos IBL y las preguntas abiertas de indagación. Desde la administración educativa actual, por otro lado, se está incentivando además el uso de herramientas como los Entornos Virtuales de Aprendizaje (o VLE por sus siglas en inglés, '*Virtual Learning Environmet*'); al uso de recursos educativos abiertos (o REA), como paquetes SCORM creados mediante programas educativos como ExeLearning; y la proliferación de portales para dichos recursos (como Agrega2, ProComún u otros). No obstante y a pesar de todo ello, la herramienta más esencial a día de hoy para las clases siguen siendo los libros de texto. Por tanto, es necesario estudiar y analizar dichas herramientas en aras de hacer una buena elección entre los libros de texto disponibles (tanto a nivel didáctico como curricular-legislativo), así como para plantear posibles mejoras de cara a una futura edición.

Basta con un ligero análisis de algunos libros de texto disponibles para notar que se realiza un esfuerzo en que no sean una simple recopilación de contenidos de acuerdo a una estructura predeterminada. Hace ya más de una década que las editoriales ampliaron miras, incluyendo con sus libros CDs que incorporaban actividades interactivas, recreaciones paso a paso o autoevaluaciones con correcciones inmediatas. Hoy en día, eso sigue estando –con la evidente mejora tecnológica y de acceso para el alumnado–, pero se busca ir un paso más allá: se busca dotar de un sentido práctico y cercano, procurar una mayor atención a la diversidad, fomentar la educación emocional, inculcar un uso responsable de las TIC, etc. Este contenido extra tan frecuentemente desechado por alumnado, profesorado y progenitores puede suponer una diferencia clave en cierto alumnado o ciertos contenidos.

Respecto a cómo se enfocará el análisis de los libros de texto y qué necesidades deben cubrir, se recurrirá principalmente a tres cuestiones:

1. La descripción y estructura de los contenidos.

2. La adecuación para promover una transposición didáctica efectiva del conocimiento matemático formal (o *saber sabio*), de modo que el alumnado pueda integrarlo (convirtiéndose en *saber enseñado*). Consultar Chevallard, 1997.
3. La teoría de idoneidad didáctica y sus seis facetas de idoneidad. Consultar Godino, 2013 o Castillo Céspedes et al., 2022.

La adaptación al currículo según la ley vigente (el RD 217/2022 y la IC 1/2022) va a darse por sentada aunque algunos de los elementos curriculares (como los sentidos del saber o las situaciones de aprendizaje) harán acto de presencia.

En este documento, se analizarán de manera simultánea los libros de texto de dos editoriales. La elección de dichas editoriales se debe a que fueron las que pusieron a mi disposición una muestra digital de su nueva línea editorial a tiempo para el desarrollo del trabajo. Agradezco la colaboración de ambas.

- *Matemáticas de otra manera. 1º ESO.* (2022) Editorial Edebé.
- *Matemáticas. 1º ESO.* (2022) Editorial McGraw-Hill.

4.1. Presentación de los libros de texto y de sus contenidos.

Como preámbulo, vamos a presentar la estructura de cada libro en su orden:

Edebé:

1. Presentación de la estructura del libro.
2. Índice de situaciones de aprendizaje.
3. Situaciones de aprendizaje.
4. Índice de saberes y destrezas. (Agrupadas por temáticas. *Naturales, divisibilidad, etc.)* e infografías indicando su saber curricular (*sentido numérico, estocástico, etc.*)
5. Fichas de saberes y destrezas. Se incluyen fichas de cuestiones como técnicas de resolución de problemas o mujeres matemáticas.

McGraw-Hill:

1. Índice de unidades.
2. Presentación de la estructura del libro.
3. Unidades de contenido curricular.
4. Actividades PISA liberadas a final de cada unidad.
5. Situación de aprendizaje a final de cada unidad.
6. Proyectos entre unidades que engloban saberes y destrezas varias.

Mencionar además que ambas editoriales ponen a disposición de profesorado y alumnado recursos extra en sus respectivos portales web.

4.1.1. Estructura y tipo de contenidos.

En el caso de Edebé, el libro comienza dejando claro que las situaciones de aprendizaje son un elemento de gran peso, hasta el punto de que prácticamente conforman un tercio del libro impreso. Se muestra, además, cómo en cada situación de aprendizaje se sigue un esquema de tres partes:

A) Inicio: En él se contextualiza una pregunta, cuestión u objetivo clave y se describen los objetivos o metas de aprendizaje para el alumnado.

B) Desarrollo: Conforma el grueso de la situación de aprendizaje. A lo largo de esta parte se van proponiendo cuestiones, tareas e información con la que trabajar.

C) Cierre: Se plantean unas cuestiones o desafíos finales a modo de conclusión. Asimismo, se plantean preguntas buscando la reflexión y autocrítica del alumnado, así como concienciar sobre la utilidad de los conocimientos matemáticos adquiridos.

Si bien el eje central son las situaciones de aprendizaje (más información en la Subsección 4.1.2), no se dejan de lado las explicaciones de teoría (denominadas '*fichas*'), ni las relaciones de ejercicios (denominadas '*actividades de consolidación*'). A su vez, se presentan infografías de los contenidos de cada bloque, relacionando el contenido que se va a estudiar con los saberes curriculares. También se hace referencia a la competencia STEM y a recursos de diversa índole o finalidad (vídeos, calculadora, actividades interactivas, pensamiento computacional, infografías, podcasts y actividades de destreza). Todo esto está reflejado en la Figura 4.1 y en su ampliación, la Figura C.1.

Figura 4.1

Estructura de contenido del libro de texto de Edebé (Fuente: Edebé, 2022).

Por contrario, el libro de McGraw-Hill sigue presentando las unidades (o temas) como eje central, hasta el punto de conformar el total del libro de texto. Se puede apreciar un esquema en tres partes:

A) Presentación: Se muestra un '*sumario*' de la unidad, un breve texto de presentación relacionado con la temática de la unidad, una sección de divulgación (denominada '*Descubre*') relacionada con las situaciones de aprendizaje y otra sección de reflexión (enlazada con la competencia clave 'aprender a aprender') para sopesar qué se sabe y qué se puede aprender.

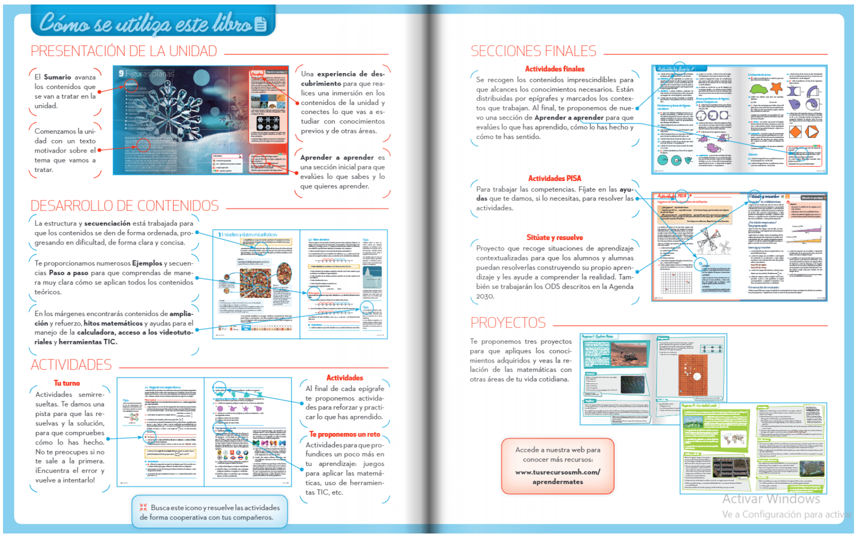
B) Desarrollo: Conforma el grueso de la unidad. Sigue una estructura ordenada en la presentación de los contenidos, con una dificultad creciente. Contiene actividades, ejemplos, desarrollos paso a paso, además de notas en los márgenes (de refuerzo, de referencia a recursos web, etc).

C) Sesiones finales: En este apartado se incluyen las relaciones de ejercicios (al menos el 25 % son de trabajo colaborativo) y los denominados '*retos*' (actividades y tareas en las que recurrir a lo aprendido). Igualmente se incluyen actividades PISA liberadas y una situación de aprendizaje (relegada a una página).

Aparte de lo mencionado (consultar la Figura 4.2 o la Figura C.2) y de los recursos web que pone a disposición, el libro incluye '*proyectos*' entre ciertas unidades. Estos proyectos promueven el uso de los conocimientos aprendidos para conectar las matemáticas con cuestiones del mundo práctico y la vida cotidiana.

Figura 4.2

Estructura de contenido del libro de texto de McGraw-Hill (Fuente: McGraw-Hill, 2022).



4.1.2. Situaciones de aprendizaje.

De las subsecciones previas se desprende una considerable diferencia respecto a cómo enfoca las situaciones de aprendizaje cada una de las dos editoriales. Es por ello que cabe preguntarse qué debe ser una situación de aprendizaje.

Atendiendo al RD 217/2022, debemos entender las '*situaciones de aprendizaje*' como "situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas" (Art. 2, apdo. f). De modo que, si bien la normativa dispone de una definición para ellas, ésta es lo suficientemente laxa como para desarrollarlas en función del enfoque, la metodología o adaptaciones que se consideren convenientes. De manera complementaria, se puede consultar las indicaciones para el diseño de situaciones de aprendizaje que ofrece la IC 1/2022 (ver su Anexo VII, pp. 254-257).

En Edebé apuestan por las situaciones de aprendizaje como un recurso potente y versátil, enfocando el curso a una metodología derivada del IBL o '*Inquiry Based Learning*' (más información en Calleja, 2016) y el espacio que le conceden (unas 100 de 314 páginas, es decir, cerca de un tercio del libro de texto) es una declaración del tiempo que proponen dedicarle. El índice de situaciones de aprendizaje es críptico a nivel curricular (ver Figura 4.3 o Figura C.3); pero proponen situaciones conectadas con la realidad, con los objetivos ODS (ver ONU, 2015), dan espacio a la creatividad y ponen al alumnado con un rol activo (ver Figura 4.4). Están complementadas con rúbricas de evaluación basadas en competencias específicas, en criterios de evaluación y en indicadores de logro.

Figura 4.3

Índice de situaciones de aprendizaje del libro de Edebé (Fuente: Edebé, 2022).

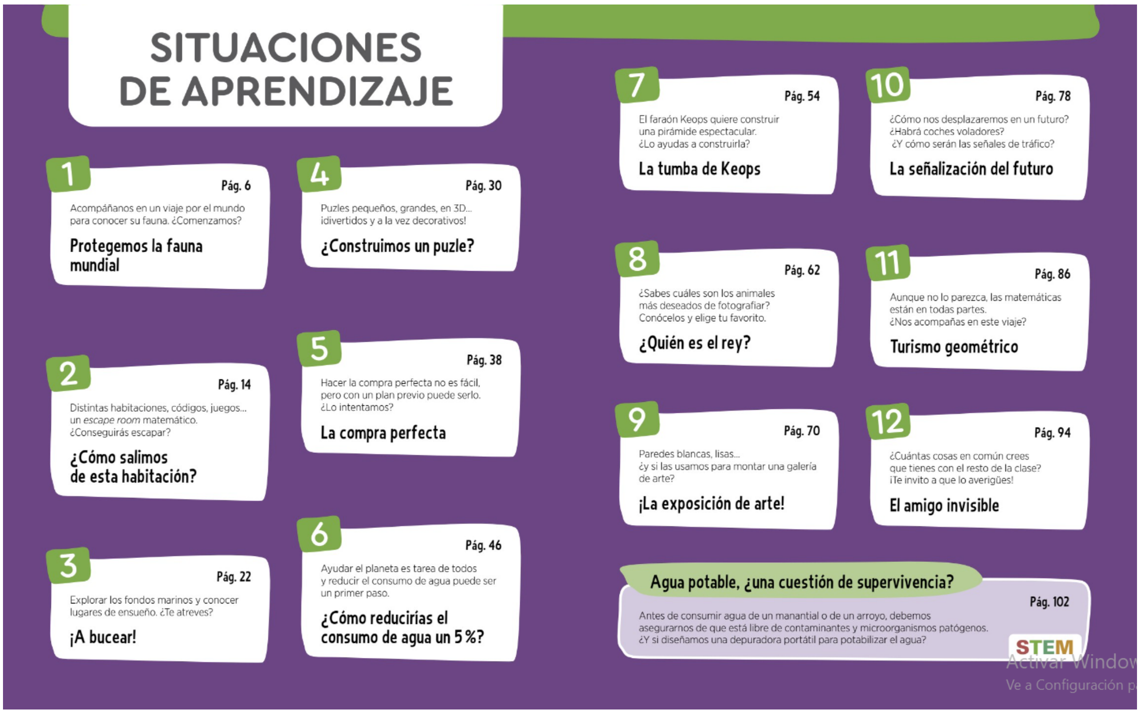
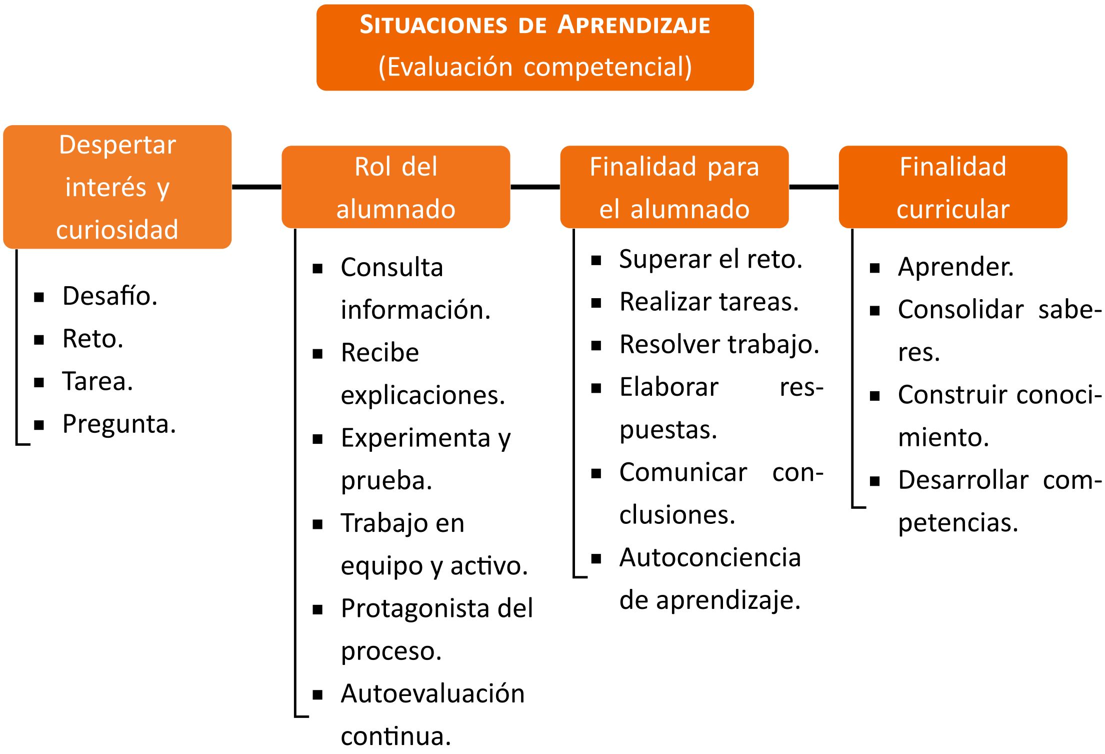


Figura 4.4

Esquema de las situaciones de aprendizaje en el libro de Edebé (Fuente: Recurso digital complementario para Edebé, 2022, disponible en su web. Eleboración propia).



Por otra parte, las situaciones de aprendizaje en McGraw-Hill tienen un espacio mucho más escueto (1 página por ficha, haciendo un total de 12 páginas de las 264 totales, en torno a un 5 %), con una metodología más alejada del IBL y más cercana al Aprendizaje Colaborativo (consultar Gutiérrez Yelsbak, 2012) o al trabajo autónomo individual, según cómo lo enfoque el profesor/a a cargo. Tiene sentido que al plantear las situaciones de aprendizaje como un recurso más y con la posibilidad de plantearlas como trabajo individual, deban ser más reducidas e incluso permitir el trabajo autónomo en casa del alumnado.

En suma, las situaciones de aprendizaje de McGraw-Hill están más enfocadas como tarea final de cada unidad, aprovechando los conceptos estudiados para su resolución y finalizan con un producto final (elaboración de conclusiones, informe, etc). Al mismo tiempo, a lo largo de la unidad se presentan ciertos ejercicios como situación de aprendizaje; principalmente por el contexto de su enunciado que las sitúa como aplicaciones para la vida real.

4.1.3. Unidades y contenido curricular.

- **Enfoque de las unidades.**

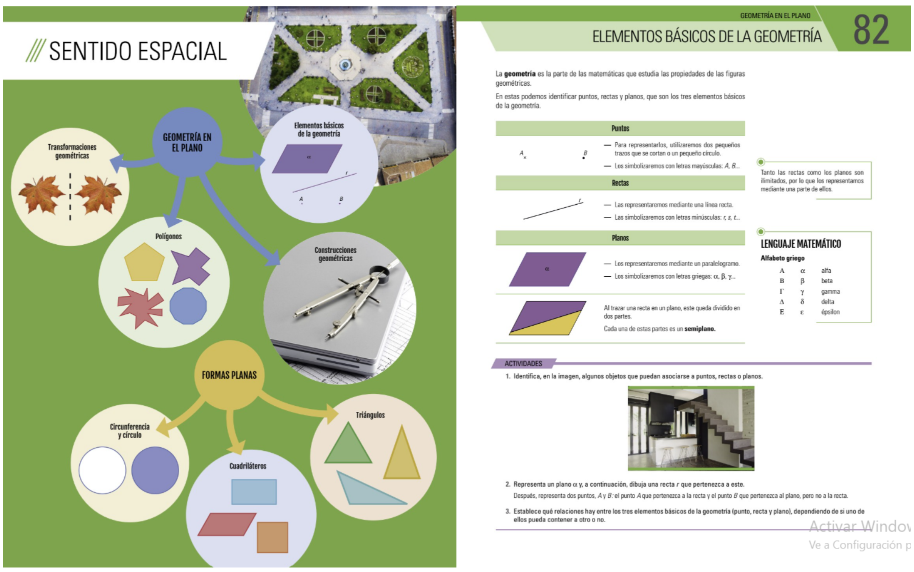
Si bien las situaciones de aprendizaje pueden llegar a ser una gran apuesta, en ninguno de ambos libros de texto reemplazan completamente los contenidos reglados. En el caso de Edebé, éstos conforman un bloque denominado '*saberes y destrezas*' (se puede consultar su índice en Figura 4.5 o en Figura C.4) y cuentan con una infografía por cada sentido de saber básico matemático (ver la Figura 4.6 o ver la Figura C.5).

Figura 4.5

Índice de saberes y destrezas en el libro de texto de Edebé (Fuente: Edebé, 2022).

Figura 4.6

Infografía de sentido espacial y una ficha de saber geométrico en el libro de texto de Edebé (Fuente: Edebé, 2022).



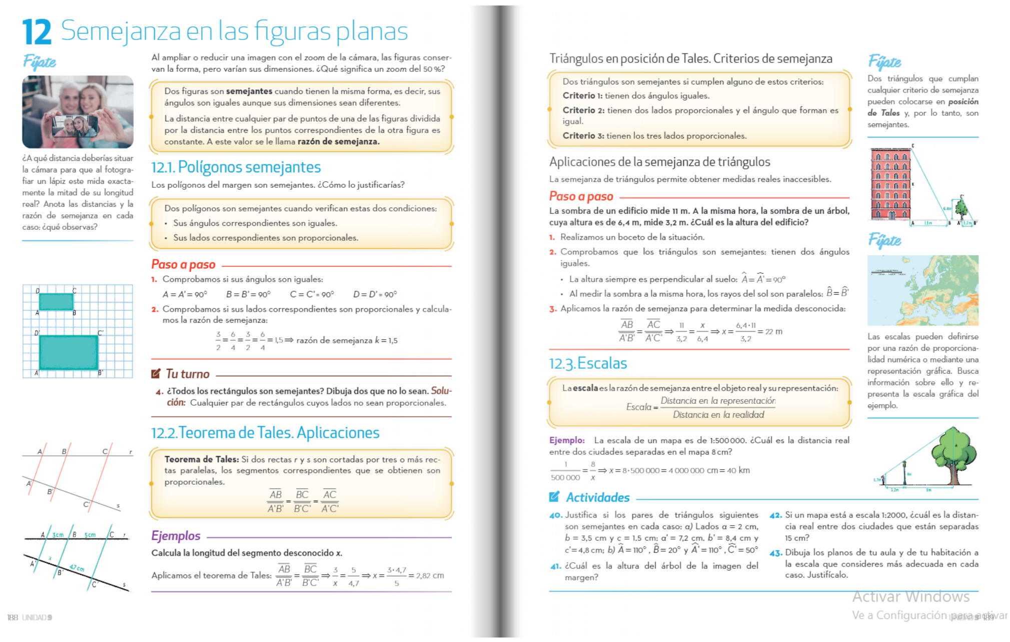
Con la finalidad de otorgar tiempo de trabajo a las situaciones de aprendizaje, se puede apreciar cierto recorte en la carga de contenido de sus fichas, siendo más concisas aunque conservando la estructura tradicional de explicación-ejercicios y cubriendo los saberes normativos.

En contraste, y aunque desde McGraw-Hill hacen una presentación de contenidos igualmente típica, elaboran sus unidades de manera más desarrollada y densa (buscando aprovechar al máximo y lo mejor posible el espacio de la página; ver la Figura 4.7 o ver la Figura C.6) y predispuesto a un enfoque más tradicional. A lo largo de sus unidades proponen un 25 % de las actividades de trabajo cooperativo y, en las notas del margen, tratan hechos históricos matemáticos, detalles, recursos extra, etc.

En un principio, resulta cuanto menos curioso que, en una época en la que tanto se promueven metodologías más activas, se presente el contenido de manera tan tradicional. Por un lado, tiene sentido que al plantear sus situaciones de aprendizaje como un recurso más y de trabajo principalmente individual, deban ser más reducidas e incluso permitir el trabajo autónomo en casa del alumnado. Por otro, a pesar de la sensación de la estructura tradicional, se cuida la presencia de trabajo cooperativo, recursos TIC, enfoques más prácticos, etc.

Figura 4.7

Muestra de una unidad de saberes en el libro de texto de McGraw-Hill (Fuente: McGraw-Hill, 2022).



12 Semejanza en las figuras planas

Fíjate

¿A qué distancia deberías situar la cámara para que al fotografiar un lápiz este mida exactamente la mitad de su longitud real? Anota las distancias y la razón de semejanza en cada caso: ¿qué observas?

Al ampliar o reducir una imagen con el *zoom* de la cámara, las figuras conservan la forma, pero varían sus dimensiones. ¿Qué significa un *zoom* del 50 %?

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma, es decir, sus ángulos son iguales aunque sus dimensiones sean diferentes.

La distancia entre cualquier par de puntos de una de las figuras dividida por la distancia entre los puntos correspondientes de la otra figura es constante. A este valor se le llama **razón de semejanza.**

12.1. Polígonos semejantes

Los polígonos del margen son semejantes. ¿Cómo lo justificarías?

Dos polígonos son semejantes cuando verifican estas dos condiciones:
- Sus ángulos correspondientes son iguales.
- Sus lados correspondientes son proporcionales.

Paso a paso

1. Comprobamos si sus ángulos son iguales:
$A = A' = 90°$ $B = B' = 90°$ $C = C' = 90°$ $D = D' = 90°$
2. Comprobamos si sus lados correspondientes son proporcionales y calculamos la razón de semejanza:
$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \Rightarrow$ razón de semejanza $k = 1{,}5$

Tu turno

4. **¿Todos los rectángulos son semejantes? Dibuja dos que no lo sean.** *Solución:* Cualquier par de rectángulos cuyos lados no sean proporcionales.

12.2. Teorema de Tales. Aplicaciones

Teorema de Tales: Si dos rectas *r* y *s* son cortadas por tres o más rectas paralelas, los segmentos correspondientes que se obtienen son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Ejemplos

Calcula la longitud del segmento desconocido x.

Aplicamos el teorema de Tales: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{4{,}7} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 4{,}7}{5} = 2{,}82$ cm

188 UNIDAD 9

Triángulos en posición de Tales. Criterios de semejanza

Dos triángulos son semejantes si cumplen alguno de estos criterios:

Criterio 1: tienen dos ángulos iguales.

Criterio 2: tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

Criterio 3: tienen los tres lados proporcionales.

Fíjate

Dos triángulos que cumplan cualquier criterio de semejanza pueden colocarse en ***posición de Tales*** y, por lo tanto, son semejantes.

Aplicaciones de la semejanza de triángulos

La semejanza de triángulos permite obtener medidas reales inaccesibles.

Paso a paso

La sombra de un edificio mide 11 m. A la misma hora, la sombra de un árbol, cuya altura es de 6,4 m, mide 3,2 m. ¿Cuál es la altura del edificio?

1. Realizamos un boceto de la situación.
2. Comprobamos que los triángulos son semejantes: tienen dos ángulos iguales.
- La altura siempre es perpendicular al suelo: $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90°$
- Al medir la sombra a la misma hora, los rayos del sol son paralelos: $\widehat{B} = \widehat{B'}$
3. Aplicamos la razón de semejanza para determinar la medida desconocida:
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \Rightarrow \frac{11}{3{,}2} = \frac{x}{6{,}4} \Rightarrow x = \frac{6{,}4 \cdot 11}{3{,}2} = 22 \text{ m}$$

Fíjate

Las escalas pueden definirse por una razón de proporcionalidad numérica o mediante una representación gráfica. Busca información sobre ello y representa la escala gráfica del ejemplo.

12.3. Escalas

La **escala** es la razón de semejanza entre el objeto real y su representación:

$$Escala = \frac{Distancia\ en\ la\ representación}{Distancia\ en\ la\ realidad}$$

Ejemplo: La escala de un mapa es de 1:500 000. ¿Cuál es la distancia real entre dos ciudades separadas en el mapa 8 cm?

$\frac{1}{500\,000} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 8 \cdot 500\,000 = 4\,000\,000 \text{ cm} = 40 \text{ km}$

Actividades

40. Justifica si los pares de triángulos siguientes son semejantes en cada caso: *a)* Lados $a = 2$ cm, $b = 3{,}5$ cm y $c = 1.5$ cm; $a' = 7{,}2$ cm, $b' = 8{,}4$ cm y $c' = 4{,}8$ cm; *b)* $\widehat{A} = 110°$, $\widehat{B} = 20°$ y $\widehat{A'} = 110°$, $\widehat{C'} = 50°$
41. ¿Cuál es la altura del árbol de la imagen del margen?
42. Si un mapa está a escala 1:2000, ¿cuál es la distancia real entre dos ciudades que están separadas 15 cm?
43. Dibuja los planos de tu aula y de tu habitación a la escala que consideres más adecuada en cada caso. Justifícalo.

UNIDAD 9 189

- **Orden, espacio y secuenciación.**

Respecto al orden, se analizarán exclusivamente el orden de los bloques de geometría, que en ambos libros se posiciona tras los bloques de 'Álgebra' y antes del bloque de 'Estadística y Probabilidad'.

En el caso de Edebé, el bloque de 'Geometría' se desarrolla desde la *ficha* 82 hasta la *ficha* 127, haciendo un total de 45 fichas distribuidas en 62 páginas de las 204 páginas en las que se desarrolla su sección de '*Saberes y Destrezas*'. Esto supone que el bloque ocupa un 30 % del contenido. En McGraw-Hill, el bloque de 'Geometría' comienza en la página 148 y termina en la 219, lo que supone un total de 71 páginas y un 27 % de los contenidos.

Se puede concluir que ambos libros de texto dan un espacio similar a la Geometría, aunque la diferencia de enfoques puede traducirse en una cantidad de trabajo o un éxito de transposición didáctica muy diferentes. Para ello, consultamos las Tabla 4.1 y Tabla 4.2.

Tabla 4.1

Listado de unidades y contenidos de geometría en el libro de texto de Edebé (Fuente: Edebé, 2022. Elaboración propia).

EDEBÉ		
Unidad 9. Geometría en el plano.	**9.1.** Elementos básicos de geom.	**9.7.** Polígono regulares.
	9.2. Rectas.	**9.8.** Tamaño y forma.
	9.3. Semirrectas y segmentos.	**9.9.** Traslación y giro.
	9.4. Construc. con regla y compás.	**9.10.** Simetría.
	9.5. Geom. con recursos digitales.	**9.11.** Semejanza.
	9.6. Polígonos.	**9.12.** Mosaicos.
Unidad 10. Formas planas.	**10.1.** Triángulos.	**10.7.** Construc. de cuadrilát.
	10.2. Teorema de Pitágoras.	**10.8.** La circunferencia.
	10.3. Criterios de igualdad.	**10.9.** Posiciones relativas.
	10.4. Rectas y puntos notables.	**10.10.** Políg. inscritos y circunscr.
	10.5. Construcción de triángulos.	**10.11.** Constr. de políg. reg. inscr.
	10.6. Cuadriláteros.	**10.12.** Digitaliz. de políg. reg.
Unidad 11. Medidas y ángulos.	**11.1.** Magnitudes y su medida.	**11.7.** Operaciones con ángulos.
	11.2. Ángulos.	**11.8.** Relaciones angulares.
	11.3. Medida de ángulos.	**11.9.** Ángulos en la circunf.
	11.4. Conversión de medidas ang.	**11.10.** Áng. inscr., interior y ext.
	11.5. El sistema sexagesimal.	**11.11.** Medida del ángulo.
	11.6. Clasificación de los ángulos.	
Unidad 12. Perímetros y áreas.	**12.1.** Unidades de longitud.	**12.7.** Triáng., trapec. y pol. reg.
	12.2. Perímetros de polígonos.	**12.8.** Área de polígonos irreg.
	12.3. Longitud de la circunf.	**12.9.** Estimación de áreas.
	12.4. Longitud de arco.	**12.10.** El área del círculo.
	12.5. Unidades de superficie.	**12.11.** Figuras circulares.
	12.6. Áreas de paralelogramos.	

Tabla 4.2

Listado de unidades y contenidos de geometría en el libro de texto de McGraw-Hill (Fuente: McGraw-Hill, 2022. Elaboración propia).

MC GRAW-HILL		
UNIDAD 8. Elementos del plano.	**8.1.** Elementos geomét. básicos.	**8.5.** Él ángulo como giro.
	8.2. Ángulo como región.	**8.6.** Operac. con sist. sexages.
	8.3. Clasificación de ángulos.	**8.7.** Mediatriz y bisectriz.
	8.4. Relación entre ángulos.	
UNIDAD 9. Figuras planas.	**9.1.** Líneas y figuras planas.	**9.7.** Elem. notables del triáng.
	9.2. Circunf. y figuras circulares.	**9.8.** Cuadriláteros.
	9.3. Posiciones relativas.	**9.9.** Polígonos regulares.
	9.4. Polígonos. Clasificación.	**9.10.** Simetrías en figuras planas.
	9.5. Triángulos.	**9.11.** Ángulos en figuras planas.
	9.6. Igualdad de triángulos.	**9.12.** Semejanza en fig. planas.
UNIDAD 10. Perímetros y áreas.	**10.1.** Perímetro. Medida.	**10.7.** Área de políg. regulares.
	10.2. Área. Unidad de medida.	**10.8.** Perímetro en figuras circ.
	10.3. Teorema de Pitágoras.	**10.9.** Área en figuras circulares.
	10.4. Perímetro de un polígono.	**10.10.** Figuras compuestas.
	10.5. Área de cuadriláteros.	**10.11.** Estimación de áreas.
	10.6. Área del triángulo.	

A grosso modo, el libro de texto de Edebé parece algo peor organizado en aras a una óptima transición didáctica. Trata cuestiones cruciales –como construcciones geométricas, giros, la simetría, semejanza, las figuras geométricas, triángulos, Teorema de Pitágoras y cuadriláteros– sin haber dado una definición hábil de ángulo y sin que el alumnado sepa tratar u operar correctamente con ellos. También presenta otros detalles menores mejorables, como tratar las figuras circulares (unidad 12.11) después de la estimación de áreas (unidad 12.9), reduciendo así la gama de figuras disponibles para estimación.

En cambio, la estructura que siguen en McGraw-Hill es más lógica desde un punto de vista matemático. A la hora de tratar cada una de sus secciones no se echan en falta recursos indispensables y las alteraciones de orden que se pueden proponer son menos significativas. Lo que sí se echa en falta es una sección especialmente dedicada a las herramientas digitales para geometría, que llegan a ser especialmente útiles en alumnado con dificultades de visión geométrico-espacial y como herramienta de descubrimiento para alumnado de altas capacidades.

4.2. Análisis de idoneidad didáctica y conclusiones.

El análisis de idoneidad didáctica "debe ser de utilidad en la toma de decisiones fundamentadas sobre el uso de la lección de un libro de texto [...], como recurso para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje" (Castillo Céspedes et al., 2022). Asimismo, vamos a entender por *idoneidad didáctica* en un proceso de aprendizaje como ...

> ...el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Breda et al., 2018, pág. 268).

La teoría de idoneidad –consultar Godino, 2013 como primera toma de contacto– analiza libros de texto de matemáticas conforme a seis dimensiones de idoneidad, cada una compuesta por diversas componentes y subcomponentes que engloban indicadores varios. Tales indicadores ayudan a valorar la idoneidad del libro de texto otorgando grados de idoneidad (tradicionalmente '*baja*', '*media*' y '*alta*') para así concluir la idoneidad del libro de texto en cada una de sus componentes.

Las dimensiones de idoneidad a analizar son:

- '*Idoneidad epistémica*': Enfocada a evaluar que el contenido matemático sea correcto, adecuado, adaptado y sin procurar '*conflictos epistémicos*'.
- '*Idoneidad cognitiva*': Enfocada a evaluar si los contenidos implementados favorecen el desarrollo potencial del alumnado.
- '*Idoneidad afectiva*': Enfocada a evaluar si promueve la motivación e implicación del alumnado.
- '*Idoneidad interaccional*': Enfocada a evaluar desde el punto de vista interaccional y comunicativo si la configuración de los contenidos ayudan a identificar potenciales conflictos didácticos y resolverlos.
- '*Idoneidad mediacional*': Enfocada a evaluar la disponibilidad y adecuación de los recursos, inclusive el recurso temporal.
- '*Idoneidad ecológica*': Enfocada a evaluar el ajuste al proyecto educativo de un centro, de una institución educativa, de la sociedad y de su legislación.

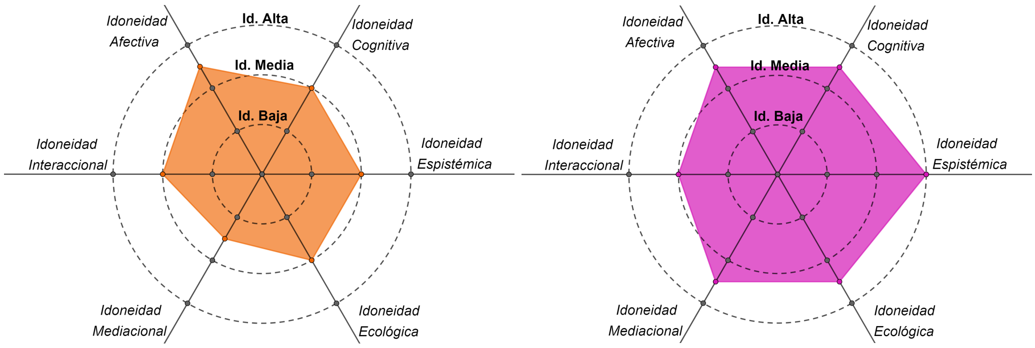
El análisis de idoneidad que realizo para estos libros no debe entenderse como algo categórico, exhaustivo y experto; sino como un análisis complementario a todo lo descrito previamente y subjetivo dado que puede estar sujeto a sesgos de preferencia personal, a errores de interpretación de los indicadores y a mi inexperiencia en este campo de análisis. Así pues, y a título personal, he preferido agregar dos grados de idoneidad intermedios ('*media-baja*' y '*media-alta*') ante la dificultad que con frecuencia me suponía conceder un grado de idoneidad concreto a ciertos indicadores.

Por cuestiones de espacio, se dispondrán simplemente las conclusiones, siendo posible consultar el Anexo D para más detalles.

Atendiendo a lo analizado y expuesto en el anexo indicado, queda patente que ambos libros de texto tienen virtudes y enfoques interesantes. A pesar de ello, el libro de texto de McGraw-Hill está mejor balanceado (ver Figura 4.8), destacando sobre todo su componente epistémica con un uso más fácil para el profesor y la clase promedio, sin abandonar al alumnado con altas capacidades o que requiera refuerzo. La editorial Edebé hace una gran apuesta por las situaciones de aprendizaje, pero en el proceso presenta más conflictos a los que atender resultando en un menor grado de idoneidad epistémica. Por ejemplo, es demasiado sensible a la implicación del profesor/a y del alumnado, afectando tanto a la rutina de trabajo como a la temporalización y significando un grado "medio-bajo" para la dimensión mediacional; además, disponer tanto espacio para las situaciones de aprendizaje se traduce en un contenido más superficial y menos profundizado.

Figura 4.8

Polígonos de idoneidad de los libros de texto en una escala desde 'baja' *hasta* 'alta'. *A la izquierda, el polígono de idoneidad del libro de texto de Edebé; a la derecha, el polígono de idoneidad del libro de texto de McGraw-Hill (Fuente: Elaboración propia).*



Capítulo 5

Elaboración epistemológica.

Este capítulo está enfocado a desarrollar, a partir de un tema de oposiciones y de manera formal, el contenido que se cubrirá en la Unidad Didáctica. El temario de oposiciones viene especificado por la *Orden de 9 de septiembre de 1993, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas*.

Cabe mencionar que dicha orden dictamina los temas, pero no da indicaciones de aspectos a cubrir en su desarrollo más allá de lo mencionado en su título. Los contenidos a cubrir en un tema suelen escogerse libremente si el usuario tiene el suficiente conocimiento matemático, o tomando como base algún tema de oposiciones ya redactado por algún otro opositor o academia. En mi caso, al contar con la titulación de Graduado en Matemáticas, y dado que ningún tema del temario de oposiciones se adapta completamente al contenido que pretendo desarrollar, he optado por hacer un desarrollo libre del tema que considero más similar, el '*Tema 39. Geometría del triángulo*', con un enfoque más cercano a la UD que se desarrollará en el Capítulo 7.

Dado que dicha UD para 1º de ESO versará sobre figuras planas, consideraremos exclusivamente el plano euclídeo sin abordar más dimensiones. Con ese mismo motivo, se evitará el uso de la geometría cartesiana y las coordenadas una vez asentadas las bases, para una mejor compatibilidad con la UD para dicho curso al evitar la geometría analítica. Como referencia para el capítulo se ha tomado como base el libro '*Geometría básica*' de Buser y Costa (2018), ya que se adapta razonablemente bien al contenido a desarrollar.

Idílicamente, este capítulo lo desarrollaría comenzando por la axiomática que se toma de base, desarrollando los conceptos y resultados previos necesarios en un orden formal y constructivo antes de introducir a las figuras planas. No obstante, ello supondría una extensión cercana a un curso de Geometría, lo cual tampoco es el objetivo de este trabajo. Aún así, se dispone el Anexo E como capítulo complementario donde se intentará cubrir lo máximo posible, con un orden constructivo (aunque ello supondrá un mayor vaivén entre el capítulo y el anexo) para evitar así grandes huecos entre conceptos.

5.1. Bases para la geometría clásica.

Todo el contenido que se cubre en este capítulo se puede desarrollar a raíz de la siguiente axiomática, intercalándola con un desarrollo y orden adecuado (consultar Buser y Costa, 2018). Para una mejor comprensión del capítulo se pone a disposición del lector el Anexo E, donde se desarrollan conceptos intermedios necesarios para el capítulo. No obstante, a lo largo de esta primera sección se desarrollarán los conceptos más esenciales de manera más conceptual, intercalando descripciones menos formales entre los axiomas para no dejar conceptos sin tratar y que no sea imperativo el vaivén al Anexo E para tener al menos cierta comprensión del concepto tratado.

Antes incluso de desarrollar el primer axioma, conviene tener una noción sobre *espacios métricos* para que el enunciado tenga sentido pleno. Éstos no son sino espacios en los que es posible medir, para lo cual debe establecerse una *métrica*; y éstas son funciones que, en cierto modo, heredan las propiedades de la medida usual en el mundo real. Sus propiedades más esenciales son la *no negatividad* (salvo que se establezca un sistema de referencia), la *simetría* de la medida (esto es, la distancia entre dos puntos no depende desde cuál de ellos se mida) y la *desigualdad triangular* (esto es, si se añaden medidas intermedias entre dos puntos, la distancia será la misma o mayor). Para un desarrollo formal y extendido, consúltese la Sección E.2.

Una vez establecida esa base, usaremos la notación Π para referirnos al plano euclídeo y d para referirnos a la función distancia (euclídea). La idea de esta notación es la de romper con las ideas y conocimientos preconcebidos; es decir, debemos dejar de pensar en el plano como $\mathbb{R}^2$ para evitar dicha identificarlo como un objeto analítico y no salirnos del contexto clásico de la geometría.

Axioma 1 (Π, d) *es un espacio métrico.*

Dentro de un espacio métrico existen casos en los que se verifica que $d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q)$; es decir, que la distancia entre dos puntos equivale a la suma de distancias con un punto intermedio. El conjunto que forman tales puntos es lo que se denomina *segmento* $[P,Q]$ y permite definir los conceptos de *puntos alineados* (como aquellos que quedan dentro de un segmento), *recta* (como extensión del segmento y familia de puntos alineados) y sus posiciones relativas, entre las cuales destaca el concepto de *paralelismo* (que caracteriza a rectas sin puntos en común). Para un desarrollo formal y extendido, consúltese la Sección E.3.

Axioma 2 *El plano euclídeo* Π *contiene, al menos, tres puntos no alineados.*

Axioma 3 *Sea* $r \subset \Pi$ *una recta arbitraria del plano. Ésta divide el plano en dos conjuntos* Π_1^r *y* Π_2^r *verificando lo siguiente:*

1. $\Pi_1^r \cup \Pi_2^r = \Pi \backslash r$.
2. *Dados* $A, B \in \Pi_i^r$ *(para cierto* $i \in \{1,2\}$*), entonces* $[A,B] \in \Pi_i^r$.

3. *Dados $A \in \Pi_1^r$ y $B \in \Pi_2^r$, se tiene que $[A, B] \cap r \neq \emptyset$.*

*A los elementos Π_1^r y Π_2^r se les denomina **semiplanos** determinados por r.*

El Axioma 3 se denomina a veces '***Axioma de separación***' y conviene hacer notar (aunque no se va a demostrar[1]) que los semiplanos determinados por una recta son conjuntos no vacíos y, además, disjuntos. Este axioma permite formalizar el concepto de *semirrecta* como las partes de una recta que quedan en semiplanos distintos respecto de otra recta que la corta (su definición formal se puede consultar en la Sección E.4).

De manera previa al siguiente axioma, vamos a establecer un tipo especial de funciones en (Π, d); las *isometrías*. Éstas son funciones f que conservan las distancias; es decir, siempre verifican que $d\Big(f(P), f(Q)\Big) = d(P, Q)$ y al conjunto de isometrías del plano, que se trata de un grupo no conmutativo[2], lo notamos por $Isom(\Pi)$. Cuando dos conjuntos $C_1, C_2 \subset \Pi$ se pueden relacionar mediante una isometría; esto es, cuando $f(C_1) = C_2$, se dice que dichos conjuntos son *congruentes*. Para un desarrollo formal y extendido, consúltese la Sección E.5.

Axioma 4 *Considérense $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \Pi$ puntos del plano verificando que $d(P_1, P_2) = d(Q_1, Q_2)$. Se tiene que existe al menos una isometría $f \in Isom(\Pi)$ verificando que $f(P_1) = Q_1$ y que $f(P_2) = Q_2$.*

El Axioma 4, también denominado ***'Axioma de movilidad'***, nos dice que basta con preservar la distancia entre dos pares de puntos para poder construir una isometría que los haga congruentes y por ello, todos los segmentos de la misma longitud van a ser siempre congruentes. No obstante, no determina cuál es tal isometría, no proporciona un método de construcción y tampoco establece que se determine una única isometría.

Axioma 5 *Dada $r \subset \Pi$ una recta del plano, existe $\sigma \in Isom(\Pi)$ verificando que:*

1. *r es el conjunto de puntos fijos de σ. Esto es, $X \in r \iff \sigma(X) = X$.*
2. *σ es una involución. Esto es, $\sigma \circ \sigma = Id_\Pi$.*

*A dichas isometrías las denominaremos **reflexiones respecto a** r (también se pueden denominar 'reflexiones de eje r' o 'reflexiones axiales') y la notaremos como σ_r[3].*

Contando ahora con una isometría no trivial, es posible ampliar el número de resultados sobre isometrías, así como el concepto de *ortogonalidad* entre rectas, el cual determina una disposición muy particular entre dos rectas r y s que se cortan (cuando se puede tomar cualquier par de puntos $A, B \in r$ que equidisten del punto de corte y de modo que los puntos de s sean equidistantes respecto de A y B). Para un desarrollo formal, consúltese la Sección E.6.

[1] Para consultar dicha demostración, ver pág. 28 de Buser y Costa (2018).

[2] La composición de isometrías es una operación binaria, interna, asociativa, cuenta con un elemento neutro ($Id_\Pi \in Isom(\Pi)$) y todo elemento $f \in Isom(\Pi)$ cuenta con un inverso $f^{-1} \in Isom(\Pi)$.

[3] Se demostrará más adelante que una recta determina una única reflexión (consultar Corolario E.5).

Axioma 6 *Dada una recta $r \subset \Pi$ y dado un punto exterior a ella $P \in \Pi \backslash r$, existe una única recta s que pase por P verificando $r \parallel s$.*

Este último axioma es el famoso '***Axioma de las paralelas***' de Euclides. Conviene recalcar que la diferencia entre el Teorema E.7 y este axioma es que el primero es un resultado de existencia, mientras que el segundo es un resultado de unicidad.

Así, queda establecida una axiomática suficiente para el desarrollo de la geometría de manera clásica que permite el pleno desarrollo del resto de la elaboración epistemológica.

5.2. Polígonos.

Definición 5.1 *Sea $\mathcal{P} \subset \Pi$ un conjunto finito de segmentos no repetidos. Denominaremos **lados** de $\mathcal{P}$ a cada uno de los segmentos y **vértices** a los extremos de cada lado. Entonces, $\mathcal{P}$ es un **polígono** si verifica que:*

*i) Dos lados cualesquiera no se cortan salvo que tengan un extremo en común. En tal caso, diremos que dichos lados son **contiguos** o **adyacentes** y a los extremos los denominaremos **vértices**.*

ii) Los lados de $\mathcal{P}$ se pueden listar sucesivamente de modo que el vértice final de un lado sea el inicial del siguiente y de modo que el vértice final del último lado listado sea el vértice inicial del primer lado listado. Es decir, se puede expresar como

$$\mathcal{P} = \Big\{[V_1, V_2], [V_2, V_3], \dots, [V_n, V_1]\Big\}.$$

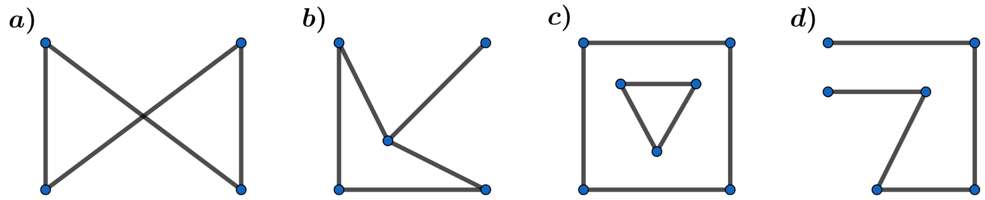
iii) Los vértices de dos lados consecutivos no pueden estar alineados y cada vértice es extremo de exactamente dos lados.

*De manera genérica, al polígono de n lados se denomina n-**gono** o **enégono**.*

Con esta definición se tiene que para este trabajo no se admiten como polígonos ciertas construcciones (ver Figura 5.1).

Figura 5.1

Figuras que no son polígonos por no cumplir alguna de las condiciones de la Definición 5.1. La figura $a)$ no cumple la condición i). La figura $b)$ no cumple la condición iii) Las figuras $c)$ y $d)$ no cumplen la condición ii) (Fuente: Elaboración propia).



Para un número de lados concreto, el n-gono se nombra a partir de un prefijo numérico griego. Por ejemplo, para $n = 5$ se tiene el *pentágono*; para $n = 6$, el *hexágono*; etc. Las excepciones más sonadas son los casos de $n = 3$, que se denominan *triángulo* (aunque se acepta 'trígono') y de $n = 4$, que se denominan *cuadrilátero* (aunque se acepta 'tetrágono').

Definición 5.2 *Sea $\mathcal{P} \subset \Pi$ un polígono. Diremos que es un polígono **convexo** si toda recta que no sea extensión de un lado corta, a lo sumo, en dos puntos a $\mathcal{P}$. En caso contrario, diremos que el polígono es **cóncavo**.*

Teorema 5.1 *Sea $\mathcal{P} \subset \Pi$ un polígono. Éste es convexo si, y sólo si, para todo lado $[V, W]$ de $\mathcal{P}$ se verifica que todos los vértices restantes están contenidos en el mismo semiplano determinado por $r_{V,W}$.*

Este teorema no se demostrará por motivos de extensión y por no ser un aspecto central de la UD. No obstante, y aunque no se entrará a formalizar el concepto de '*interior de un polígono*', el teorema refuerza la intuición de que "un polígono convexo no tiene ángulos superiores a un llano". A raíz de dicho teorema, el siguiente resultado es inmediato.

Corolario 5.1 *Todo triángulo es convexo.*

Definición 5.3 *Sea $\mathcal{P} \subset \Pi$ un polígono. Denominaremos **diagonal** a cualquier segmento entre vértices del polígono que no conformen un lado.*

Proposición 5.1 *Sea $\mathcal{P} \subset \Pi$ un polígono de n lados. Entonces $\mathcal{P}$ consta de $n(n-3)/2$ diagonales distintas. En particular, los triángulos no tienen diagonales.*

Demostración: Como cada vértice es extremo de dos lados, quedan $n-3$ vértices con los que puede conectarse para formar una diagonal. Si tenemos en cuenta que son n vértices, tendremos $n(n-3)$ diagonales (no distintas); y dado que estamos contando tanto $[V, W]$ como $[W, V]$, tenemos que son $n(n-3)/2$ diagonales distintas. ■

Teorema 5.2 *Sea $\mathcal{P} \subset \Pi$ un polígono convexo de n lados. Éste puede dividirse en $n-2$ triángulos con un vértice común y cuyos vértices son vértices de $\mathcal{P}$.*

Este enunciado no se va a demostrar, pero sí que se pueden comentar algunos aspectos. El primero es que el enunciado es trivialmente cierto para triángulos (si $n = 3$, entonces $n - 2 = 1$ y la "descomposición" es el propio polígono).

El segundo es que la descomposición de $\mathcal{P} = \Big\{[V_1, V_2], [V_2, V_3], \ldots, [V_n, V_1]\Big\}$ se basa en el uso de diagonales desde un vértice. Supongamos que descomponemos desde el vértice V_1, entonces hay exactamente $n-3$ diagonales que notaremos por d_1, d_2, etc; siendo $d_i = [V_1, V_{i+2}]$. Por tanto se pueden construir los siguientes triángulos:

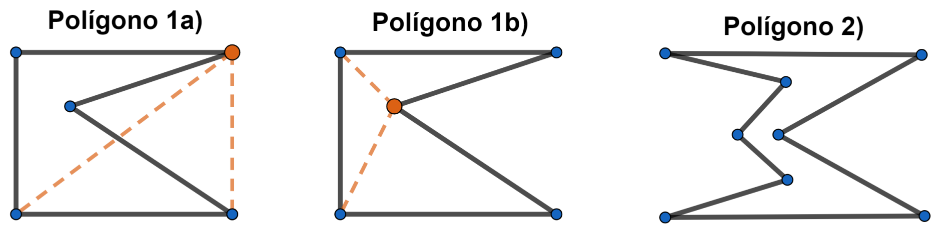
- El triángulo formado por los dos primeros lados de $\mathcal{P}$ y la primera diagonal, d_1. Éste es $T_1 = \Big\{[V_1, V_2], [V_2, V_3], [V_3, V_1]\Big\} = \Big\{[V_1, V_2], [V_2, V_3], d_1\Big\}$.

- Los triángulos formados por dos diagonales consecutivas (siempre que haya más de una diagonal). Éstos son:
$T_i = \Big\{[V_1, V_{i+1}], [V_{i+1}, V_{i+2}], [V_{i+2}, V_1]\Big\} = \Big\{d_{i-1}, [V_{i+1}, V_{i+2}], d_i\Big\}$, con $2 \leq i \leq n-3$.
- El triángulo formado por dos últimos lados de $\mathcal{P}$ y la última diagonal, d_{n-2}. Éste es:
$T_{n-2} = \Big\{[V_1, V_{n-1}], [V_{n-1}, V_n], [V_n, V_1]\Big\} = \Big\{d_{n-3}, [V_{n-1}, V_n], [V_n, V_1]\Big\}$.

La última cuestión a mencionar es que, aunque no se ha hecho referencia a la convexidad del polígono en los dos aspectos previos, es una hipótesis imprescindible. Si no se impone la convexidad, entonces las diagonales pueden ser exteriores al polígono o cortar lados, imposibilitando una descomposición eficaz en triángulos desde un vértice común. De hecho, según sea el polígono, es posible que no admita dicha descomposición (consultar la Figura 5.2).

Figura 5.2

Ejemplos para ilustrar la necesidad de la convexidad en el Teorema 5.2. El 'polígono 1)' admite, o no, una descomposición como la del enunciado dependiendo del vértice. El 'Polígono 2)', en cambio, tiene diagonales en el exterior o que cortan a algún lado desde todos sus vértices. (Fuente: Elaboración propia).



5.2.1. Polígonos regulares. Simetrías.

Definición 5.4 *Sea $X \subset \Pi$ un conjunto del plano. Diremos que X **tiene simetría** o que **es simétrica** si admite una isometría que la deja invariante; esto es, si $\exists f \in Isom(\Pi)$ verificando que $f(X) = X$.*

Hay que tener en cuenta que un conjunto o una figura plana puede ser simétrica mediante varias isometrías distintas respetando la condición de invarianza. Intuitivamente pensamos en las reflexiones como procuradoras de simetrías y en el eje de reflexión como '*eje de simetría*' y, aunque son éstas las simetrías en las que nos centraremos, es importante señalar que es admisible la simetría mediante otras isometrías tal y como se muestra en la Figura 5.3.

Mencionar también que no sólo $Isom(\Pi)$ tiene estructura algebraica de grupo, sino que el conjunto de simetrías de una figura mantiene estructura de grupo. No obstante, conviene señalar que "el grupo algebraico por sí solo suele ser insuficiente para recuperar el tipo de simetría de la figura, requiriendo lo que se denomina *acción* de la simetría" (Buser y Costa, 2018, pp. 77-78).

Figura 5.3

A la izquierda, una figura con simetría mediante una reflexión central. A la derecha, una figura con simetría mediante una rotación. Ambas son figuras simétricas, pero sin invarianzas mediante reflexiones ni ejes de simetría. (Fuente: «Wikipedia. Artículo "Simetría (Geometría)"», 2023).

DEFINICIÓN 5.5 *Sea $\mathcal{P} \subset \Pi$ un polígono. Diremos que $\mathcal{P}$ es un **polígono regular** si todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos son congruentes.*

COROLARIO 5.2 *Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ dos polígonos regulares, ambos de n lados. Entonces:*

i) Si los lados de $\mathcal{P}_1$ no son congruentes a los de $\mathcal{P}_2$, entonces ambos polígonos son semejantes. Esto es, existe una composición de una isometría con una homotecia[4] entre ambos polígonos.

ii) Si los lados de $\mathcal{P}_1$ son congruentes a los de $\mathcal{P}_2$, entonces ambos polígonos son congruentes.

Es decir, el n-gono regular es único, salvo isometrías y homotecias.

Antes de dar los siguientes resultados, vamos a expandir el concepto de bisección de un ángulo y definir qué va a ser n-sectar un ángulo; en vez de dividirlo en dos ángulos congruentes que completan al original, va a ser dividido en n ángulos congruentes que lo completan. Ahora sí, podemos formular con facilidad los resultados que siguen.

PROPOSICIÓN 5.2 *Sea $n \geq 3$ un número entero y sean $r, s \subset \Pi$ dos rectas que se cortan n-sectando un ángulo llano. Dado $P \in r$, y considerando $V_{i+1} = (\sigma_s \circ \sigma_r)^i(P)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y para $V_1 = P$, tendremos que $\mathcal{P} = \big\{[V_1, V_2], [V_2, V_3], \ldots, [V_n, V_1]\big\}$ es un polígono regular.*

La demostración de este resultado no es difícil de entender, pero no se va a incluir dado que es algo larga y engorrosa de escribir. En su lugar, se puede consultar la Figura 5.4 para visualizar cómo se construye el polígono regular según esta proposición.

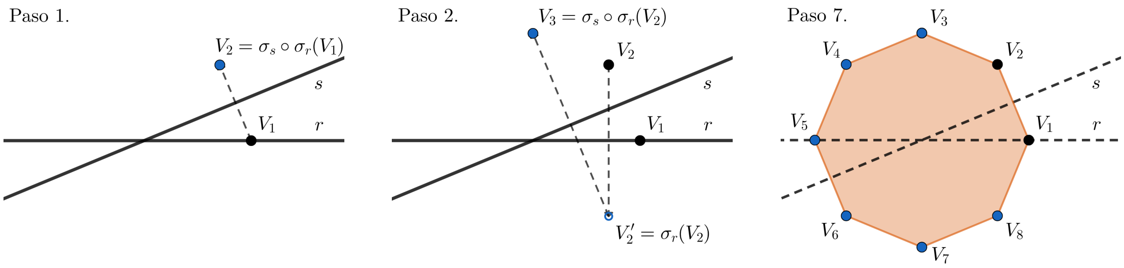
COROLARIO 5.3 *Todo polígono regular es convexo.*

TEOREMA 5.3 *Todo polígono regular $\mathcal{P}$ de n lados tiene n ejes de simetría, verificando que ejes de simetría consecutivos n-sectan al ángulo llano. Además, también cuenta con una simetría mediante rotación (y el ángulo de rotación será la n-sección del ángulo completo).*

[4] Dados $C \in \Pi$ y $k > 0$, una aplicación $\eta_{C,k} \colon \Pi \longrightarrow \Pi$ verificando que $d\big(C, \eta_{C,k}(P)\big) = k\, d(C, P)$ es una **homotecia**. El punto $C \in \Pi$ se denomina el **centro de la homotecia** y $k > 0$ es la **razón de homotecia**.

Figura 5.4

Esquema para ilustrar el procedimiento explicado en la Proposición 5.2 a partir de dos rectas que se cortan, octo-sectando el ángulo llano. Los Pasos 1 y 2 muestran cómo se general los vértices a partir de V_1; el Paso 7 muestra el octógono regular ya formado (Fuente: Elaboración propia).



Corolario 5.4 *Sea $[P,Q] \subset \Pi$ un segmento en el plano y sea $n \geq 3$ un número entero. Entonces existe el polígono regular de n lados que tiene por lado al segmento $[P,Q]$.*

Corolario 5.5 *Sea $\mathcal{P} \subset \Pi$ un polígono regular de n lados. Entonces los ángulos desde cada vértice miden $n-2$ veces la n-sección del ángulo llano.*

La formulación de este corolario viene a decir que si V es vértice de $\mathcal{P}$, entonces su ángulo, $\widehat{V}$ (notación detallada en la Definición 5.6), mide $(n-2)\pi/n\, rad$. Simplemente se ha optado por esa formulación para evitar mencionar medidas de ángulos explícitamente.

Teorema 5.4 *Sea $\mathcal{P} \subset \Pi$ un polígono convexo de n lados que admite una simetría mediante rotación, siendo el ángulo de rotación la n-sección del ángulo completo. Entonces $\mathcal{P}$ es un polígono regular.*

5.3. Triángulos.

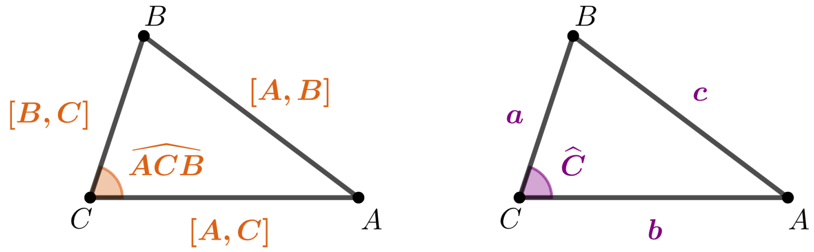
Definición 5.6 *Sean $A, B, C \in \Pi$ tres puntos no alineados. Entonces diremos que los segmentos $[A,B]$, $[B,C]$ y $[C,A]$ forman el **triángulo** ΔABC. Además, se establecen los siguientes conceptos:*

- *A los puntos A, B, C los denominaremos **vértices** del triángulo.*
- *A los segmentos formados por los vértices los denominaremos **lados** del triángulo.*
- *Diremos que un vértice es **opuesto a un lado** si no es extremo de dicho lado. Por ejemplo, el vértice A es opuesto al lado $[B,C]$.*
- *Diremos que un ángulo (que notaremos igual que el vértice pero con $\widehat{\ }$) es **opuesto a un lado** si lo es su vértice. Por ejemplo, el ángulo $\widehat{A}$ es opuesto al lado $[B,C]$.*

La notación para triángulos puede llegar a ser muy variada en función de las necesidades o la situación. Las más comunes están plasmadas en la Figura 5.5 y, en caso de requerir alguna otra, se especificará.

Figura 5.5

Triángulo ΔABC con dos tipos de notación para lados y ángulos. (Fuente: Elaboración propia).



Conviene mencionar que la notación matemática es un asunto más importante de lo que mucha gente cree. Normalmente la notaciones buscan no sólo ser más compactas que una frase coloquial, sino que también buscan dar mucha información o, por lo menos, no perderla. Con este motivo se establece la siguiente notación que puede ser de utilidad en enunciados y demostraciones:

- La semirrecta que tiene por vértice A y pasa por B la podemos notar por $r_{A \vdash B}$.
- Para determinar un ángulo con vértice en A, podremos usar cualquiera de las siguientes: $\widehat{A}$, $\widehat{BAC}$ o $\angle BAC$. Estas dos últimas notaciones tienen la ventaja de señalar al vértice como el punto central y poder usarse en ángulos orientados.
- Para determinar el ángulo del triángulo con vértice en A a partir de semirrectas, podremos usar la notación combinada $\widehat{A} = \angle\{r_{A \vdash B}, r_{A \vdash C}\}$.

Teorema 5.5 *Sea ΔABC un triángulo en el plano y sea $r \subset \Pi$ una recta que corta a uno de los lados. Entonces, necesariamente r corta a uno de los otros dos lados.*

Demostración: Supongamos, sin pérdida de generalidad, que r corta al lado $[B,C]$. Supongamos además que r no corta ni al lado $[A,C]$, ni al lado $[A,B]$ y comprobemos que ello conduce a una contradicción.

Dado que $[A,C]$ y $[A,B]$ no cortan a r, podemos confirmar que A y C están en el mismo semiplano Π_i^r delimitado por r. Igual se tiene para A y B, implicando que $A, B, C \in \Pi_i^r$ y, por tanto, que r no cortaría al lado $[B,C] \subset \Pi_i^r \subset \Pi \backslash r$. Ello supone una contradicción con la hipótesis "*r corta al lado $[B,C]$*" procedente de aceptar que r no corte a ninguno de los otros dos lados. ■

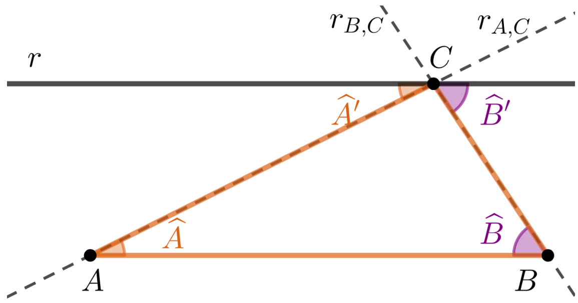
Teorema 5.6 *La suma de los ángulos de un triángulo suman un ángulo llano.*

Demostración: Se puede consultar la Figura 5.6 para una mejor comprensión. Consideremos el triángulo ΔABC y r la recta paralela al lado $[A,B]$ que pasa por el vértice C. Ésta genera dos nuevos ángulos $\widehat{A}'$ (delimitado por r y $[A,C]$) y $\widehat{B}'$ (delimitado por r y $[B,C]$) que completan un ángulo llano junto con $\widehat{C}$. Pero además, $\widehat{A}'$ es el ángulo alterno-interno (ver Definición E.17) de $\widehat{A}$ y $\widehat{B}'$ es el alterno-interno de $\widehat{B}$, de modo que

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A}' + \widehat{B}' + \widehat{C}. \quad ■$$

Figura 5.6

Esquema auxiliar a la demostración del Teorema 5.6 para ver que los ángulos del triángulo suman un ángulo llano (Fuente: Elaboración propia).



COROLARIO 5.6 *Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto u obtuso.*

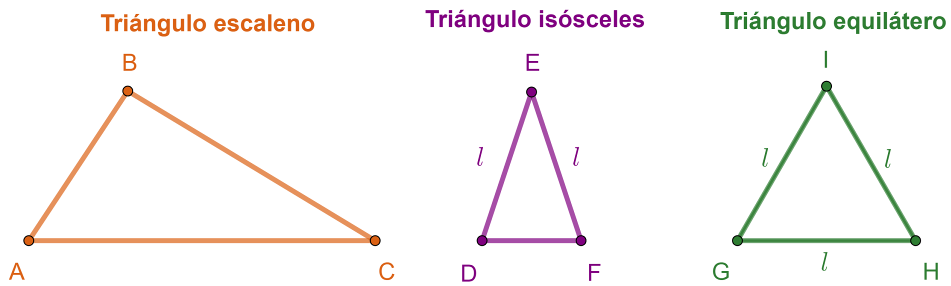
Demostración: Trivial. Dado que con dos rectos se tiene un ángulo llano, al sumar el tercer ángulo del triángulo se entraría en contradicción con el Teorema 5.6. Como los obtusos son mayores a un recto, cualquier combinación recto-obtuso u obtuso-obtuso es igualmente imposible. ■

5.3.1. Clasificación según sus lados.

DEFINICIÓN 5.7 *Un triángulo se dice que es* ***escaleno*** *si no tiene lados congruentes,* ***isósceles*** *si tiene dos lados congruentes o* ***equilátero*** *en caso de tener sus tres lados congruentes.*

Figura 5.7

Los distintos tipos de triángulos en función del número de lados congruentes según la Definición 5.7 (Fuente: Elaboración propia).



TEOREMA 5.7 *Sea ΔABC un triángulo isósceles de lados $[A, C]$ y $[A, B]$ congruentes, consideremos $M = medio[B, C]$ y $s \perp_M r_{B,C}$. Entonces s es eje de simetría del triángulo y se sigue que*

$$\sigma_s(A) = A; \qquad \sigma_s(B) = C; \qquad \sigma_s(C) = B$$

Demostración: Por la condición de ortogonalidad (ver la Definición E.9), s está formada por los puntos equidistantes de B y de C; y como $[A, B]$ y $[A, C]$ son congruentes, entonces A equidista de B y C, por lo cual $A \in s$. Esto implica además que $\sigma_s(A) = A$.

Por otro lado, B y $\sigma_s(B)$ determinan una recta ortogonal a s; pero por la unicidad de la perpendicular que pasa por un punto, esa recta debe ser $r_{B,C}$. Además, por equidistancia y dado que $M \in r_{B,C} \cap s$, sólo puede ser $\sigma_s(B) = C$, concluyendo que $\sigma_s(\Delta ABC) = \Delta ABC$ y que s es eje de simetría. ■

El concepto de "*invarianza*" puede extenderse a cualquier tipo de figura, pero es importante no confundir los conceptos de *invariante* y *congruente*. Dos figuras son congruentes cuando existe una isometría entre dichas figuras, mientras que dos figuras son invariantes cuando admiten una isometría que tiene por imagen a la propia figura.

Corolario 5.7 *Sea ΔABC un triángulo isósceles con $[A, B] = [A, C]$. Entonces los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.*

Corolario 5.8 *Todo triángulo equilátero ΔABC tiene tres ejes de simetría.*

Demostración: Dado que ΔABC tiene todos sus lados congruentes dos a dos, el Teorema 5.7 asegura la existencia de tres ejes de simetría (uno por cada par de lados congruentes) y, por tanto, tres posibles simetrías (consultar la Figura 5.8). ■

Teorema 5.8 *Sea ΔABC un triángulo equilátero. Entonces existe una rotación ρ verificando que $\rho(A) = B$, $\rho(B) = C$ y $\rho(C) = A$.*

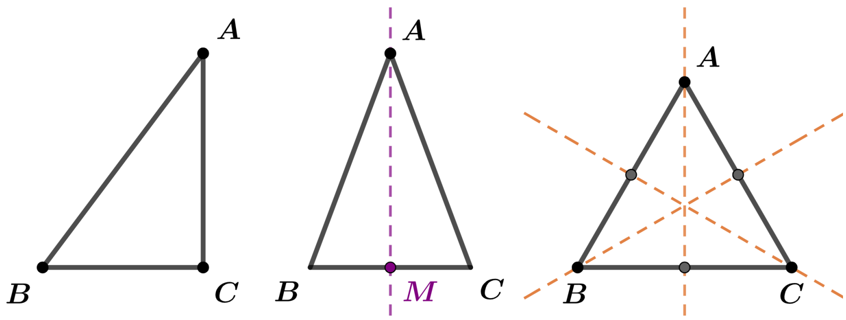
Demostración: Sea σ^A, σ^B y σ^C las reflexiones del Teorema 5.7 que dejan fijos los vértices A, B y C, respectivamente (no confundir con reflexiones centrales). Entonces $\rho = \sigma^C \circ \sigma^A$ verifica que:

$$\rho(A) = \sigma^C\left(\sigma^A(A)\right) = \sigma^C(A) = B;$$
$$\rho(B) = \sigma^C\left(\sigma^A(B)\right) = \sigma^C(C) = C;$$
$$\rho(C) = \sigma^C\left(\sigma^A(C)\right) = \sigma^C(B) = A.$$

El motivo de que ρ sea una rotación es que los ejes de simetría no pueden ser paralelos. Por tanto, dichos ejes se cortan en un punto, que va a ser el centro de rotación (y único punto fijo). ■

Figura 5.8

A la izquierda, un triángulo escaleno sin ejes de simetría. En el centro, un triángulo isósceles mostrando su único eje de simetría. A la derecha, un triángulo equilátero mostrando sus tres ejes de simetría (Fuente: Elaboración propia).



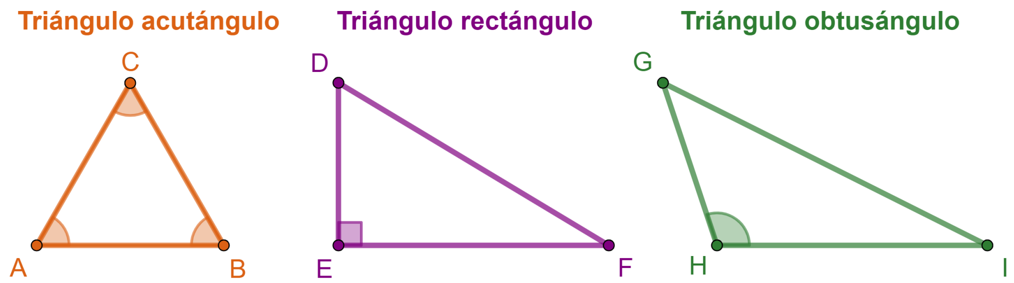
COROLARIO 5.9 *Un triángulo equilátero ΔABC tiene sus tres ángulos son congruentes.*

5.3.2. Clasificación según sus ángulos.

DEFINICIÓN 5.8 *Un triángulo se dice que es **acutángulo** si todos sus ángulos son agudos; esto es, si sólo tiene ángulos menores a un ángulo recto. En cambio, si posee un ángulo recto se dice que es un triángulo **rectángulo**. Por el contrario, se dice que el triángulo es **obtusángulo** si posee un ángulo obtuso; esto es, si tiene un ángulo mayor a un ángulo recto.*

Figura 5.9

Los distintos tipos de triángulos según el tipo de ángulos que contiene (Fuente: Elaboración propia).



5.3.3. Mediana y baricentro.

DEFINICIÓN 5.9 *Sea ΔABC un triángulo. Denominaremos por **mediana** al segmento que une un vértice con el punto medio de su lado opuesto. Así pues, todo triángulo cuenta con tres medianas que las notaremos por*

$$\mu_A = \big[A, medio[B,C]\big]; \qquad \mu_B = \big[B, medio[A,C]\big]; \qquad \mu_C = \big[C, medio[A,B]\big].$$

Aunque la mediana se define como un segmento, es habitual (y un abuso de nomenclatura) referirse a la recta que la contiene también como mediana.

TEOREMA 5.9 *Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto $G \in \Pi$, interior al triángulo. A dicho punto lo denominaremos **baricentro** o **centro de gravedad**.*

Demostración: Sea ΔABC un triángulo cualquiera y consideremos los puntos $X = medio[B,C]$; $Y = medio[A,C]$ y $Z = medio[A,B]$. De este modo podemos escribir las medianas como $\mu_A = [A,X], \mu_B = [B,Y]$ y $\mu_C = [C,Z]$. Veamos que las medianas se cortan dos a dos (consultar la imagen Figura 5.10).

Consideremos la recta $r_{A,X} \supset \mu_A$ y sean Π_1, Π_2 los semiplanos que delimita. Supongamos que $B \in \Pi_1$, de modo que $C \in \Pi_2$ (por cortar μ_A al lado $[B,C]$ en X). Como $A \in r_{A,X}$ y $B \in \Pi_1$, se sigue que $Z \in [A,B] \subset \Pi_1$; pero entonces el segmento $[C,Z]$ posee extremos en semiplanos distintos, cortando forzosamente con $r_{A,X}$. El mismo planteamiento conduce a que $[A, X]$ corta a $r_{C,Z}$; permitiendo concluir que las medianas se cortan dos a dos.

Sean pues $G = [A, X] \cap [C, Z]$ y $G' = [B, Y] \cap [C, Z]$. Para ver que ambos puntos son el mismo se recurre a triángulos semejantes. Consideremos el triángulo ΔBXZ, que es semejante al original con $2d(B, X) = d(B, C)$; entonces ΔGXZ es semejante a ΔACG con $2d(X, Z) = d(A, C)$. Ello conduce a que

$$d(C, G) = 2d(G, Z); \qquad d(A, G) = 2d(G, X). \tag{5.1}$$

El mismo razonamiento se puede aplicar a con G' y ΔAYZ, para llegar a

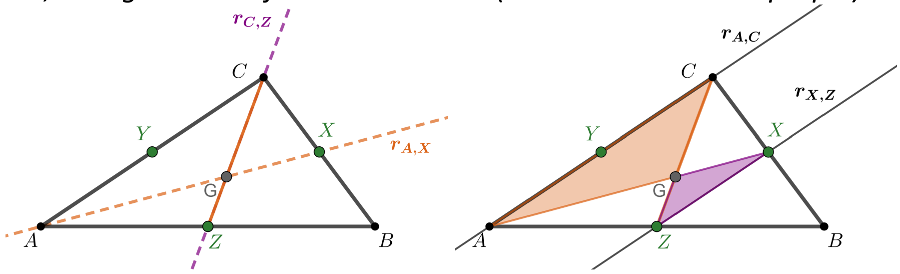
$$d(C, G') = 2d(G', Z), \qquad d(B, G') = 2d(G', Y);$$

de donde se concluye que G y G' son puntos en $[C, Z]$ que distan ambos lo mismo de cada extremo. Es decir, $G = G'$.

Que G caiga siempre en el interior del triángulo es consecuencia directa de la definición de mediana, dado que ésta siempre está en el interior de un ángulo. ■

Figura 5.10

Ilustración auxiliar de la demostración del Teorema 5.9. A la izquierda, elementos que intervienen para demostrar que las medianas se cortan dos a dos. A la derecha, triángulos semejantes en ΔABC (Fuente: Elaboración propia).



Corolario 5.10 *En todo triángulo, la distancia del baricentro a un vértice es el doble que la distancia del baricentro al punto medio del lado opuesto.*

<u>Demostración:</u> Es parte de la demostración del Teorema 5.9. En particular, la conclusión procede de (5.1). ■

5.3.4. Mediatrices y circuncentro.

Definición 5.10 *Dado un segmento $[A, B] \subset \Pi$, se define la **mediatriz** del segmento como la recta ortogonal a $r_{A,B}$ que pasa por $M = medio[A, B]$ y la notaremos por $m_{A,B}$.*

La existencia de la mediatriz está asegurada por el Teorema E.6. Además, su condición de ortogonalidad permite definirla como "*el lugar geométrico formado por puntos del plano que equidistan de los extremos A y B*".

Teorema 5.10 *Las mediatrices de cada lado de un triángulo se cortan en un punto que notaremos por O y que se denomina **circuncentro**.*

Demostración: Sea ΔABC un triángulo cualquiera y sean m_{AB}, m_{AC} y m_{BC} las mediatrices de cada uno de sus lados. Veamos que las mediatrices se cortan dos a dos.

Supongamos que m_{AB} y m_{BC} no se cortaran, entonces tendríamos que $m_{AB} \parallel m_{BC}$. Pero es que además, se tendría que m_{AB} y m_{BC} serían perpendiculares comunes a $r_{A,B}$ y a $r_{B,C}$; es decir, que $r_{A,B} \parallel r_{B,C}$ contradiciendo la condición de triángulo de ΔABC. Por tanto $\exists O = m_{AB} \cap m_{BC}$.

Para ver que las tres mediatrices se cortan en un único punto basta con atender a la definición como lugar geométrico de la mediatriz (véase Teorema E.3); ya por ser O un punto de ambas mediatrices, tendríamos que $d(O,A) = d(O,B) = d(O,C)$. Ello implica que O es, a su vez, equidistante de A y de C, de modo que $O \in m_{A,C}$ y concluyendo la demostración. ■

COROLARIO 5.11 *El circuncentro de un triángulo equidista de sus tres vértices.*

Demostración: Es consecuencia directa de que la mediatriz de un segmento se pueda definir como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento. Por tanto, si ΔABC es el triángulo, entonces $O \in m_{A,B} \cap m_{B,C}$ lo cual supone que $d(O,A) = (O,B)$ además de $d(O,B) = d(O,C)$. ■

5.3.5. Alturas y ortocentro.

DEFINICIÓN 5.11 *Sea ΔABC un triángulo y consideremos para cada lado la recta perpendicular que pasa por el vértice opuesto. Tenemos entonces los siguientes elementos:*

- *A dicha recta la denominaremos **recta altura** y la notaremos por h_V, siendo V el vértice del triángulo por el que pasa. Por ejemplo, para el vértice A y el lado $[B,C]$ notaremos por h_A a su recta altura.*
- *Al punto de corte de la recta altura con la recta que contiene al lado que la define se le denomina **pie de altura** y lo notaremos por $P_{h,V}$; siendo V el vértice por el que pasa. Por ejemplo, para la recta altura h_A y la recta $r_{B,C}$, notaremos por $P_{h,A}$ a su pie de altura; es decir, $P_{h,A} = h_A \cap r_{B,C}$.*
- *Dada una recta de altura, al segmento que va desde su vértice hasta su pie de altura lo denominamos simplemente **altura**. Por ejemplo, para la recta altura h_A tendemos que su altura es $[A, P_{h,A}]$.*

Es habitual encontrarse con abusos de nomenclatura y referirse simplemente por '*altura*' a la recta, al segmento e incluso a la longitud de éste. Generalmente es posible entender a cuál se refiere por el contexto, pero conviene tenerlo en cuenta. También es extrañamente habitual que se refieran a "*la altura*" del triángulo cuando en verdad todo triángulo consta de tres alturas diferentes. Esto suele darse sobre todo para triángulos que se dibujan con uno de sus lados en horizontal y suele referirse a la altura respecto dicho lado.

TEOREMA 5.11 *Sea ΔABC un triángulo. Si sobre uno de sus lados recae un ángulo obtuso, entonces el pie de altura (de la altura respecto dicho lado) cae fuera de dicho lado, y viceversa. Es decir,*

$$P_{h,A} \in [B,C] \iff \widehat{B} \wedge \widehat{C} \text{ son ambos agudos.} \tag{5.2}$$

Demostración: Primero, demostremos que si ambos ángulos de un lado son agudos, entonces el pie de altura recae sobre dicho lado.

Consideremos $l_A \perp_A r_{A,B}$ y $l_B \perp_B r_{A,B}$. Consideremos H_A como el semiplano determinado por l_A que contiene a B y H_B, el semiplano determinado por l_B que contiene a A. Es trivial que $[A,B] = \{A,B\} \cup \Big(r_{A,B} \cap H_A \cap H_B\Big)$.

Ahora bien, por ser $\widehat{A}, \widehat{B}$ agudos (menores que un ángulo recto) se sigue que $C \in H_A \cap H_B$. Dado que h_C se define como ortogonal a $r_{A,B}$, se sigue que $h_C \parallel l_A \parallel l_B$.

TEOREMA 5.12 *Las tres rectas altura de un triángulo se cortan en un punto, denominado* ***ortocentro*** *y que notaremos por $H \in \Pi$.*

Demostración: Sea ΔABC nuestro triángulo y consideremos para cada lado la recta paralela que pasa por su vértice opuesto, tal y como se muestra en la imagen izquierda de la Figura 5.11. Sean:

$$A \in r_1 \parallel r_{B,C}; \qquad B \in r_2 \parallel r_{A,C}; \qquad C \in r_3 \parallel r_{A,B}.$$

Estas rectas nos generan un nuevo triángulo ΔXYZ. Además, por paralelismo y composición de traslaciones, es fácil justificar que

$$C = medio[X,Y]; \qquad B = medio[X,Z]; \qquad A = medio[Y,Z]. \tag{5.3}$$

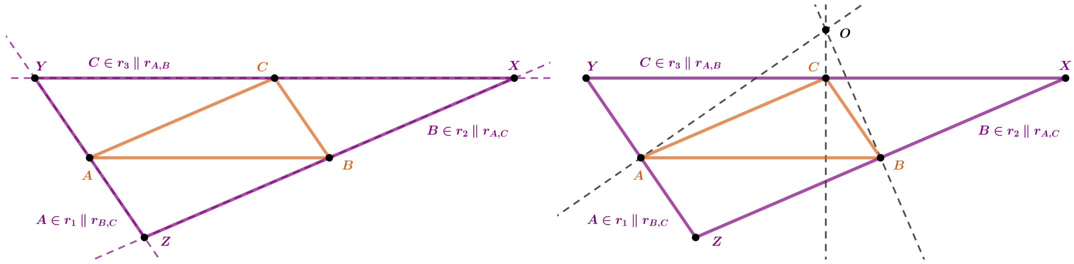
Consideremos mediatrices de ΔXYZ; en particular, consideremos la mediatriz del lado $[Y,Z]$. Éstas son perpendiculares a cada lado y pasan por su punto medio; por tanto, la mediatriz del lado $[Y,Z]$ pasa por A y, análogamente, las demás. Además, como $r_{Y,Z} \parallel r_{B,C}$, se tiene que la mediatriz es perpendicular común a ambas (y análogamente para el resto). Por tanto, se tiene que las mediatrices de ΔXYZ son perpendiculares a los lados de ΔABC y pasan por A, B y C; es decir, las mediatrices de ΔXYZ son las alturas de ΔABC.

Dado que está probado que las mediatrices se cortan en un punto (ver Teorema 5.10), podemos concluir que las tres alturas se cortan en un punto. ■

La condición 5.3 se puede justificar también teniendo en cuenta que ΔXYZ es semejante a ΔABC mediante una simetría central (respecto del baricentro) compuesta con una homotecia de razón 2 respecto del baricentro.

Figura 5.11

Ilustración auxiliar de la demostración del teorema 5.12. A la izquierda, mostrando el triángulo ΔXYZ creado a partir de ΔABC. A la derecha, mostrando el circuncentro de ΔXYZ como ortocentro de ΔABC (Fuente: Elaboración propia).



5.3.6. Bisectrices e incentro.

Teorema 5.13 *Sea $V \in \Pi$ un punto del plano, sean $R, S \in \Pi$ dos puntos equidistantes de V y consideremos $r_{V \vdash R}, s_{V \vdash S}$ las semirrectas con extremo en V que pasan por R y S, respectivamente. Si denominamos $b = m_{R,S}$ a la mediatriz del segmento $[R, S]$, tenemos entonces que σ_b deja invariante el ángulo $\widehat{V} = \angle\{r_{V \vdash R}, s_{V \vdash S}\}$. Al eje de reflexión b lo denominamos **bisectriz del ángulo** $\widehat{V}$.*

Demostración: Consideremos el segmento $[R, S]$ y tracemos su mediatriz b. Ésta será la recta ortogonal al segmento $[R, S]$ pasando por su punto medio y estará formada por los puntos equidistantes a los extremos R y S. Pero por hipótesis, $d(V, R) = d(V, S)$, de modo que $V \in b$ y por ello:

$$\sigma_b(V) = V; \qquad \sigma_b(R) = S; \qquad \sigma_b(S) = R;$$
$$\sigma_b(r_{V \vdash R}) = r_{V \vdash S}; \qquad \sigma_b(r_{V \vdash S}) = r_{V \vdash R}.$$

Quedando probado así que σ_b deja invariante el ángulo. ■

Corolario 5.12 *La bisectriz de un ángulo divide al mismo en dos ángulos congruentes.*

Corolario 5.13 *Sea ΔABC un triángulo isósceles con $[A, B] = [A, C]$. Entonces la mediatriz del lado a coincide con la bisectriz de $\widehat{A}$.*

La bisectriz admite la interpretación del lugar geométrico de puntos que equidistan de las semirrectas de un ángulo (interpretación especialmente útil para la siguiente demostración). Si bien no hemos mencionado las distancias punto-recta, se puede justificar con un pequeño rodeo. Siguiendo con la notación usada, $\forall \varepsilon > 0$ se toman $R_\varepsilon, S_\varepsilon$ en sendas semirrectas con $d(V, R_\varepsilon) = \varepsilon = d(V, S_\varepsilon)$. Cada uno de esos pares de puntos permite construir una bisectriz del ángulo, pero dado que la reflexión respecto un eje es única, todos los pares generan la misma bisectriz.

Teorema 5.14 *Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, al cual denominaremos **incentro** y que notaremos por $I \in \Pi$.*

Demostración: Sea ΔABC un triángulo y sean b_A, b_B las bisectrices de los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$, respectivamente. Sea $I = b_A \cap b_B$, por tanto, I está en la bisectriz del ángulo $\widehat{A}$ y equidista de las rectas $r_{A,B}$ y $r_{A,C}$ por ello. Asimismo, I está en la bisectriz del ángulo $\widehat{B}$ y por ello equidista de $r_{A,B}$ y $r_{B,C}$. Se concluye así que $I \in b_C$ por equidistar de las rectas $r_{A,C}$ y $r_{B,C}$. ■

5.3.7. La recta de Euler.

Proposición 5.3 *Sea ΔABC un triángulo equilátero. Entonces, $G = O = H$; es decir, su baricentro, su circuncentro y su ortocentro coinciden. Además, también coincide su incentro.*

Demostración: Sean el vértice A, el ángulo $\widehat{A}$, el lado $[B,C]$ y consideremos la mediatriz de éste último. Ésta está formada por los puntos que equidistan de B y C; pero como ΔABC es equilátero, $d(A,B) = d(A,C)$, de modo que A está en la mediatriz de $[B,C]$. Por tanto la mediatriz de $[B,C]$ es a su vez la recta altura respecto dicho lado (es perpendicular a él y pasa por el vértice opuesto A), pero también es la mediana respecto del mismo lado (pasa por el punto medio del lado y por A).

Que el incentro coincide con el resto de centros sigue el mismo razonamiento. Por ser los lados $[A,B]$ y $[A,C]$ congruentes, se tiene que la mediatriz de lado $[B,C]$ es la bisectriz del ángulo. ■

Teorema 5.15 *El baricentro G, el circuncentro O y el ortocentro H de cualquier triángulo no equilátero están alineados y, a la recta que los contiene se le denomina **recta de Euler**. Es más, se verifica que $G \in [O,H]$ y $d(G,H) = 2d(G,O)$.*

Demostración: Sea ΔABC un triángulo no equilátero, de centros G, H, O y consideremos el triángulo ΔXYZ que se obtiene como imagen mediante la composición de la reflexión central respecto G con la homotecia de razón 2 desde el mismo centro (al igual que en el Teorema 5.12); composición que notaremos por $\eta_{G,2}$. Por tanto, $\eta_{G,2}(A) = X$; $\eta_{G,2}(B) = Y$ y $\eta_{G,2}(C) = Z$.

Dado que las homotecias mandan rectas en rectas paralelas y los puntos medios de los lados en ΔXYZ son los vértices de ΔABC, tenemos que la homotecia transforma las mediatrices de ΔABC en mediatrices de ΔXYZ. Pero, según la demostración del Teorema 5.12, el ortocentro de ΔABC coincide con el circuncentro de ΔXYZ al coincidir las mediatrices de ΔXYZ con las alturas de ΔABC. Es decir, $H = O_{\Delta XYZ} = \eta_{G,2}(O_{\Delta ABC})$, demostrando que los centros de ΔXYZ están alineados con $G \in [O,H]$. Asimismo,

$$d(G,H) = d\Big(\eta_{G,2}(G), \eta_{G,2}(O)\Big) = 2d(G,O) \tag{5.4}$$

es consecuencia de cómo actúa la homotecia. ■

Corolario 5.14 *Sea ΔABC un triángulo de baricentro G, de circuncentro O y de ortocentro H. Si dos de dichos centros coinciden, entonces coinciden los tres centros y el triángulo es equilátero.*

Demostración: Basta con considerar la relación (5.4) entre los centros y tener en cuenta que $d(O,H) = d(O,G) + d(G,H)$ (por estar alineados) para demostrar que, si coinciden dos centros, coinciden los tres.

Como $G = H$, las medianas coinciden con las alturas, siendo por tanto ortogonales a cada lado. Pero además, $G = O$, de modo que las mediatrices de cada lado pasan por los vértices opuestos, indicando que todos los lados son congruentes y por ello, el triángulo es equilátero. ■

Proposición 5.4 *El incentro de un triángulo pertenece a su recta de Euler si, y sólo si, hay al menos dos lados congruentes.*

5.4. El teorema de Pitágoras.

De manera previa al teorema, mencionaremos brevemente las razones trigonométricas, ya que facilitan conceptos.

Definición 5.12 *Sea ΔABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en $\widehat{A}$. Denominaremos **hipotenusa** al lado opuesto al ángulo recto, mientras que los lados adyacentes los denominaremos **catetos**.*

Teorema 5.16 *Sea ΔABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en $\widehat{A}$. Entonces los catetos miden menos que la hipotenusa.*

Demostración: Sea $X \in r_{A,B}$ el punto que verifica que $A = medio[B,X]$. Dado que $r_{A,C} \perp_A r_{A,B}$ y que A es punto medio entre B y X, tenemos que $d(B,C) = d(B,X)$ por la Definición E.9 y el Teorema E.3. Teniendo en cuenta la desigualdad triangular, se sigue que el cateto $[B,A]$ tiene una longitud menor que la hipotenusa $[B,C]$:

$$2d(B,A) = d(B,X) \leq d(B,C) + d(C,X) = 2d(B,C) \quad \Longrightarrow \quad d(A,B) \leq d(B,C).$$

Con un razonamiento análogo se demuestra que el cateto restante es menor que la hipotenusa y se concluye la demostración. ■

Los conceptos de hipotenusa y catetos se pueden extender a triángulos no rectángulos como el lado de mayor longitud y el resto de lados, respectivamente. En caso de que haya lados congruentes candidatos a hipotenusa (por ejemplo, en un triángulo equilátero) se puede escoger libremente entre cualquiera de dichos lados.

Definición 5.13 *Sea ΔABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en $\widehat{A}$. Dado uno de los ángulos no rectos $\widehat{V}$, definiremos las siguientes razones que denominaremos globalmente como **razones trigonométricas**:*

- *Definiremos el **seno** del ángulo $\widehat{V}$ como la razón del cateto opuesto a dicho ángulo entre la hipotenusa y lo notaremos por $\sin(\widehat{V})$. Esto es,*
$$\sin(\widehat{B}) = \frac{d(A,C)}{d(B,C)}; \qquad \sin(\widehat{C}) = \frac{d(A,B)}{d(B,C)}.$$
- *Definiremos el **coseno** del ángulo $\widehat{V}$ como la razón del cateto contiguo a dicho ángulo entre la hipotenusa y lo notaremos por $\cos(\widehat{V})$. Esto es,*
$$\cos(\widehat{B}) = \frac{d(A,B)}{d(B,C)}; \qquad \cos(\widehat{C}) = \frac{d(A,C)}{d(B,C)}.$$
- *Definiremos la **tangente** del ángulo $\widehat{V}$ como la razón del cateto opuesto entre el cateto contiguo y lo notaremos por $\tan(\widehat{V})$. Esto es,*
$$\tan(\widehat{B}) = \frac{d(A,C)}{d(A,B)}; \qquad \tan(\widehat{C}) = \frac{d(A,B)}{d(A,C)}.$$

TEOREMA 5.17 *Sean ΔABC y ΔXYZ dos triángulos rectángulos con ángulos rectos en $\widehat{A}$ y en $\widehat{X}$, respectivamente. Si los ángulos de dichos triángulos son congruentes, entonces las razones trigonométricas que definen son idénticas. Esto es, las razones trigonométricas dependen del ángulo, no del triángulo.*

TEOREMA 5.18 *Sea ΔABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en $\widehat{A}$. Entonces verifica que*
$$d(A,B)^2 + d(A,C)^2 = d(B,C)^2;$$
es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostración: Sea $P = P_{h,A}$ el pie de altura del lado $[B,C]$ (tenemos que $P \in [B,C]$ por el Teorema 5.11). Éste permite considerar dos nuevos triángulos rectángulos en ΔABC, ΔABP y ΔACP.

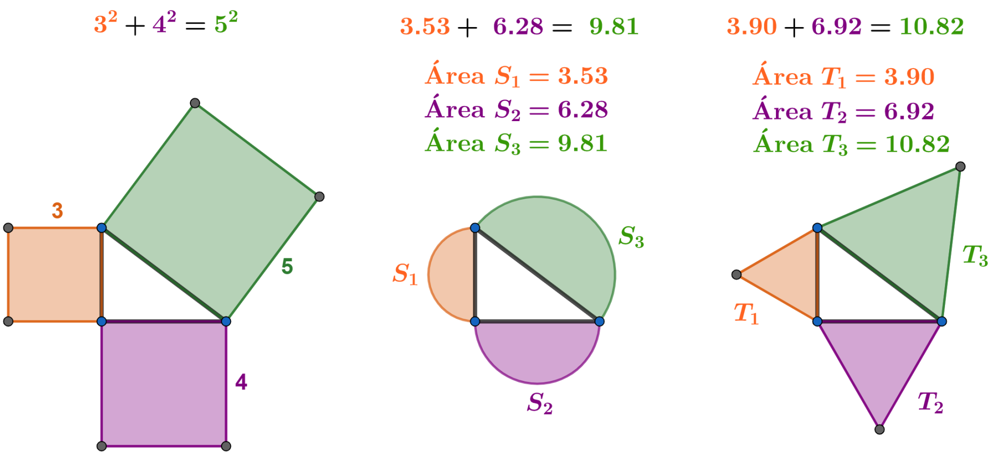
Por tanto, $\widehat{B}$ es un ángulo común en ΔABC y en ΔABP, mientras que $\widehat{C}$ es común en ΔABC y en ΔACP. Así pues,
$$cos(\widehat{B}) = \frac{d(A,B)}{d(B,C)} = \frac{d(B,P)}{d(A,B)} \quad \Longrightarrow \quad d(A,B)\cdot d(A,B) = d(B,C)\cdot d(B,P);$$
$$cos(\widehat{C}) = \frac{d(A,C)}{d(B,C)} = \frac{d(C,P)}{d(A,C)} \quad \Longrightarrow \quad d(A,C)\cdot d(A,C) = d(B,C)\cdot d(C,P).$$

Basta con sumar las identidades de la izquierda teniendo en cuenta que B, C y P están alineados para terminar la demostración:
$$\begin{aligned} d(A,B)^2 + d(A,C)^2 &= d(B,C)\cdot d(B,P) + d(B,C)\cdot d(C,P) = \\ &= d(B,C)\cdot\Big[d(B,P) + d(P,C)\Big] = d(B,C)\cdot d(B,C) = \\ &= d(B,C)^2. \end{aligned}$$
■

El teorema de Pitágoras se interpreta frecuentemente como una relación entre áreas de cuadrados que comparten lado con el triángulo. No obstante, esa relación de áreas es ampliable a otras formas (no cuadradas) siempre y mientras que se mantenga la semejanza entre ellas tal y como se muestra en la Figura 5.12.

Figura 5.12

Ilustración para mostrar que el Teorema 5.18 funciona con áreas de figuras no cuadraras. En los tres casos se tiene un triángulo rectángulo que comparte lados con figuras de distinto tipo (cuadrados, semicírculos y triángulos equiláteros) y en los tres casos se verifica que el área de las figuras ligadas a los catetos suman el área de la figura ligada a la hipotenusa (Fuente: Elaboración propia).



Proposición 5.5 *El recíproco del teorema de Pitágoras es cierto. Es decir, si un triángulo que verifica que un lado al cuadrado es la suma de los cuadrados de los otros dos, entonces dicho triángulo es rectángulo. Además, el ángulo recto se localiza en el vértice de los dos lados sumados.*

Por no ahondar en trigonometría, no se va a demostrar este resultado ya que requeriría extender el contenido relativo a razones trigonométricas, a fórmulas como el Teorema del Coseno, etc.

Teorema 5.19 *Sea ΔABC un triángulo no rectángulo con el lado $[B, C]$ como hipotenusa. Entonces se tiene que:*

i) Si el triángulo es acutángulo, entonces $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 < d(B, C)^2$.

ii) Si el triángulo es obtusángulo, entonces $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 > d(B, C)^2$.

Demostración: Dado que el lado mayor es $[B, C]$, se tiene que el ángulo mayor está en $\widehat{A}$. Ahora bien, al no ser rectángulo el triángulo, $\widehat{A}$ es o bien agudo (y el triángulo es acutángulo) o bien es obtuso (y el triángulo es obtusángulo).

Supongamos que ΔABC es acutángulo, entonces tenemos una situación como el caso 1 de la Figura 5.13. Al considerar la altura desde C del triángulo, tenemos que se forman dos triángulos rectángulos: ΔABP y ΔACP, siendo $P = P_{h,C}$ el pie de altura y el vértice del ángulo recto en ambos. Por tanto,

$$d(B, C)^2 = d(B, P)^2 + d(C, P)^2.$$

Como el lado $[B, P] \subset [A, B]$, se sigue que

$$d(B, C)^2 = \big(d(A, B) - d(A, P)\big)^2 + d(C, P)^2.$$

Asimismo, al ser $[C,P]$ un lado común de ambos triángulos, queda que

$$\begin{aligned} d(B,C)^2 &= \Big(d(A,B) - d(A,P)\Big)^2 + \Big(d(A,C)^2 - d(A,P)^2\Big) \\ &= d(A,B)^2 + \cancel{d(A,P)^2} - 2d(A,B)d(A,P) + d(A,C)^2 - \cancel{d(A,P)^2} \\ &= d(A,B)^2 + d(A,C)^2 - 2d(A,B)d(A,P) \\ &< d(A,B)^2 + d(A,C)^2. \end{aligned}$$

En caso de que ΔABC sea obtusángulo, tenemos una situación como el caso 2 de la Figura 5.13 y sirve un razonamiento análogo. Al considerar la altura desde C del triángulo, tenemos que se forman dos triángulos rectángulos: ΔBCP y ΔACP, siendo $P = P_{h,C}$ el pie de altura y el vértice del ángulo recto en ambos. Por tanto,

$$d(B,C)^2 = d(B,P)^2 + d(C,P)^2.$$

Como el lado $[B,P] \supset [A,B]$, se sigue que

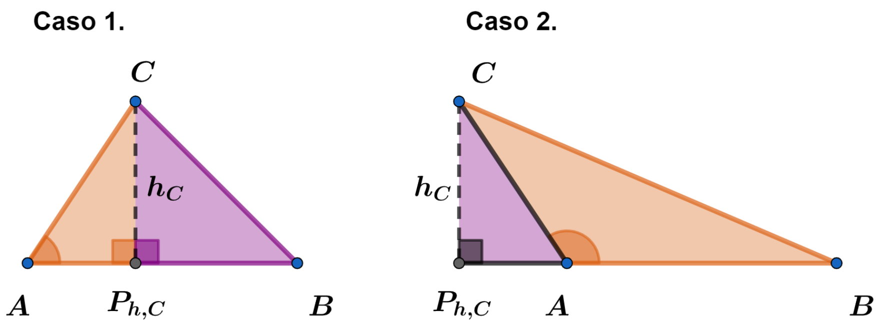
$$d(B,C)^2 = \Big(d(B,A) + d(A,P)\Big)^2 + d(C,P)^2.$$

Asimismo, al ser $[C,P]$ un lado común de ambos triángulos, queda que

$$\begin{aligned} d(B,C)^2 &= \Big(d(A,B) + d(A,P)\Big)^2 + \Big(d(A,C)^2 - d(A,P)^2\Big) \\ &= d(A,B)^2 + \cancel{d(A,P)^2} + 2d(A,B)d(A,P) + d(A,C)^2 - \cancel{d(A,P)^2} \\ &= d(A,B)^2 + d(A,C)^2 + 2d(A,B)d(A,P) \\ &> d(A,B)^2 + d(A,C)^2. \end{aligned}$$ ■

Figura 5.13

Ilustración auxiliar de la demostración del Teorema 5.19. El "caso 1" es de utilidad cuando ΔABC es acutángulo y el "caso 2", en caso de que ΔABC es obtusángulo (Fuente: Elaboración propia).



5.5. Cuadriláteros y paralelogramos.

Definición 5.14 *Sean $A, B, C, D \in \Pi$ cuatro puntos distintos verificando que no están alineados tres a tres. Entonces $\mathcal{C} = \Big\{[A,B],[B,C],[C,D],[D,A]\Big\}$ es un **cuadrilátero** o **tetrágono** y admitiremos la notación $\square ABCD$.*

Proposición 5.6 *Sea $\mathcal{C} = \square ABCD$ un cuadrilátero. Éste es convexo si, y sólo si, sus diagonales se cortan en el interior del cuadrilátero.*

DEFINICIÓN 5.15 *Sea $\mathcal{C} = \square ABCD$ un cuadrilátero. Diremos que $\square ABCD$ es un* ***paralelogramo*** *si verifica que sus diagonales se cortan en sus puntos medios; esto es, si*

$$medio[A, C] = medio[B, D].$$

COROLARIO 5.15 *Sea $\mathcal{C} = \square ABCD$ un paralelogramo del plano. Entonces se verifica que:*

i) Admite una simetría mediante una reflexión central con centro en el punto de corte de sus diagonales.

ii) Los lados no adyacentes (u opuestos) son paralelos y de la misma longitud.

TEOREMA 5.20 *Sea $\mathcal{C} = \square ABCD$ un cuadrilátero y sean $P, Q, R, S \in \Pi$ los puntos medios de cada lado. Entonces $\square PQRS$ forma un paralelogramo.*

DEFINICIÓN 5.16 *Sea $\mathcal{C} = \square ABCD$ un cuadrilátero. Se distinguen los siguientes casos:*

- *Si $\square ABCD$ es paralelogramo, puede ocurrir que:*
  - *Todos sus ángulos sean congruentes y todos sus lados sean congruentes. En ese caso, diremos que $\mathcal{C} = \square ABCD$ es un* ***cuadrado****.*
  - *Todos sus ángulos sean congruentes, pero que tenga lados no congruentes. En ese caso, diremos que $\mathcal{C} = \square ABCD$ es un* ***rectángulo****.*
  - *Todos sus lados sean congruentes, pero que tenga ángulos no congruentes. En ese caso, diremos que $\mathcal{C} = \square ABCD$ es un* ***rombo****.*
  - *Tiene lados opuestos congruentes y ángulos opuestos congruentes. En ese caso, diremos que $\mathcal{C} = \square ABCD$ es un* ***romboide****.*
- *Si $\square ABCD$ no es paralelogramo, puede ocurrir que:*
  - *Haya un par de lados opuestos paralelos y otro par de lados opuestos no paralelos. En ese caso, diremos que $\mathcal{C} = \square ABCD$ es un* ***trapecio****.*
  - *No haya lados paralelos. En ese caso, diremos que $\mathcal{C} = \square ABCD$ es un* ***trapezoide****.*

PROPOSICIÓN 5.7 *Dado $\mathcal{C} = \square ABCD$ un cuadrilátero, se tiene que:*

i) Si $\square ABCD$ es un cuadrado o un rectángulo, entonces todos sus ángulos son rectos.

ii) Si $\square ABCD$ es un rectángulo, entonces sus lados opuestos son congruentes entre sí.

iii) Si $\square ABCD$ es un rombo o un romboide, los ángulos opuestos son congruentes entre sí.

Capítulo 6

Artículos sobre enseñanza y aprendizaje.

Este capítulo está enfocado a la búsqueda y análisis de artículos relacionados con la Didáctica, principalmente enfocada en el área Didáctica Matemática. Se han seleccionado los siguientes artículos:

1. "*Formative transcendence of flipped learning in mathematics students of secondary education*" de López Belmonte et al. (2019).
2. "*Geometry with a STEM and gamification approach: A didactic experience in Secondary Education*" de Moral Sánchez, 2022.

Si bien es habitual que los artículos a incluir sean específicos del área a la que se enfocará posteriormente el siguiente capítulo, en este caso el primero de ellos no es intrínseco al área de la geometría. Considero que esto no es inconveniente alguno dado que la realidad es que, como docentes, tendremos que atender también a la enseñanza y aprendizaje de la matemática general, sin pensar en los conocimientos matemáticos como conocimientos estanco separados del resto de ramas de la matemática o del resto del currículo docente.

6.1. El aprendizaje invertido en matemáticas.

De manera sobresimplificada, el *aprendizaje invertido* consiste en una metodología didáctica con la llamativa característica de hacer que el alumnado revise teoría y explicaciones en casa para dedicar las horas presenciales a trabajar los conceptos. Este artículo reivindica el potencial de esta metodología cuando se complementa con la tecnología educativa, haciendo una revisión de la literatura previa existente y planteando un experimento para analizar la eficacia de dicho método pedagógico a la vez que incorpora una nueva variable al experimento. Las condiciones del experimento no van a ser la cuestión central a abordar, pero sí que se describirán los aspectos más esenciales sobre el mismo.

6.1.1. Justificación y revisión bibliográfica.

Los autores señalan que la transformación de la enseñanza (motivada por el avance tecnológico) suele ser demasiado lenta, produciendo una mala adaptación a su contexto en el aula. Una innovación pedagógica vanguardista adecuada para subsanarla es el aprendizaje invertido (Sánchez Rivas et al., 2019). Entre las características del aprendizaje invertido destacan:

- las TIC o *Tecnologías de la Información y Comunicación* (Pozo Sánchez et al., 2019).
- la inversión de los roles tradicionales del proceso de aprendizaje (Froehlich, 2018).
- la posición del alumnado con un rol activo y protagonista (Zainuddin et al., 2019).

A pesar de su origen como medida para la educación no presencial, el aprendizaje invertido actualmente se considera un proceso dual en el sentido de no relegar todo a una enseñanza online. La enseñanza presencial se mantiene en el aprendizaje invertido, pero es reenfocada de modo que el profesor deja de tener el rol protagonista y se encarga de ser guía y orientador del proceso de enseñanza, así como creador del material educativo audiovisual (Jensen et al., 2018). También deben ser reenfocadas las acciones rutinarias del día a día (Ahmed, 2016); el alumnado debería contar con una plataforma VLE ('Virtual Learning Environment') y debe ir al aula con los contenidos ya revisados por su cuenta (usando el material proporcionado por el profesor, contando con tutorización y demás), permitiendo así un mejor uso del espacio presencial.

Por otro lado, las sesiones presenciales deben complementar el contenido revisado con actividades participativas y dinámicas de trabajo colectivo. Ello no sólo permite dedicar un mayor tiempo a la práctica de los conceptos, sino que mejora la participación y la colaboración entre los involucrados. Como además coloca al alumnado en un rol protagonista y activo, éste evoluciona favorablemente en aspectos como la resolución de problemas, la autonomía, la planificación y toma de decisiones, etc (Tourón & Santiago, 2015).

En resumen, la literatura revisada por los autores sobre el 'flipped learning' lo señala como un enfoque fundamental para una buena acción educativa basada en el uso tecnopedagógico de las TIC, teniendo en cuenta características de la educación actual y generando experiencias de aprendizaje únicas e innovadoras. La revisión bibliográfica para la educación matemática conduce, esencialmente, a una recapitulación similar. Encuentran que es más efectivo el aprendizaje matemático mediante contenido multimedia (McGivney Burelle y Xue, 2013; Talbert, 2014), adquieren mejor actitud (Love et al., 2014), mejor autoregulación y logro de aprendizaje (Lai & Hwang, 2016), mejor uso del tiempo (Lo et al., 2017), mejor colaboración con iguales y mejor adaptación a sus necesidades (Muir & Geiger, 2015).

6.1.2. El experimento.

Respecto al contenido original del artículo, los autores se centran en el aprendizaje en Matemáticas, considerándola “un área en la cual la inclusión de prácticas innovadoras es esencial” y para la cual “el éxito formativo recae en el uso de la innovación como punto de partida para nuevas experiencias educativas en Matemáticas, redefiniendo la enseñanza y el aprendizaje” (López Belmonte et al., 2019, pág. 2). Es por ello que analizan experimentalmente la eficacia del aprendizaje invertido.

Para analizar la efectividad del aprendizaje invertido frente a la praxis tradicional, el experimento plantea las siguiente siete preguntas de investigación numeradas (o RQ, de ‘*Research Question*’):

RQ$_1$ ¿La modalidad instruccional incluye la motivación, la autonomía, la colaboración, la participación, la resolución de problemas y el tiempo en clase?

RQ$_2$ ¿La modalidad instruccional incluye el conocimiento del lenguaje científico y los conceptos matemáticos?

RQ$_3$ ¿La modalidad instruccional afecta al uso de datos y procesos científicos?

RQ$_4$ ¿La modalidad instruccional influye en el análisis y representación de gráficos?

RQ$_5$ ¿La modalidad instruccional afecta la interpretación y reflexión de resultados?

RQ$_6$ ¿La modalidad instruccional afecta a la toma de decisiones de los estudiantes?

RQ$_7$ ¿La modalidad instruccional incluye la calificación obtenida en pruebas de evaluación?

La RQ$_1$ está enfocada a analizar y valorar aspectos actitudinales y se desglosa en seis variables (´*Motivación*‘, ‘*Autonomía*’, ‘*Colaboración*’, ‘*Participación*’, ‘*Resolución de problemas*’ y ‘*Tiempo en clase*’). Las RQ$_2$ a RQ$_7$, en su lugar, están enfocadas a analizar y valorar aspectos matemáticos y cada pregunta procura una única variable (‘*Conceptos y lenguaje*’, ‘*Datos y procesos*’, ‘*Análisis gráfico*’, ‘*Interpretación de resultados*’, ‘*Toma de decisiones*’ y ‘*Calificaciones de examen*’).

El experimento se llevó a cabo con 60 alumnos de 4º de ESO de un centro en Ceuta (España), aleatoriamente separados en dos grupos de 30 alumnos: uno haría de grupo de control con la enseñanza tradicional y otro haría de grupo experimental con la metodología de aprendizaje invertido. Ambos grupos tuvieron un profesor común para la asignatura de matemáticas, quien formaba parte del equipo de investigación y quien se encargó de adaptar clases y contenidos para cada grupo de estudio. El temario abarcado estaba relacionado con la estadística, la representación gráfica y la resolución de problemas y se estructuró como se muestra en la Tabla 6.1

Tabla 6.1

Distribución de las sesiones y objetivos didácticos trabajados (Fuente: López Belmonte et al., 2019, pp. 5-6; Elaboración propia).

Sesiones 1 y 2	Sesiones 3 y 4	Sesiones 5 a 8
Conocer lenguaje científico y conceptos estadísticos.	Entender principios fundamentales del procesamiento de datos y de procesos científicos.	Adquirir habilidades de análisis estadístico y de representación gráfica.
Sesiones 7 a 10	**Sesiones 11 y 12**	**Sesión de evaluación**
Asimilar habilidades de interpretación y reflejo de resultados.	Desarrollar habilidades para toma de decisiones correctas.	Poner a prueba los conocimientos y habilidades adquiridas.

Así pues, se trata como grupo de variables independientes las relacionadas con la *metodología* y como grupo de variables dependientes las relacionadas con la *efectividad*. Los datos a evaluar se recogen mediante un cuestionario *ad hoc* con 42 items, los cuales se organizan en tres dimensiones (una dimensión '*socioeducacional*', otra '*actitudinal*' y otra '*matemática*') que se evalúan tanto cualitativa como cuantitativamente.

6.1.3. Resultados y conclusiones de la investigación.

El análisis de los datos recogidos muestra que el grupo de control (con metodología tradicional) obtiene puntuaciones muy bajas en las dimensiones actitudinal y matemática. Todas las variables puntúan por debajo del valor central, incluso aquellas con mayores puntuaciones ('*Tiempo en clase*', '*Resolución de problemas* y '*Calificaciones de examen*'). El grupo experimental (con aprendizaje invertido), en cambio, supera el valor central en once de las doce variables que componen el experimento, siendo '*Conceptos y lenguaje*' la única que no sobrepasó el valor central (pero con una puntuación muy próxima a éste). Las mayores diferencias entre ambos grupos se dan en las variables '*Análisis gráfico*', '*Datos y procesos*' e '*Interpretación de resultados*'.

En suma, el experimento respalda el aprendizaje invertido como una mejor metodología para Matemáticas que la tradicional, con sólo una de las variables de la dimensión matemática sin sobrepasar el valor central. No obstante, por más que el experimento dé lugar a resultados prometedores y consistentes con los resultados de experimentos previos, no es posible concluir una mejora sustancial de las calificaciones con motivo de esta nueva metodología. Ello se debe a que al analizar los datos obtenidos con un test T de Student éste arroja que las diferencias en las calificaciones no son estadísticamente significativas. Por el mismo motivo, tampoco se puede afirmar una mejora debido a la metodología en las variables *Resolución de problemas*, *Tiempo en clase*, ni en *Conceptos y lenguaje*.

Asimismo, los propios autores señalan dos premisas que determinarán en gran medida los resultados obtenidos en la puesta en práctica: las características de los estudiantes y su etapa educativa (López Belmonte et al., 2019, pág. 3).

6.2. Geometría con un enfoque STEM y gamificación.

Al igual que en López Belmonte et al. (2019), la autora señala la necesidad de transformar el sistema educativo actual, introduciendo metodologías activas complementadas por las TIC y secuencias didácticas interdisciplinares. En particular, aborda el enfoque STEM para la geometría junto a la gamificación. Además, a lo largo del documento se pueden discernir una amplia variedad de herramientas y de metodologías: desde material tangible y manipulativo hasta herramientas de VR –o '*Virtual Reality*', las tecnologías o dispositivos que permiten la inmersión del usuario en un entorno plenamente digital y aislado de su entorno físico– y de AR –o '*Aumented Reality*', las tecnologías y dispositivos que permiten la inserción de elementos digitales en el mundo físico simulando su existencia y enriqueciendo la percepción del mundo real–; desde aprendizaje cooperativo a aprendizaje invertido, etc.

6.2.1. Justificación y revisión bibliográfica.

El enfoque STEM en una secuencia didáctica busca proporcionar un proceso interdisciplinar e integrado de aprendizaje y una formación para que los estudiantes adquieran habilidades que les ayuden a enfrentar los desafíos actuales (Maass et al., 2019). Además, las TIC son consideradas una oportunidad para cambiar los modelos de enseñanza tradicionales, así como vías para conectar el aprendizaje a los intereses de los estudiantes (Ibili, 2019). El uso de ciertas tecnologías como la VR puede no parecer fácilmente alcanzable, pero apunta a la posibilidad de sustituirlas con técnicas de *m-learning* (o '*mobile learning*') y AR, de manera que no se requiera un ordenador, dado que basta con un smartphone y códigos QR (Joo-Nagata et al., 2017). No obstante, señala que está probado que las herramientas de VR son eficaces para el entrenamiento geométrico y mejorar las habilidades de visión espacial (Rodríguez et al., 2019), ya que permite al alumnado aprender de sus errores en un entorno controlado, dándoles autonomía en la construcción de su propio aprendizaje.

Respecto a las redes sociales, se comenta la predisposición de los discentes a usarlas y plantea la posibilidad de incluirlas en el proceso de enseñanza con un enfoque contructivista junto a las herramientas mencionadas previamente (Vera Espinoza & Yáñez Rodríguez, 2021).

Una extensa revisión bibliográfica avala la acción a desarrollar más adelante. En la bibliografía se incluyen diversos estudios sobre los beneficios experimentalmente contrastados de la gamificación en procesos STEM (mejor motivación, alenta la participación, socialización de grupo, etc.), posibles variables o categorías que están involucradas en la gamificación (varían según qué bibliografía se revise, pero se pueden destacar aspectos como la motivación, cohesión grupal, rendimiento académico, actitud, emociones y participación) y otras cuestiones. Entre los resultados más destacables para este trabajo que son mencionados están aquellos que muestran cómo la gamificación con un enfoque STEM mejora la actitud hacia las matemáticas dado que el alumnado desarrolla interés, se incita la creatividad y se corrige el miedo al error, transformándolo en una oportunidad de fortalecimiento y apartando la sensación de fracaso (Gairín Sallán & Fernández Amigo, 2010).

6.2.2. Bases de la gamificación.

La gamificación educativa consiste en usar juegos o elementos de juegos en situaciones no lúdicas, dirigidos a un objetivo didáctico. Según Werbach y Hunter (2012), los elementos de la gamificación se organizan jerárquicamente en un modelo piramidal interconectado. Así pues, elementos como avatares, medallas, puntos y similares conforman la base de la pirámide; las mecánicas de desafíos, recompensas y demás conforman el medio; y finalmente, en la cúspide está la narrativa, el progreso, las emociones que se pretenden suscitar y las relaciones entre los participantes en el proceso de juego.

Como estrategias de gamificación se puede recurrir a metodologías como GBL (o '*Game Based Learning'*), juegos serios (aquellos diseñados con un propósito educativo, pero no como entretenimiento; muy útiles para el desarrollo de habilidades específicas) o los Breakout EDU (gamificación basada en la resolución de enigmas o pruebas mediante la colaboración por parte de un grupo de iguales con la finalidad de alcanzar una meta o realizar una misión).

Se señala a su vez la importancia de desarrollar una estructura de aspectos cooperativos que permita el aprendizaje del alumnado independientemente de su nivel inicial (Silva et al., 2021), para que influyan así positivamente en su aprendizaje y desarrollo de habilidades sociales. Los logros de aprendizaje deben ser desafiantes como para que el alumnado requiera la cooperación. También se recalca la importancia de lograr una motivación intrínseca en el alumnado (Skaalvik et al., 2015), que se consiga interés en la actividad por el placer de la propia actividad sin recurrir a motivaciones extrínsecas (como recompensas o premios). Va a ser esa consecución la que se traduzca en confianza en las habilidades propias, esfuerzo, persistencia y demás características positivas a las que se enfocan estas metodologías innovadoras.

Estas mecánicas, llevadas al aula, requieren disponer de tiempo para su ejecución, de modo que es imperativo la implementación de mecánicas como el aprendizaje invertido o el *m-learning*.

6.2.3. El experimento.

Como se adelantaba, se trata de un experimento de larga actuación que se desarrolla durante 2 cursos académicos consecutivos (que se traducen en dos ciclos de acción investigadora) en los cuales se diseñan y aplican 12 sesiones con enfoque STEM y gamificación por curso. Fue diseñado bajo una metodología experimental de investigación-acción con dos ciclos de cuatro fases (‘*exploración y observación*’, ‘*diagnóstico y planificación*’, ‘*acción*’ y ‘*evaluación de la intervención*’) con el objetivo de desarrollar una propuesta didáctica con gamificación y enfoque STEM, para posteriormente implementarlo y medir su eficacia e impacto.

Las preguntas de la investigación (o RQ, de ‘*Research Question*’) son las que siguen a continuación:

RQ$_1$ ¿Se mejora el rendimiento académico mediante el uso de una propuesta didáctica STEM matemática respaldada por la plataforma educativa Classcraft y metodologías activas?

RQ$_2$ ¿El uso de las TIC respaldado por una propuesta didáctica gamificada conduce a un aumento en la motivación y participación de los estudiantes?

RQ$_3$ ¿Una propuesta didáctica STEM gamificada respaldada por el aprendizaje cooperativo mejora la cohesión grupal de los estudiantes?

El experimento se lleva a cabo en el centro Escuela Secundaria Juan de la Cierva en Vélez-Málaga, durante dos cursos académicos con los mismos estudiantes (salvo por un par de incorporaciones); cursando inicialmente 2º de ESO y, posteriormente, 3º de ESO. El grupo, conformado por 28 discentes (posteriormente 30), está descrito en la sección 2.2 del artículo (consultar Moral Sánchez, 2022, pág. 5).

Inicialmente se observó al grupo experimental en 2º de ESO, concluyendo la desmotivación general de los discentes, así como dificultades significativas de aprendizaje usando una metodología tradicional. Se pasó a la fase de diseño de la propuesta STEM gamificada, con aprendizaje invertido y trabajo colaborativo. En el primer ciclo del experimento, la gamificación se llevó a cabo mediante la plataforma educativa “*Edmodo*”, respaldada por otros elementos como el programa de ejercicios “*Matemático*”. Tras un análisis para el rediseño de la propuesta, así como de ventajas y desventajas de la plataforma, se optó en cambiar para el segundo ciclo por la plataforma Classcraft, junto con dos equipos de VR para trabajar con la herramienta “*NeoTrie VR*” (esto conllevaba la subdivisión de la clase en dos grupos de 10 y 20 discentes para la VR y material manipulativo tradicional, respectivamente). A su vez, los alumnos que trabajaban con el material tradicional eran acomodados en grupos cooperativos de cinco personas; con roles asignados en función de las observaciones respecto al comportamiento de los estudiantes en el primer ciclo.

La descripción detallada de las sesiones puede encontrarse en el artículo (Moral Sánchez, 2022, Tabla 3, pp. 11-14); donde se detallan los objetivos de la sesión, de las tareas o desafíos propuestos al alumnado, los elementos involucrados, etc. Algunas de las actividades gamificadas son:

- *Edmodo*: Que permitía asignar medallas al alumnado por las tareas enviadas.
- *Classcraft*: Los alumnos adquieren avatares con '*Puntos de Salud*', '*Puntos de Habilidad*', '*Puntos de Experiencia*' y '*Piezas de Oro*' que van variando en función de su desarrollo académico y que pueden intercambiar por recompensas.
- *Puntuaciones*: Llevadas a cabo mediante un proceso de cartas gamificadas (con imágenes, descripciones, poderes, …) que podrían usar en las sesiones de clase.
- *Tangram*: Como material manipulativo para demostraciones mediante puzzles de teoremas geométricos.
- *Gymkana matemática*: Como sesión de afianzamiento de los conceptos. Se realizó fuera del centro escolar y con un enfoque interdisciplinar (involucrando arte, geografía e historia).
- *Kahoot!*: Plataforma que permite la elaboración de cuestionarios y tareas gamificadas a la vez que posibilita la recopilación de datos y estadísticas.

Como método de recolección de información se usaba tanto la observación directa de la profesora-investigadora, la información recogida de las plataforma educativa *Classcraft*, estadísticas de sesiones gamificadas con "*Kahoot!*" (sesión 11 del 2º ciclo de investigación), análisis de documentos con comentarios e ideas del alumnado, actividades (tanto individuales como colectivas) asignadas y un cuestionario (disponible en Moral Sánchez, 2022, pág. 34).

6.2.4. Resultados y conclusiones de la investigación.

La sección comienza con el análisis de la experiencia que ha supuesto el segundo ciclo de actuación de la investigación, dejando el primer ciclo principalmente para la comparativa de los datos. Entre las conclusiones cualitativas, la autora destaca la implicación del alumnado con la plataforma 'Classcraft', la participación activa en tareas y el uso de la red social '*Twitter*' con finalidad pedagógica matemática como parte del segundo desafío (alcanzando los 102 '*tweets*' con más de 300 '*likes*' y '*retweets*', ver Moral Sánchez, 2022, pág. 20).

Los datos de las plataformas Edmodo y 'Classcraft' son comparados, tanto individualmente para cada discente como grupalmente. Se tiene que ambas plataformas fomentaron la participación, siendo 'Classcraft' la más destacada para la mayoría de ellos (salvo por un par de casos que trabajaron mejor con la plataforma Edmodo). A nivel grupal, ambas tienen variaciones similares en sus datos y valores mínimos casi idénticos, con la diferencia de que la plataforma 'Classcraft' recoge valores máximos que son mayores con respecto a los de la otra plataforma.

También son analizados los datos de 'Kahoot!' (usado para la sesión 11 del segundo ciclo). Las estadísticas muestran que el 78 % de los estudiantes o grupos acertó más de la mitad de las preguntas, el 11 % acertaron exactamente la mitad de las preguntas y sólo el 11 % restante se quedó por debajo de la mitad (con 7 y 8 aciertos de 20, respectivamente). Además, la temática de las preguntas muestra que aunque sólo el 33 % respondieron correctamente las preguntas que involucraban cálculos, más del 80 % respondieron adecuadamente tanto las preguntas relacionadas con poliedros truncados, como las relativas con ejes de rotación.

Por último, el cuestionario final del segundo ciclo de acción investigadora, consta de 12 enunciados (disponibles en Moral Sánchez, 2022, Tabla 6 y Tabla 8, pp. 24-25), estructurados en 4 niveles de la escala Likert. En todos los ítems de la encuesta se obtienen valores de media extraordinariamente altas (los más bajos puntúan 3.26 y 3.36 sobre 4) con desviaciones aceptables (entre 0.40 y 0.77).

Como conclusiones de la investigación, se observa que la acción académica ha sufrido una mejora con el diseño STEM gamificado, tanto en calificaciones como en el resto de variables consideradas; conduciendo a un progreso favorable de las habilidades visuoespaciales, coordinación, creatividad, conocimiento y análisis del entorno. También supuso una clara mejora del uso del tiempo en clase y que el alumnado pase a concebir el error como parte del aprendizaje. Es igualmente concluyente el rol motivador de las TIC en la propuesta didáctica gamificada y su efecto reduciendo el absentismo por completo (únicamente faltaron de manera aislada dos alumnos por motivos médicos). Respecto a la cohesión de grupo, también se concluye una mejora por la experiencia STEM gamificada acompañada con técnicas de trabajo colaborativo que, además, conducía a una experiencia didáctica mejorada. Por tanto, todas las preguntas de la investigación quedan resueltas con una conclusión favorable.

En un trabajo de autocrítica y futuras revisiones, la autora señala una serie de factores que han podido limitar el estudio y que conviene tener en cuenta a la hora de interpretar los resultados o replicarlos. Entre dichas cuestiones se señalan:

- Posible pérdida de objetividad por su rol de profesora-investigadora (y estar por ello demasiado involucrada). Aunque lo considera compensado con la revisión de investigadores externos.
- El estudio está muy centrado en la percepción subjetiva del alumnado.
- El hecho de ser un único grupo se traduce en la ausencia de un grupo de control que desarrollar y analizar en paralelo.
- La limitación en equipo de VR (sólo dos unidades de dicho equipamiento).
- Cuestiones relativas al uso de herramientas digitales de manera prolongada.

6.3. Conclusiones propias.

Ambos artículos ofrecen una perspectiva interesante y prometedora respecto a la inclusión de metodologías que sean una alternativa efectiva a la tradicional clase magistral en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

A pesar de que el artículo de López Belmonte et al. (2019) sobre aprendizaje invertido concluye que su experimento ha sido insuficiente para determinar una mejora sustancial de cuatro de las doce variables consideradas (dos variables sobre cuestiones actitudinales y otras dos sobre cuestiones matemáticas, ver Subsección 6.1.3), sí que concluye una mejora del resto de variables debido a la nueva metodología. Ello puede dar pie a mejorar y prestar mayor atención a aspectos esenciales como la actitud del alumnado hacia el trabajo y hacia las matemáticas.

No obstante, de cara a su implementación conviene ser precavidos. Es importante tener en cuenta que el alumnado sigue en desarrollo y es sensible a muchos aspectos (incluidos aspectos externos) que pueden influir igualmente en su disposición al trabajo y la asignatura o afectar a los resultados. Por ejemplo, es posible que el alumnado responda bien inicialmente ante el aprendizaje invertido por ser una novedad para ellos, pero que si la metodología se mantuviera más en el tiempo pasara a tener un impacto más sutil y la disposición del alumnado volviera a ser menos positiva.

También me parece muy importante que el aprendizaje invertido tenga una implementación paulatina y se procure con un contenido asequible para el alumnado. Tengamos en cuenta que los aspectos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje no son de incorporación o efecto inmediato, por tanto no se puede pretender que los discentes aprendan a ser plenamente autónomos de una sesión a otra. Es conveniente disponer el terreno a una respuesta favorable; por ejemplo, introduciendo la mecánica en sesiones inicialmente más sencillas para que se vean capaces, intentando que la siguiente sesión sea más dinámica o llamativa, dándole un valor explícito a su logro, etc.

Respecto al artículo de Moral Sánchez (2022), éste me deja claro que la gamificación y el enfoque STEM son grandes recursos complementarios al aprendizaje invertido, aunque me parece que pueden ser más difíciles de implementar.

Más allá de las limitaciones de dicha investigación (falta de un grupo de control, sesiones reducidas por curso, etc.) he echado en falta la mención de ciertos comentarios cruciales a mi parecer. El primero de ellos es sobre las bases de la gamificación (Subsección 6.2.2); se menciona la necesidad de que el logro de aprendizaje deba ser desafiante, pero sin señalar que no debe llegar a ser excesivamente desafiante o la frustración puede tornarse contraproducente. El segundo de los comentarios está relacionado con el recurso temporal; se pone poco de manifiesto la inmensa cantidad de tiempo que requiere la implementación de un diseño como el presentado en el artículo. El último comentario que echo en falta es sobre las diferencias de las perspectivas entre el docente y el alumnado; la gamificación debe ser un punto de unión entre el objetivo educativo y el lúdico, de modo que para hacerlo atractivo al alumnado hay que tener en cuenta sus gustos e intereses.

De cara a la práctica, considero que ambas metodologías que pueden hacer una complementación muy buena y que su naturaleza dinámica permite con ambas una buena adaptación a los distintos grupos de alumnado que se puedan dar. Además, pienso que es posible compaginarlo con una mejor atención afectiva y potenciando la autoreflexión, de modo que serán metodologías implementadas en la UD del Capítulo 7.

Capítulo 7

Proyección didáctica y elaboración de una unidad.

Esta sección tiene como finalidad la elaboración de una Unidad Didáctica (en adelante 'UD') compatible con la asignatura de Matemáticas en 1º de ESO, la cual recordamos que es una asignatura obligatoria según el *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*.

Si bien las situaciones de aprendizaje están ya contempladas en el RD 217/2022 y teóricamente dispuestas para los cursos impares en el curso académico 22/23, los Capítulos 3 y 4 ponen de manifiesto que aún no hay una estandarización plena sobre las mismas (ver Subsección 4.1.2). Ello supone una dificultad extra para su diseño, defensa y evaluación, por lo que se ha optado por diseñar una UD en su lugar dado que siguen siendo igualmente cruciales y requieren de una delicada elaboración.

Todo el contenido que se contempla en la UD está formalmente sustentado en el Capítulo 5 y su Anexo E. A su vez, las metodologías de aprendizaje invertido y gamificación del Capítulo 6 van a estar presentes en la UD al haberse determinado que son prometedoras.

7.1. Título y justificación.

La UD ha sido nombrada como '*Introducción a la geometría clásica*' y es una reelaboración de lo que algunos libros de texto denominan simplemente '*Figuras geométricas*' o '*Figuras planas*'. Si bien no se pretende revolucionar el sistema, reinventar la rueda, ni nada por el estilo, sí que se pretende cambiar (dentro de lo razonable y plausible) el modo y el objetivo utilizado en dichos libros de texto. Es por ello que he optado por dicho título:

- La palabra ‘introducción’ está escogida con la intención de dar a entender que dicha UD sería sólo un inicio en un área en la que hay mucho que se puede alcanzar y en la que aún se requiere de pocos conocimientos previos. Evidentemente, ello por sí mismo no es aliciente ninguno para el alumnado, pero sí que puede servir para despertar la chispa de la curiosidad en algún caso.
- Presentar a la geometría con nombres y apellidos (‘*geometría clásica*’) tiene también intencionalidad. La principal es que deduzcan que hay más formas de entender y trabajar la geometría (geometría analítica, topología, geometría diferencial …), pero también para establecer una clara relación con áreas como la historia o el arte. Esta relación puede ser bidireccional, de modo que quienes tengan interés en aspectos históricos no vea la UD como algo completamente separado de sus intereses; así como que el alumnado interesado en la asignatura pueda atisbar su implicación en otros campos.

La geometría clásica posee una relevancia extraordinaria. Es, por ejemplo, crucial en cuestiones arquitectónicas o artísticas (para aspectos relacionados con resistencia de estructuras o perspectivas), ciertas figuras se han establecido a modo de lenguaje para mandar mensajes visuales (como “prohibido pasar” o “peligro”), su influencia está latente en los propios sistemas físicos (en función de su forma o distribución pueden cambiar las propiedades o efectos), por no mencionar que ayuda a nuestro desarrollo cognitivo desde pequeños (habilidad visuoespacial, reconocimiento de formas y patrones, capacidad de abstracción, etc.).

Asimismo, la geometría clásica hace de puente con otras ramas de la matemática. Por ilustrar algunos casos:

- Es común recurrir a las probabilidades como medidas sobre la forma geométrica de su espacio de probabilidad.
- Al introducir un sistema de referencia cartesiano se desarrolla la geometría analítica.
- Las funciones trigonométricas tienen un origen geométrico y, sin embargo, son indispensables para muchísimos desarrollos analíticos de funciones.
- Fue con el libro ‘*Los elementos*’ de Euclides cuando se desarrolló una primera axiomática que derivó en el formalismo matemático y gracias al cual se descubrieron otras formas de geometría no-euclídeas posteriormente.

7.2. Contextualización de centro y de aula.

Si bien las TIC están fuertemente implementadas en todos los centros y muchos cuentan con dispositivos como proyectores o pizarras digitales, no todo tipo de equipamiento TIC es accesible en todos los centros o lo es con amplias limitaciones (como en el caso del equipamiento VR). Es por ello que es importante contextualizar las condiciones que se suponen para la siguiente UD, comenzando por las características del centro y del aula.

Como referencia, voy a tomar el tipo de centro y aulas a las que tuve acceso con las prácticas del Máster. El centro en cuestión es el *IES Virgen del Carmen*, de Jaén (puede consultarse su web en https://www.iesvirgendelcarmen.com). Se trata de un instituto público y plurilingüe, cuenta con la categoría de Instituto Histórico por sus 175 años de historia en la trayectoria educativa desde su fundación y está situado en una zona relativamente céntrica, rodeado de otros centros educativos (tanto de primaria como de secundaria), de modo que su situación geográfica le otorga un ambiente educativo.

Al ser un centro público en una zona relativamente céntrica, la mayoría del alumnado procede de familias de clase media, aunque hay diversidad en cuanto a la clase socio-económica de procedencia. Asimismo, cuenta con una diversidad cultural que abarca desde alumnado de etnia gitana, hasta refugiados ucranianos, incluyendo una amplia variedad de nacionalidades (latino-americana, magrebí, marroquí, china, …).

Las aulas del centro suelen tener una ocupación de entre 24 y 30 alumnos según la distribución de los grupos, exceptuando a las aulas de integración lingüística, del PMAR (o '*Programa de Mejora del Aprendizaje y Rendimiento*'), de programas de Diversificación, aulas destinadas a asignaturas de refuerzo u optativas y similares. Todas ellas cuentan con PC en la mesa del profesor, con proyector y alrededor de un tercio de las aulas cuentan además con pizarras digitales. Si bien hay aulas con ordenadores fijos para cada alumno, también se pueden disponer de carritos con portátiles bajo reserva previa para asegurar la disponibilidad.

Se supondrá que se cuenta con dotación del Departamento de Matemáticas para material extra como tutoriales adaptados de programas y aplicaciones informáticas que se puedan requerir (por ejemplo, GeoGebra), licencias para posible software no abierto o no gratuito (por ejemplo, para aplicaciones de Realidad Aumentada compatibles con 'smartphones'), equipamiento físico como juegos y herramientas tipo Tangrams, figuras geométricas, geoplanos, etc.

En cuanto a la tipología del alumnado, va a ser una distribución realista puesto que tomaré como referencia uno de los grupos a los que impartí clase durante las prácticas, pero suavizando ciertas dificultades. Así pues, se considerará un grupo de 26 discentes, sin alumnado absentista, sin alumnado con barrera lingüística ni incorporaciones tardías al sistema educativo. Entre el alumnado destacarán 2 alumnos de altas capacidades intelectuales (en lo que sigue, "*AACC*") ya diagnosticadas, 2 alumnos con dificultades de aprendizaje importantes, un alumno con TDAH y, en general, una actitud hacia el trabajo y las matemáticas muy dispar según el alumno o alumna. Igualmente dispar va a ser considerada la atención que reciben los estudiantes de sus padres de modo que, aun siendo alumnado de 1º de ESO, no sólo no podemos dar por sentada la madurez del alumno, sino que tampoco podemos dar por sentada la supervisión en casa por parte de sus progenitores o tutores legales.

7.3. Ubicación en el curso escolar.

En esta sección se pretende dar un enfoque de la UD dentro del contexto de un curso escolar, indicando el resto de unidades del curso así como el número de sesiones que se le dedicaría a cada una de ellas (consultar la Tabla 7.1) en aras de confirmar su viabilidad. Evidentemente, el número de sesiones en la práctica es siempre orientativo debido a los imprevistos y necesidades que puedan surgir a lo largo del desarrollo.

Tabla 7.1

Temporalización hipotética y contenidos a cubrir para el desarrollo de un curso escolar de 1º de ESO compatible con la UD a desarrollar (Fuente: IES Virgen del Carmen (Jaén). Departamento de Matemáticas, 2023. Elaboración propia).

	Unidad Didáctica	Sesiones
PRIMER TRIMESTRE	**UD 1.** Los números naturales.	6
	UD 2. Potencias y raíces.	8
	UD 3. Divisibilidad.	7
	UD 4. Los números enteros.	7
	UD 5. Los números decimales.	7
SEGUNDO TRIMESTRE	**UD 6.** El sistema métrico decimal.	7
	UD 7. Las fracciones.	8
	UD 8. Operaciones con fracciones.	8
	UD 9. Proporcionalidad y porcentajes.	8
	UD 10. Iniciación al álgebra.	11
TERCER TRIMESTRE	**UD 11.** Rectas y ángulos.	7
	UD 12. Introducción a la geometría clásica.	12
	UD 13. Áreas y perímetros.	10
	UD 14. Gráficas de funciones.	7
	UD 15. Estadística descriptiva.	7
	UD 16. Azar y probabilidad.	7
	Sesiones previas a la Recuperación Final	7
		Total: 134

Vemos por tanto que la UD que se propone sería la UD 12 y que se ubica en el último trimestre, de modo que el alumnado habría trabajado previamente (al menos de manera parcial) los sentidos numérico, de la medida, algebraico y socio-afectivo (consultar la Subsección 3.3.3 para más información). Ésta es de las UD con mayor carga horaria, lo cual se debe en parte a la gran cantidad de contenidos que tiene, pero también a que resulta esencial asentar bien conceptos nuevos que son base para el resto de su etapa educativa como va a ser la simetría o el Teorema de Pitágoras.

7.4. Objetivos y competencias.

7.4.1. Objetivos generales de la ESO.

Los objetivos generales de etapa, disponibles a continuación en la Tabla 7.2, son capacidades personales que se establecen como metas para el crecimiento personal del alumnado más allá de lo académico (dirigidos a su educación como individuos en una sociedad democrática, capaz, activa, sana y de derechos). Dichos objetivos no se sitúan necesariamente en unas materias o instantes concretos, sino que deben ser atendidos conforme se requiera o se presente la oportunidad.

Tabla 7.2

Capacidades que son objetivo de desarrollo en el alumnado a lo largo de la ESO (Fuente: RD 217/2022, Artículo 7. Elaboración propia).

Objetivo	Descripción del Objetivo
a)	Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a las demás personas, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad [...], ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos [...] y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
b)	Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo [...].
c)	Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.
d)	Fortalecer sus capacidades afectivas [...], así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
e)	Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información [...]. Desarrollar las competencias tecnológicas básicas y avanzar en una reflexión ética sobre su funcionamiento y utilización.

– Continúa en la siguiente página –

– CONTINUACIÓN DE LA TABLA 7.2 –

OBJETIVO	DESCRIPCIÓN DEL OBJETIVO
F)	Concebir el conocimiento científico como un saber integrado [...], así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
G)	Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
H)	Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, [...] textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
I)	Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
J)	Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de las demás personas, así como el patrimonio artístico y cultural.
K)	Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado, la empatía y el respeto hacia los seres vivos, especialmente los animales, y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
L)	Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas [...].

7.4.2. Objetivos de la materia.

Los objetivos de la materia fueron desarrollados en la Sección 3.3, donde se habló particularmente de la asignatura de 'Matemáticas' en 1º de ESO. En dicha sección puede consultarse:

- Las competencias específicas con su distribución en bloques (ver Subsección 3.3.1). Se recuerda que son diez competencias específicas distribuidas en cinco bloques.
- Los descriptores operativos relacionados con cada competencia específica (ver la Tabla 3.1). Se recuerda que los descriptores operativos relacionan las competencias específicas con las competencias clave.
- Los criterios de evaluación relacionados con cada competencia específica (ver la Tabla 3.2).
- La disposición del saber matemático en sentidos del saber, así como los saberes básicos a desarrollar con cada sentido (ver la Figura 3.1). Se recuerda que el sa-

ber matemático se estructura con una indexación alfanumérica en seis sentidos de saber.

- Las habilidades relacionadas con los saberes básicos pueden consultarse en las Tabla A.1 a Tabla A.6 del Anexo A.

A modo recopilatorio, ha sido preparada la Tabla 7.3 indicando los descriptores operativos y criterios de evaluación relacionados con cada competencia específica, así como los saberes básicos mínimos relacionables con cada criterio de evaluación.

Tabla 7.3

Recopilación de competencias específicas de la asignatura de matemáticas y de sus conexiones con otros elementos curriculares (Fuente: IC 1/2022. Elaboración propia).

Competencia Específica	Descrip. Operat.	Criterio de Eval.	Saber Básico
1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.	STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4	1.1.	A.2.1. A.2.3. E.1.2
		1.2.	A.3.1. B.1.2.
		1.3.	A.2.2. A.3.4. F.1.3.
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.	STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3	2.1.	A.3.5.
		2.2.	A.6.2 B.3.2. F.3.2
3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.	CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3	3.1.	A.3.3. B.1.1.
		3.2.	D.5.2.
		3.3.	E.3.2.
4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.	STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3	4.1.	A.1.1.
		4.2.	D.1.1. D.2.1.
5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1	5.1.	A.3.2.
		5.2.	A.2.5. A.4.1.

– Continúa en la siguiente página –

6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.	STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1	6.1.	A.1.2 A.5.1. A.5.2. E.1.1. E.3.1.
		6.2.	D.4.1.
		6.3.	E.3.3. F.3.2. F.3.3.
7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.	STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4	7.1.	A.2.4. E.1.2. E.1.3.
		7.2.	A.5.3 E.1.4
8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3	8.1.	D.3.1.
		8.2.	A.4.3.
9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.	STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3	9.1.	F.1.1.
		9.2.	F.1.2. F.1.3.
10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.	CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3	10.1.	F.2.1. F.2.2.
		10.2.	F.2.1. F.3.1.

Esta tabla da pie a un detalle bastante desconcertante que considero oportuno comentar: la completa ausencia de saberes básicos relacionados con el sentido espacial (C) y la escasísima presencia de saberes relacionados con el sentido de la medida (B). Si bien supongo que se trata de un detalle que se arreglará en las siguientes revisiones y actualizaciones de la legislación, resulta cuanto menos chocante tratar una UD que versa sobre geometría clásica y no poder referenciar ningún saber básico de dichos sentidos sin estar saliéndose del marco establecido por el RD 217/2022 y la IC 1/2022. Es por esto mismo que se ha optado por no determinar los saberes básicos en las fichas de las sesiones que se elaboran más adelante.

7.4.3. Objetivos de la unidad.

La UD desarrollada presenta los siguientes objetivos:

O$_1$ Identificar las propiedades esenciales de polígonos frente a otras figuras geométricas, así como de polígonos regulares frente a polígonos no regulares.

O$_2$ Distinguir simetrías en figuras planas, así como los elementos involucrados en ésta, con capacidad de justificar debidamente dicha propiedad.

O$_3$ Crear y reproducir patrones de simetría en figuras planas.

O$_4$ Distinguir y clasificar los tipos de triángulos en función de sus características.

O$_5$ Crear triángulos de características determinadas.

O$_6$ Conocer, diferenciar y construir los elementos notables del triángulo, reconociendo propiedades esenciales de éstos.

O$_7$ Conocer y distinguir los cuadriláteros, reconociendo las propiedades geométricas que los caracteriza y sabiendo enunciarlas con ayuda del lenguaje matemático.

O$_8$ Tomar conciencia de la importancia de una correcta expresión de conceptos y propiedades; así como expresar correctamente conceptos, propiedades, relaciones, enunciados y conjeturas conforme sean requeridos.

O$_9$ Aplicar conocimientos adquiridos y características de los cuadriláteros para conjeturar y alcanzar otras propiedades de los mismos o de sus elementos.

O$_{10}$ Conocer y aplicar la noción de regularidad en polígonos.

O$_{11}$ Clasificar pares de circunferencias en función de su posición relativa.

O$_{12}$ Conocer el Teorema de Pitágoras, apreciando su relevancia histórica y científica.

O$_{13}$ Aplicar adecuadamente el Teorema de Pitágoras en situaciones tipo, para completar datos en otras figuras planas y saber utilizarlo con problemas contextualizados.

O$_{14}$ Iniciarse en el uso de GeoGebra como herramienta auxiliar de geometría dinámica.

7.4.4. Competencias clave en la Unidad Didáctica.

De acuerdo con la Sección 3.2, concretamos cómo se trabajan las distintas competencias clave de la UD:

- **Competencia en Comunicación Lingüística (CCL):** Posee un rol casi omnipresente al estar referida a las capacidades de comunicación y comprensión (tanto oral como escrita), además de ser la base del pensamiento y razonamiento humano.

  Dado que la geometría presente en esta UD no cuenta con herramientas analíticas, sino que está principalmente enfocada al conocimiento y aplicación de conceptos y propiedades geométricas (sin cuestiones algebraicas o aritméticas más allá de medidas de lados o ángulos), se tiene que la CCL presenta un papel reforzado.

  Asimismo, se tratará la CCL con la finalidad de intentar subsanar las habituales y predominantes dificultades de expresión que suelen estar presentes en el alumnado, pasando de un lenguaje vulgar o inespecífico a un lenguaje más apropiado y preciso. Para ello se aprovechará el enfoque conceptual de la UD, procurando que el alumnado tome conciencia de la necesidad e importancia de una expresión correcta y concisa de propiedades geométricas, conjeturas e ideas, así como lo laboriosa y poco efectiva que llega a resultar la comunicación sin concreción ni precisión.

- **Competencia plurilingüe (CP):** Aunque ninguna de las actividades se ha planteado con una finalidad plurilingüe, explicar la etimología de los conceptos geométricos –la mayoría derivados del griego y del latín– permite decir que no ha sido completamente abandonada. Esto además supone una mejora del vocabulario en aquellos idiomas que presentan grafías muy similares con la nuestra. Asimismo, de impartir las clases en un centro bilingüe o plurilingüe, terminaría habiendo una cobertura más directa de esta competencia.

- **Competencia Matemática (STEM):** Aspecto central en toda la UD.

- **Competencia digital (CD):** Aunque con un importante valor práctico, en esta UD se trabajará la CD de manera más tangencial puesto que no se pretende cubrir aspectos como la alfabetización digital o la ciberseguridad. Se plantea como recurso complementario y se enfoca más en la creación de un tipo de contenido digital muy específico (las construcciones con *Geogebra*). También está presente en el uso y gestión de la plataforma digital de aprendizaje y la búsqueda de información en ciertas tareas.

- **Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA):** Se le otorgará un valor y espacio relevante para promocionar una reflexión autocrítica que se pueda reconducir a una mejor resiliencia, mayor atención a las dificultades personales y valorar el peso o importancia de cada sección.

- **Competencia ciudadana (CC):** La posibilidad de encajar tanto aspectos sociales de actualidad como aspectos históricos a lo largo de las sesiones, así como el hecho de incorporar tareas en grupo permite atender esta competencia.

- **Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC):** La riqueza de esta UD va más allá de su propio potencial matemático (el cual es en sí mismo un valor a transmitir) dado que permite hacer de enlace con otros valores culturales como son el arte, la arquitectura o la historia. La UD es muy versátil y adaptable en ese aspecto, permitiendo una rica divulgación.
- **Competencia emprendedora (CE):** Se cubre principalmente por medio de la evaluación personal de fortalezas y debilidades en aras de fijar un objetivo alcanzable, siendo autocríticos en el proceso y procurando una gestión autónoma del proceso.

7.5. Contenidos y metodologías.

7.5.1. Contenidos previos.

Como ya se mencionó en la Sección 7.3, en el curso planteado (revisar la Tabla 7.1) el alumnado habría trabajado previamente el Sentido Numérico, el Sentido de la Medida, el Sentido Algebraico y el Sentido Socioafectivo; así como saberes básicos relacionados. No obstante, es igualmente necesario determinar los contenidos que han sido abordados previamente en la UD 11 ya que se da por sentado que el alumnado ha visto y controla suficientemente los siguientes contenidos de la UD previa:

1. Conceptos indispensables como *punto*, *recta*, *plano*, *semirrecta*, *semiplano*, *segmentos*, *ángulos*, *mediatriz*, *bisectriz* (tratados en la fundamentación epistemológica) y *circunferencia*.
2. Propiedades básicas de la recta (como alguna caracterización) y nociones relacionadas (como distancia punto-recta o distancia recta-recta, posiciones relativas de rectas en el plano y posiciones relativas entre recta y circunferencia en el plano).
3. Construcción con regla y compás de mediatrices de segmentos y bisectrices de ángulos.
4. Propiedades y clasificación de los ángulos (tanto por sus medidas como por sus relaciones con otros ángulos), sus unidades de medida y uso del transportador de ángulos.
5. Operaciones y transformaciones con ángulos y medidas angulares, ciertas propiedades relacionadas con ángulos en polígonos y propiedades relacionadas con ángulos en circunferencias.

En esta hipotética distribución del curso, se tendría que la UD 11 sería muy manipulativa dado que requeriría de un uso asiduo de las construcciones con regla y compás. Por tanto, sería factible retrasar el estudio de la posición relativa entre circunferencias del plano de la UD 11 hasta la UD 12, momento en el cual podrían abordarlo de manera más dinámica con la ayuda de GeoGebra, que es cuando se les presentaría la herramienta.

7.5.2. Contenidos a desarrollar.

A continuación se indican en qué orden se tratarán los contenidos de la UD:

Tabla 7.4

Contenidos a desarrollar en la UD elaborada. (Fuente: Elaboración propia).

Contenidos de la UD 12.	
12.1	Polígonos, poligonales y figuras mixtas.
12.2	Simetrías reflexivas.
12.3	Polígonos regulares.
12.4	Triángulos. Clasificación y propiedades.
12.5	Elementos notables del triángulo.
12.6	Clasificación de cuadriláteros.
12.7	El Teorema de Pitágoras.
12.8	Posiciones relativas de cirunferencias con GeoGebra.

7.5.3. Metodologías y mecánicas implementadas.

A continuación, se listarán de manera detallada el conjunto de metodologías que se aplican a lo largo de la UD. Todas ellas son de elaboración propia y, salvo mecánicas nuevas o específicas de una sesión, estas metodologías no serán descritas posteriormente en el desarrollo de las sesiones dado que serán mecánicas de clase habituales, conocidas y plenamente instauradas desde inicio de curso.

1. **Clases magistrales:** Metodología tradicional en la que el profesor o profesora toma el rol activo, transmitiendo los contenidos al alumnado de manera organizada y esclarecedora. En contraparte, el alumnado toma un rol pasivo siendo el receptor de información, atendiendo a la explicaciones y tomando notas o apuntes pertinentes.

   Aunque se habla mucho de la ineficacia de esta metodología en comparación con otras más activas, la realidad es que resulta prácticamente imposible desecharla dado que ofrece una vía factible de transmitir los saberes de un currículo cargado a clases con un gran número de alumnos.

2. **Gamificación continua:** Mecánica implementada en todo el curso. Verdaderamente no está planteada como un juego per se, sino como un complemento gamificado para las notas de clase y fomentar el trabajo diario del alumnado. El alumnado puede obtener puntos con acciones y situaciones concretas que podrán intercambiar por recompensas de cara al examen. Esta mecánica se presentaría a inicio de curso mediante un estilo democrático-directivo (consúltese Domínguez Rodríguez y Molina Jaén, 2020, pp. 18-19), permitiendo establecer unas normas claras pero consensuadas con el alumnado. Aún así, las reglas para la obtención de puntos deben ser flexibles para que den una respuesta óptima a las circunstancias del grupo o de la UD. Para más información, consúltese la Sección F.1

Conviene tener en cuenta que un sistema de gamificación continua como los desarrollados en el artículo de López Belmonte et al. (2019), con aplicaciones tipo '*Edmodo*' o '*Classcraft*', requieren una gran cantidad de tiempo para compatibilizar los objetivos didácticos con las posibilidades que dichas aplicaciones ofrecen. Debido a la escasez del tiempo, aun a pesar de lo concluido en la Subsección 6.2.4, no se ha implementado un sistema similar.

3. **Cuestionarios de repaso:** Mecánica presente a lo largo de todo el curso. Con la finalidad de promover el repaso continuo, se habilitarán cuestionarios y actividades de repaso en momentos clave; por ejemplo, tras haber visto conceptos críticos, haber dado una cantidad considerable de conceptos o cerca de las fechas del examen.

    Las plataformas educativas de '*Google Classroom*' y '*Moodle*' permiten la creación de bancos de preguntas, la generación aleatoria de cuestionarios tomando actividades del banco de preguntas, el establecimiento de criterios para la elección de las preguntas y la configuración del cuestionario (fechas de apertura y cierre, retroalimentación, número de intentos, etc.).

    Dado que la finalidad es que el alumnado repase, se propone que los cuestionarios admitan un número ilimitado de intentos y se puntúe mediante "la puntuación más alta". Además, como motivación extra, se pueden otorgar puntos para el sistema de gamificación continua por cumplimentarlos con la máxima puntuación.

    Esta mecánica se implementa en las sesiones 4 y 8.

4. **Autocorrección:** Mecánica presente a lo largo de todo el curso que se implementa con varias finalidades. Por un lado, está el objetivo de promover la autonomía, la autocrítica y la responsabilidad individual del alumnado; por otro lado, se busca hacer algo más de hueco en la temporalización de un curso un tanto abultado en contenidos y poder dedicar así más espacio a otras metodologías y actividades que puedan requerir más tiempo.

    En el desarrollo de las sesiones se debe mandar y corregir una variedad representativa de ejercicios atendiendo a su importancia y a las necesidades de alumnado. Sin embargo, para aquellos ejercicios que no de tiempo a corregir en clase o para los cuales no se aprecie una dificultad notable por parte del alumnado, se pondrán a su disposición fichas con ejercicios resueltos para que realicen la corrección de aquellos que finalmente no se vieran en clase. Dichas fichas se habilitarían en la plataforma de la asignatura una vez se haya avanzado lo suficiente en la UD, de manera que sirvieran a su vez de repaso. Luego, para comprobar si han realizado la autocorrección y si la han llevado a cabo eficazmente, deberán subir sus correcciones a la plataforma de la asignatura.

    Esta mecánica se implementa en las sesiones 5 y 8.

5. **Ficha de reflexión personal:** Mecánica presente a lo largo del curso con la finalidad de fomentar la reflexión personal, la autoevaluación y la evaluación emocional. Se trata de una ficha o formulario que el alumnado debería cumplimentar periódicamente a través de la plataforma educativa del centro (*Google Clasroom* o *Moodle*) y sería compatible con un posible portfolio. Para más información, consúltese la Sección F.2.

   Es recomendable que dicha ficha personal se haga de manera periódica pero espaciada para que no se vuelva un proceso tedioso y dar así espacio a un posible cambio entre una evaluación y la siguiente; por ejemplo, cada dos semanas (8 sesiones). Sin embargo, de cara a la UD he decidido instaurarla con una frecuencia mayor para reflejar mejor la intención de esta mecánica; de modo que se cumplimenta cada semana. Dado que se disponen de 4 sesiones de clase semanalmente en la asignatura, de cara a la temporalización vamos a suponer que se habilita en las sesiones 4 y 8, coincidiendo con las últimas sesiones de la semana.

6. **Tareas voluntarias:** A lo largo de las sesiones y del curso, se dará al alumnado la posibilidad de realizar tareas de manera voluntaria. Se proponen actividades voluntarias en las sesiones 3, 6 y 7.

   Por ejemplo, una tarea voluntaria puede ser buscar y proponer videotutoriales sobre Geogebra que supongan una mejora (en calidad audiovisual, por estar más enfocados a mecánicas que ellos deban usar, etc.) o una actualización (que refleje la versión más actualizada del programa, coincidiendo con la que ellos deberán usar).

   Si esa aportación o trabajo extra que aporta el alumno/a supone un resultado útil, una mejora interesante, demuestra implicación por su parte u otras cuestiones similares, se podría recompensar con puntos del sistema de gamificación continua. También se puede extender la mecánica a la realización, de manera emprendedora, de actividades de refuerzo. Éstas deberán suponer una mejoría real y necesaria en alguna de las dificultades que presente el alumnado o, en su defecto, suponer una ampliación significativa de sus conocimientos y capacidades.

7. **Aprendizaje dialógico:** Enfoque pedagógico esencialmente dialogado. A diferencia de una comunicación estándar entre el docente y la clase, el aprendizaje dialógico tiene por finalidad la construcción conjunta de conocimiento por medio del diálogo, la argumentación y la reflexión crítica. Es decir, no se trata de una simple invitación a que participen y hagan algún tipo de aportación, sino que verdaderamente el objetivo a desarrollar depende de que participen y además, el conocimiento construido, aunque guiado, es elaboración del alumnado.

   A pesar de que el aprendizaje dialógico puede complementarse con material y recursos que susciten la reflexión y el diálogo, para esta tarea en particular no se requiere material alguno de acompañamiento.

Es aplicado para que el alumnado desarrolle una definición hábil del concepto de "*polígono*" a base de sus conocimientos, aprovechando las propuestas de compañeros/as, refinando las propuestas, ayudándose de ejemplos o contraejemplos y, en caso de que se requiera, sopesando los ejemplos, preguntas o ideas que el profesor/a plantee. A pesar de que a lo largo de las sesiones se busca promover la participación del alumnado con frecuencia, es en la primera y la tercera sesión donde se aplica plenamente esta metodología.

8. **Gamificación eventual:** Se recurre a '*Kahoot!*' para hacer sesiones de juego que permitan repasar o profundizar los objetivos de la sesión. Cualquier otra aplicación o web similar sería igualmente válida; como por ejemplo '*Quizizz*' o '*Genially*'.

   La gamificación con *Kahoot!* o aplicaciones similares no debe limitarse a ser otro cuestionario más; requiere un tiempo importante de elaboración para hacerla atractiva al alumnado, darle un formato más animado y amigable, incluir bromas visuales, algún elemento sorpresa para mantener su atención, etc.

9. **Tarea IBL:** Por definición, las tareas IBL deben recurrir al aprendizaje colaborativo y al cuestionamiento significativo, dando un enfoque constructivista del aprendizaje, fomentando la indagación y contando con el docente como figura de apoyo en su labor (Calleja, 2016). Esta tarea se desarrolla en la Sesión 6 de la temporalización y está enfocada a que el alumnado, haciendo uso de unas bandas de plástico, obtenga los distintos tipos de cuadriláteros y note las propiedades geométricas que los define. Para más información, consúltese la Subsección F.3.6 o la Sección F.6.

10. **Flipped classroom/learning:** Se trata de una metodología activa en la que, esencialmente, se invierte la funcionalidad entre el aula y la casa. El alumnado contará con material que deberá revisar de manera autónoma en su casa para trabajar los conceptos posteriormente en la clase.

    Esta metodología se va a usar de dos maneras. Una manera se puede considerar una mecánica más ligera, perenne y ya instaurada a lo largo del curso, que consiste en recomendar al alumnado traer los contenidos del libro de texto de la siguiente sesión leídos para facilitar el avance y su comprensión. Con esta modalidad no se requiere una revisión exhaustiva de la siguiente sesión y es posible aplicarla dado que a inicio de cada unidad se les presenta el tema, contenidos, orden y demás.

    La otra manera es una revisión concienzuda de los contenidos de la próxima sesión para dedicar el espacio de clase a resolver las dudas y trabajar allí los conceptos. Al ser el alumnado de 1º de ESO aún poco autónomo, he considerado conveniente no usar en exceso esta metodología y siempre aplicada en las secciones más sencillas de la unidad: simetría y posiciones relativas. Conviene acompañar esta metodología de material complementario al libro de texto para una mayor riqueza de fuentes y facilitar la comprensión de los conceptos. Una muy buena opción es el uso de la herramienta '*Edpuzzle*', la cual permite incrustar en vídeos preguntas de control o apoyo.

7.6. Actividades y recursos.

La UD se desarrolla tomando el libro de texto '*Matemáticas. 1º ESO.* (2022)' de la Editorial McGraw-Hill como recurso principal para el alumnado (se puede consultar su estructura en el Capítulo 4 y su análisis de idoneidad didáctica en el Anexo D). Por cuestiones de Copyright no es posible insertar el tema correspondiente completo como anexo, ni existe una licencia abierta digital del libro. Por tanto, de cara a su implementación, me limitaré a comentar las secciones que se usarían de él.

En cuanto a los materiales necesarios a lo largo de la UD, están los básicos y permanentes (pizarra, ordenador con proyector, libros de texto, material de oficina) que van a ser necesarios en todas y cada unas de las sesiones; así pues, se omitirá especificarlos constantemente. De manera añadida, vamos a asumir que la clase dispone de una pizarra digital que vamos a incluir dentro de los recursos permanentes. En cuanto a material extra que se utilizará, no se recurre a recursos extravagantes (como cascos de VR) y estará especificado en las respectivas sesiones.

Por limitaciones de espacio y por comodidad de cara a su lectura, las actividades y recursos se muestran junto con el desarrollo de cada sesión en la Sección F.3, evitando así una mayor dispersión de los recursos.

En cuanto a los ejercicios, en cada sesión se incluirá una muestra de ejercicios tipo relacionados con los conceptos; aunque de cara a la puesta en práctica de esta UD, es posible ampliar su número tomando más ejercicios del libro o de repositorios. Sin embargo, conviene tener en cuenta que existe un gran abanico de posibilidades en lugar de avasallar al alumnado con ejercicios tipo. Se puede reforzar el trabajo con problemas más conceptuales, preguntas abiertas, problemas de modelización, preguntas PISA liberadas, gymkanas matemáticas, *scape rooms* educativos y, sobre todo, tener en cuenta que las situaciones de aprendizaje son un elemento curricular más al que hay que dar cabida en la programación. De igual manera conviene señalar que, salvo que se especifique lo contrario, las tareas y ejercicios se mandan para la sesión siguiente.

7.7. Temporalización y desarrollo de la Unidad Didáctica.

En esta sección se dará un resumen de las distintas 12 sesiones, indicando los conceptos abarcados y el tiempo dedicado (las sesiones son de 55 minutos de duración para que el alumnado cuente con tiempo de descanso entre clases). Para un desarrollo más detallado (que incluya objetivos, competencias, criterios de evaluación y otros detalles), consúltese la Sección F.3.

Tabla 7.5

Esbozo de la Sesión 1 de la UD. Su versión extendida se puede consultar en la Tabla F.2 (Fuente: Elaboración propia).

Sesión 1. Inicio de la UD. El concepto de polígono.		
Material extra: Recurso '*Elaboración de figuras simétricas mediante reflexiones*'.		
1.	**Recepción.**	*5min*
2.	**Presentación del tema.** Se indicará el índice de la UD, conceptos relevantes, el número de sesiones en que se prevé cubrir la UD y fecha de examen.	*10min*
3.	**Polígonos, poligonales y otras curvas.** Desarrollo de los conceptos de manera dialógica entre toda la clase.	*20min*
4.	**Toma de apuntes y ejercicio en clase.** Definición definitiva de los conceptos y afianzamiento de los mismos.	*10min*
5.	**Cierre de sesión.** Contenido divulgativo sobre los conceptos vistos.	*10min*

Tabla 7.6

Esbozo de la Sesión 2 de la UD. Su versión extendida se puede consultar en la Tabla F.3 (Fuente: Elaboración propia).

Sesión 2. Simetrías reflexivas y polígonos regulares.		
Material extra: Carrito de portátiles para realizar un *Kahoot!* y videotutoriales sobre GeoGebra.		
1.	**Recepción.**	*5min*
2.	**Revisión de '*simetría*' y '*polígono regular*'.** Se repasan y amplían ambos conceptos. Realización de un *Kahoot!* como afianzamiento.	*20min*
3.	**Ampliación divulgativa.** Procurando la participación de la clase y encauzarlo a sus propios intereses.	*15min*
4.	**Cierre de sesión.**	*15min*

Tabla 7.7

Esbozo de la Sesión 3 de la UD. Su versión extendida se puede consultar en la Tabla F.4 (Fuente: Elaboración propia).

Sesión 3. Triángulos. Notación y construcción.		
1.	**Recepción.**	*5min*
2.	**Repaso y notación.** Repaso de propiedades básicas como la suma de su ángulos y estandarización de la notación.	*15min*

– Continúa en la siguiente página –

Sesión 3. Triángulos. Notación y construcción.		
3.	**Relación lado-ángulo.** Clasificación en función de sus lados, de sus ángulos y exposición sobre la relación que existe entre ambos elementos.	*10min*
4.	**Construcción de triángulos.** Construcción, con regla y compás, de triángulos a partir de ciertas medidas.	*20min*
5.	**Cierre de sesión.**	*5min*

Tabla 7.8

Esbozo de la Sesión 4 de la UD. Su versión extendida se puede consultar en la Tabla F.5 (Fuente: Elaboración propia).

Sesión 4. Elementos notables del triángulo (I).		
Material extra: Carrito de portátiles para trabajar con GeoGebra y recurso de GeoGebra.		
1.	**Recepción.**	*5min*
2.	**Preparación de conceptos.** Desarrollo detallado de los elementos notables del triángulo, cómo se relacionan y su etimología. Uso de GeoGebra como herramienta auxiliar.	*35min*
3.	**Práctica en clase y cierre de sesión.** Práctica con GeoGebra.	*15min*

Tabla 7.9

Esbozo de la Sesión 5 de la UD. Su versión extendida se puede consultar en la Tabla F.6 (Fuente: Elaboración propia).

Sesión 5. Elementos notables del triángulo (II). Correcciones (I).		
1.	**Recepción.**	*5min*
2.	**Repaso y corrección de ejercicios.** Mediante la participación del alumnado y con uso de GeoGebra como herramienta auxiliar.	*25min*
3.	**Espacio de reflexión.** Se hablará sobre la importancia de la reflexión personal y sobre cómo se valorará el error en esta UD.	*10min*
4.	**Comentarios sobre las entregas y cierre de sesión.** Se valorarán de manera general las entregas realizadas y se procederá a decorar el aula o el pasillo con sus diseños.	*15min*

Tabla 7.10

Esbozo de la Sesión 6 de la UD. Su versión extendida se puede consultar en la Tabla F.7 (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 6. CORRECCIONES (II). CUADRILÁTEROS (I).		
MATERIAL EXTRA: Sets de bandas de plástico y tangrams.		
1.	**Recepción.**	*5min*
2.	**Tarea sobre cuadriláteros.** Tarea en grupo en la que deben construir todos los tipos de cuadriláteros que van a estudiar.	*30min*
3.	**Ampliación sobre cuadriláteros.** Formalización de los cuadriláteros y sus propiedades.	*10min*
4.	**Descomposición de figuras y cierre de sesión.** Trabajo en clase.	*10min*

Tabla 7.11

Esbozo de la Sesión 7 de la UD. Su versión extendida se puede consultar en la Tabla F.8 (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 7. EL TEOREMA DE PITÁGORAS (I).		
MATERIAL EXTRA: Recurso de GeoGebra con la demostración de Chou-Pei-Suan del teorema.		
1.	**Recepción.**	*5min*
2.	**Devolución de tarea y repaso rápido.** Se recalcarán las propiedades geométricas clave de los cuadriláteros.	*15min*
3.	**Presentación de Pitágoras y del Teorema.** Contextualización histórica de Pitágoras, del teorema y mención a sus aplicaciones.	*10min*
4.	**Enunciado y demostración.** Definición de conceptos y explicación del teorema. Tarea voluntaria de búsqueda de demostraciones.	*20min*
5.	**Cierre de sesión.**	*5min*

Tabla 7.12

Esbozo de la Sesión 8 de la UD. Su versión extendida se puede consultar en la Tabla F.9 (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 8. EL TEOREMA DE PITÁGORAS (II).		
1.	**Recepción.**	*5min*
2.	**Repaso y corrección.** Corrección de ejercicios sobre el Teorema de Pitágoras y repaso general de dudas.	*20min*
3.	**Trabajo en clase.** Afianzamiento de problemas sobre el teorema y descomposición de figuras.	*20min*
4.	**Trabajo libre.** Espacio libre de trabajo sobre la UD.	*10min*

Tabla 7.13

Esbozo de la Sesión 9 de la UD. Su versión extendida se puede consultar en la Tabla F.10 (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 9. POSICIONES RELATIVAS. CORRECCIÓN Y REPASO.		
MATERIAL EXTRA: Carrito de portátiles y recursos de GeoGebra para posiciones relativas.		
1.	**Recepción.**	*5min*
2.	**Repaso de posiciones relativas:** De manera oral, se comprueba si han repasado, si persisten dificultades, etc.	*15min*
3.	**Tarea con el recurso de GeoGebra:** Se usa el recurso puesto en el anexo	*15min*
4.	**Repaso general y cierre de sesión:** Aprovechando los portátiles, se hará un repaso general.	*20min*

A partir de este punto, todos los contenidos de la UD han sido cubiertos; aún así, se disponen de dos sesiones extra antes del examen. Estas sesiones están planteadas para el desarrollo de la situación de aprendizaje pertinente de la UD, corrección de ejercicios, repaso y afianzamiento de conceptos. Si se diera el caso de ser más tiempo del necesario, se podría comenzar la siguiente UD o, al menos, introducirla.

Tabla 7.14

Esbozo de la Sesiones 10 y 11 de la UD. Su versión extendida se puede consultar en la Tabla F.11 (Fuente: Elaboración propia).

SESIONES 10 Y 11. SITUACIONES DE APRENDIZAJE. REPASO GENERAL.		
MATERIAL EXTRA: Según lo requiera la situación de aprendizaje y según se enfoque el repaso general.		
1.	**Recepción.**	*5min*
2.	**Situaciones de aprendizaje:** Se realizará la propuesta por el libro de texto, realizando las variaciones que se consideren pertinentes. Si sobrara tiempo, se dedicaría a repasar de cara al examen.	*50min*

Asi pues, se concluye la UD con la Sesión 12 como sesión de evaluación. El examen propuesto se puede consultar en la Sección F.8.

7.8. Evaluación y calificación.

Lo primero de todo, es enfatizar que no debe considerarse lo mismo la evaluación que la calificación. La calificación suele tener un carácter mucho más numérico (aunque existen métodos de calificación no numéricos) y suele ser el objetivo del alumnado y/o de muchos de sus progenitores; la evaluación, en cambio, puede tener un carácter mucho más cualitativo, más competencial y con una aplicación mucho más continua.

En el desarrollo de esta UD no se incluye una evaluación inicial, puesto que esta UD no se desarrolla a inicio de curso, ni de trimestre, ni de bloque (la UD 11 ya es de contenido geométrico). No obstante, sí que podemos considerar los aspectos ya evaluados previamente y la sesión dialógica de inicio de unidad como punto de referencia, supliendo en cierto modo la evaluación inicial.

A lo largo de todas las sesiones se disponen de instrumentos varios para evaluar al alumnado:

•) La evaluación por *observación directa* y *participación* son siempre factibles y, además, el propio diseño de las sesiones las refuerza.

•) Los *ejercicios* y las *tareas* que se mandan no deben considerarse simplemente como un recurso de afianzamiento, sino que su corrección es igualmente una oportunidad de evaluación que permite valorar si los discentes están perfeccionando sus capacidades y cumpliendo los objetivos.

•) La *plataforma digital de la asignatura* (ya sea '*Google Classroom*' o '*Moodle*'), permite llevar un registro digital de las entregas de cada alumno/a y valorar su evolución a lo largo de las sesiones; de igual modo lo permiten las plataformas '*Eddpuzzle*' y '*Kahoot!*'.

•) Las tareas especialmente relevantes, como la tarea sobre reflexiones (ver Sección F.4) o la tarea IBL cuadriláteros (ver Sección F.6) cuentan con sus propias *rúbricas de evaluación* (ver Sección F.5 y Sección F.7, respectivamente).

•) Los *cuestionarios de repaso* que se ponen a disposición para el alumnado permiten evaluar si alguien de la clase está atrancado con algún concepto en particular. Además, el propio discente puede corroborarnos las sospechas por medio de la *ficha personal*.

•) El examen recopila una serie de ejercicios que son representativos en aras de evaluar los objetivos y criterios de evaluación abarcados en la UD.

Todas estas vías de evaluación están presentes en la UD y permiten, entre otros aspectos, valorar el progreso de cada alumno respecto de los objetivos de la UD y respecto de los criterios de evaluación.

Asimismo, destacar que también se contemplan la autoevaluación (por medio de la ficha personal, de los cuestionarios de repaso y de la autocorrección) y la evaluación emocional (por medio de la ficha personal).

7.9. Atención a la diversidad.

Teniendo en cuenta el último párrafo de la Sección 3.1 y el Anexo B, es necesario asegurar una educación diferenciada para cada alumno en función de sus necesidades.

De cara a la UD didáctica, es fácil notar que cuenta con espacio para atender a la diversidad. Por un lado, la ficha de reflexión personal permite una mejor valoración de las dificultades y facilidades del alumnado, concediendo una atención más dirigida. Por otro, los cuestionarios de repaso que se proponen implementar se valoran mediante el método de "la puntuación más alta", lo que facilita que el alumnado haga tanto uso de él como le sea necesario y permite que todos tengan la sensación de que pueden alcanzar su máximo.

También hay que contar como atención a la diversidad sus propios gustos en las sesiones más divulgativas y las tareas de investigación, dado que permite que desarrollen los conceptos matemáticos enlazándolos con sus preferencias y que así puedan trabajar con un interés más genuino. Del mismo modo, las tareas voluntarias se valoran como una iniciativa del alumnado para mejorar su destreza atendiendo a sus capacidades o posibilidades y, claramente se pueden sugerir actividades con esa finalidad si se viera que el alumnado no toma la iniciativa.

Otras posibles adaptaciones no significativas fáciles de implementar en la UD son la inclusión de más material de apoyo (como los tangrams o los geoplanos) acompañados de ejercicios adaptados, crear presentaciones dinámicas con información esquematizada o dar más valor a la participación y el trabajo continuo.

De cara al alumnado de altas capacidades, es importante animarlos a algún proyecto, reto o tarea que pueda suscitar su interés o trabajar habilidades concretas en lugar de simplemente avasallarlos a más actividades tipo. Una opción muy buena con ellos puede ser plantear algún proyecto interdisciplinar con materias de su interés y de larga ocupación, o la posibilidad de introducirlos más en el propio mundo matemático; por ejemplo, ideando tareas de modelización y demostración, enseñándoles conceptos sencillos de manera más formal, divulgación matemática sobre hechos muy llamativos (para esto se pueden consultar canales de YouTube muy interesantes como '*MatesMike*'[1], '*Lemnismath*'[2] o '*Derivando*')[3], preparándolos para las Olimpiadas Matemáticas...

[1] Disponible mediante la URL https://www.youtube.com/@MatesMike.
[2] Disponible mediante la URL https://www.youtube.com/@lemnismath.
[3] Disponible mediante la URL https://www.youtube.com/@Derivando.

Capítulo 8

Conclusiones.

Personalmente, estoy muy satisfecho con la elaboración de este documento. Aunque ha sido un trabajo extenso, he plasmado todo lo que he considerado imperativo y necesario, tanto a la hora de cubrir los aspectos fundamentales de su contenido como en la elaboración propia de la UD.

La fundamentación curricular ha ayudado a tener un mejor conocimiento de la legislación vigente y a tener una mejor perspectiva de la misma; cómo se disponen los elementos, hasta dónde dicta la legislación nacional, qué es competencia de la legislación autonómica, qué margen de acción disponemos como docentes, etc. Asimismo, el descubrimiento de la *Teoría de Idoneidad Didáctica* ha sido especialmente relevante para contar con un método de valoración riguroso y consolidado a la hora de analizar un recurso tan esencial como son aún los libros de texto.

Sobre la elaboración epistemológica, ha sido un reto no por su contenido sino por su orden. Encontrar una disposición de los contenidos que permitiera hacer un desarrollo ordenado, sin abusar de saltos al correspondiente anexo, permitiendo comentar la axiomática utilizada y dando un empaque completo con el espacio disponible no ha sido trivial. No obstante, considero que la disposición que se ha dado finalmente es una buena respuesta a las limitaciones comentadas.

En lo que a la fundamentación didáctica se refiere, la búsqueda y lectura de artículos sobre metodologías de enseñanza-aprendizaje ha sido de gran interés dado que, aunque no se hayan incluido en el bloque de fundamentación didáctica, han supuesto una gran fuente de información de cara a una práctica futura. Algunos de esos artículos fueron:

1. Barrantes, M.. & Blanco, L. J. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 3*, pp. 33-44.
2. Contreras Gonzáles, L. C., & Blanco, L. J. (2001). ¿Qué conocen los maestros so-

bre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. *XXI: Revista de educación, 3*, pp. 211-220.

3. Gutiérrez, A. (2005). Aprendizaje de la demostración matemática en enseñanza secundaria. *Memorias del XV Encuentro de Geometría y III Encuentro de Aritmética, 2*, pp. 573-593.

4. Conde Caballero, Y. & Conde Caballero, R. J. (2005). El alumnado de secundaria ante los problemas matemáticos. *V Congreso Internacional Virtual de Educación.*

5. Tranzo, N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias, 27 (3)*, pp. 433-446.

6. López, M. B., Fernández, I. B, & Leno, M. Á. F. (2014). Enseñar geometría en secundaria. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, 14 (54)*, pp. 1-8.

En lo relativo a la UD, ésta responde a problemas considerables que noté en el periodo de prácticas, a la vez que intento idear una programación de calidad. Entre los problemas más destacados se encuentran:

- El confeso o aparente desinterés hacia las matemáticas; de ahí que haya procurado enfocar la UD con frecuencia a los intereses del alumnado o aspectos divulgativos.
- La falta de autonomía e iniciativa generalizada. A pesar de ser alumnado aún joven, es necesario inculcarles mejores dinámicas de trabajo, autonomía y responsabilidad; de ahí que fomentara mecánicas como el '*flipped learning*', la *autocorrección* y el sistema de puntos con recompensas.
- Un espacio casi nulo a la reflexión personal y bastante poco objetivo; es por ello que se instauró la *ficha de reflexión personal*. La *autocorrección* también ayuda en este aspecto, puesto que les obliga a comparar su trabajo con otro más detallado y desarrollado, permitiendo que noten cuál es el estándar que deberían alcanzar.

Por último, pero no menos importante, dar las gracias tanto a mis tutores como a mi pareja. A mis tutores por haber estado ambos disponibles siempre que lo requería, por haberme atendido y ayudado con las dudas que iban surgiendo, por las palabras de ánimo y valoraciones que han ido haciendo, así cómo por todo el trabajo y correcciones realizado, especialmente en el tramo final. A mi pareja, por animarme y sufrirme a lo largo de todo el trabajo y por ayudarme a mantener la calma en los momentos de más trabajo o cuando Latex fallaba inexplicablemente.

Referencias bibliográficas

Ahmed, H. O. K. (2016). Flipped learning as a new educational paradigm: An analytical critical Study. *European Scientific Journal (ESJ)*, *12 (10)*, 417-444. https://doi.org/10.19044/esj.2016.v12n10p417

Alba Pastor, C., Arathoon Girón, A. I., & Zubillaga del Río, A. (2023, septiembre). *Web ʻeducaDUAʼ*. Proyecto DUALETIC. Consultado en septiembre de 2023, desde https://www.educadua.es/inicio.html

Alcalde Aparicio, J. A., Amelivia Andérica, A., González Santana, J., & Thibaut Tadeo, E. (2022). *Matemáticas. 1º Secundaria*. McGraw-Hill (Interamericada de España).

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las matemáticas: el caso del constructo ‘idoneidad didáctica’: El caso del constructo ‘idoneidad didáctica’. *BOLEMA (Boletim de Educaçao Matemática*, *37 (75)*. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Buser, P., & Costa, A. F. (2018). *Geometría básica* (1ª edición). Sanz y Torres.

Calleja, J. (2016). Teaching mathematics through inquiry: A continuing professional development programme design. *Educational Designer*, *3 (9)*, 1-29. Consultado en septiembre de 2023, desde https://www.um.edu.mt/library/oar/handle/123456789/101235

Castillo Céspedes, M. J., Burgos, M., & Godino, J. D. (2022). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, *48*, 111-132. https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248238787esp

Cereceda Apodaca, Mª C., et al. (s.f.). *Modelos para la elaboración de la adaptación curricular en la ESO*. Región de Murcia. Consejería de Educación, Formación y Empleo. Dirección Gral. de Planificación y Orientación Educativa. Consultado en septiembre de 2023, desde https://www.orientacionandujar.es/wp-content/uploads/2017/09/MODELOS-PARA-LA-ELABORACI%C3%93N-AC-pdf.pdf

Cerezo Rusillo, M. T., Checa Fernández, P., Díaz Castela, M. d. M., & et al. (2022). *Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad*. Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* (C. Gilman, Trad. Français; 3ª edición (2000)). Aique Grupo Editor, S.A.

Domínguez Rodríguez, F. J., & Molina Jaén, M. D. (2020). *Sociedad, familia y educación*. UJA Editorial.

Froehlich, D. E. (2018). Non-Technological Learning Enviroments in a technological world: Flipping comes to the aid. *Journal of New Approaches in Educational Research*, *7 (2)*, 88-92. https://doi.org/10.7821/naer.2018.7.304

Gairín Sallán, J., & Fernández Amigo, J. (2010). Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez. *Tendencias Pedagógicas*, *15*, 57-90. Consultado en junio de 2023, desde https://revistas.uam.es/tendenciaspedagogicas/article/view/1933

Gobierno de España. (2018, junio). *Plan de acción para la implementación de la Agenda 2030*: *Hacia una Estrategia Española de Desarrollo Sostenible*. Consultado en junio de 2023, desde mdsocialesa2030.gob.es/agenda2030/documentos/plan-accion-implementacion-a2030.pdf

Gobierno de España. Ministerio de Educación y Ciencia. (1993). *Orden de 9 de septiembre de 1993, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas*. Consultado en julio de 2023, desde https://www.boe.es/boe/dias/1993/09/21/pdfs/A27400-27438.pdf

Gobierno de España. Ministerio de Educación y Formación profesional. (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. Consultado en mayo de 2023, desde https://www.adideandalucia.es/normas/RD/RealDecreto217-2022CurriculoESO.pdf

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *11*, 111-132. Consultado el 1 de mayo de 2023, desde https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720/13965

Gutiérrez Yelsbak, M. T. (2012). *Trabajo cooperativo en el aprendizaje de las matemáticas.* Universidad Autónoma de Madrid (UAM). Consultado en mayo de 2023, desde https://libros.uam.es/tfm/catalog/download/366/667/484?inline=1

Ibili, E. (2019). The use of dynamic geometry software form a pedagogical perspective: Current status and future prospects. *Journal of Computer and Education Research*, *7(14)*, 337-355. https://doi.org/10.18009/jcer.579517

IES Virgen del Carmen (Jaén). Departamento de Matemáticas. (2023, julio). *Web del Departamento de Matemáticas del IES Virgen del Carmen (Jaén)*. Consultado en julio de 2023, desde https://www.iesvirgendelcarmen.com/departamento-de-matematicas/

Jensen, J. L., Holt, E. A., Sowards, J. B., Odgen, T. H., & West, R. E. (2018). Investigating strategies for pre-class content learning in a flipped classroom. *Journal of Science*

Education and Technology, *27*, 523-535. https://doi.org/10.1007/s10956-018-9740-6

Joo-Nagata, J., Martínez Abad, F., García-Bermejo Giner, J., & García Peñalvo, F. J. (2017). Augmented reallity and pedestrian navigation through its implementation in m-learning and e-learning: Evaluation of an educational program in Chile. *Computers & Education*, *111*, 1-17. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.04.003

Junta de Andalucía. Consejería de Educación y Deporte. (2021). *Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía*. Consultado en junio de 2023, desde https://www.adideandalucia.es/normas/ordenes/Orden15-1-2021CurriculoESO.pdf

Junta de Andalucía. Consejería de Educación y Deporte. (2022). *Instrucción Conjunta 1/2022, de 23 de junio, por la que se establecen aspectos de organización y funcionamiento para los centros que impartan Educación Secundaria Obligatoria para el curso 2022/2023*. Consultado en julio de 2023, desde https://www.adideandalucia.es/normas/instruc/Instruccion1-2022OrganizacionESO.pdf

Lai, C. L., & Hwang, G.-J. (2016). A self-regulated flipped classroom approach to improving stundent's learning performance in a mathematics course. *Computers & Education*, *100*, 126-140. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.05.006

Lo, C. K., Foon Hew, K., & Chen, G. (2017). Toward a set of design principles for mathematics flipped classrooms: A synthesis of research in mathematics education. *Educational Research Review*, *22*, 50-73. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.08.002

Loomis, E. S. (1968). *The pythagorean proposition*. National council of teachers of mathematics.

López Belmonte, J., Fuentes Cabrera, A., López Núñez, J. A., & Pozo Sánchez, S. (2019). Formative Transcendence of Flipped Learning in Mathematics Students of Secondary Education. *Mathematics*, *7 (12)*. https://doi.org/10.3390/math7121226

Love, B., Hodge, A., Grandgenett, N., & Swift, A. W. (2014). Student learning and perceptions in a flipped linear algebra course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45(3)*, 317-324. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.822582

Maass, K., Geiger, V., Romero Ariza, M., & Goos, M. (2019). The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM Mathematics Education*, *51*, 869-884. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5

Matemáticas 1º ESO [Equipo de autores desconocido]. (2022). Edebé.

McGivney Burelle, J., & Xue, F. (2013). Flipping Calculus. *PRIMUS*, *23(5)*, 477-486. https://doi.org/10.1080/10511970.2012.757571

Moral Sánchez, S. N. (2022). Geometry with a STEM and Gamification Approach: A Didactic Experience in Secondary Education [Directoras de tesis: Sánchez Compaña, Mª T. & Romero, I.]. *Mathematics*, *10 (18)*. https://doi.org/10.3390/math10183252

Muir, T., & Geiger, V. (2015). The affordances of using a flipped classroom approach in the teaching of mathematics: A case study of a grade 10 mathematics class. *Mathematics Education Research Journal*, *28*, 149-171. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0165-8

ONU. (2015, 25 de septiembre). *Objetivos de Desarrollo Sostenible*. Consultado en mayo de 2023, desde https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/

Pozo Sánchez, S., López Belmonte, J., & del Pino Espejo, M. J. (2019). Projection of the Flipped Learning Methodology in the Teaching Staff of Cross-Border Contexts. *Journal of New Approaches in Educational Research*, *8 (2)*, 184-200. https://doi.org/10.7821/naer.2019.7.431

Rodríguez, J. L., Morga, G., & Cangas Moldes, D. (2019). Geometry teaching experience in virtual reality with NeoTrie VR. *Psycology, Society & Education*, *11(3)*, 355-366. Consultado en junio de 2023, desde https://www.researchgate.net/publication/337515071_Geometry_teaching_experience_in_virtual_reality_with_NeoTrie_VR

Sánchez Rivas, E., Sánchez Rodríguez, J., & Ruiz Palmero, J. (2019). Percepción del alumnado universitario respecto al modelo pedagógico de clase invertida. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *11 (23)*, 151-168. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m11-23.paur

Silva, R., Farias, C., & Mesquita, I. (2021). Cooperative learning contribution to student social learning and active rol in the class. *Sustainability*, *13(15)*. https://doi.org/10.3390/su13158644

Skaalvik, E. M., Federici, R. A., & Klassen, R. M. (2015). Mathematics achievement and self-efficay: Relations with motivation for mathematics. *International Journal of Educational Research*, *72*, 129-136. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2015.06.008

Talbert, R. (2014). Inverting the Linear Algebra Classroom. *PRIMUS*, *24(5)*, 361-374. https://doi.org/10.1080/10511970.2014.883457

Tourón, J., & Santiago, R. (2015). El modelo Flipped Learning y el desarrollo del talento en la escuela. *368*, 196-231. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2015-368-288

Vera Espinoza, L. A., & Yáñez Rodríguez, M. A. (2021). La importancia de las TIC en la asignatura matemática. *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo*, *13(2)*, 37-48. https://doi.org/10.51896/atlante/RZBS1977

Werbach, K., & Hunter, D. (2012). *For the Win: How game thinking can revolutionize your business* (3ª ed.). Wharton Digital Press.

Wikipedia. Artículo "Simetría (Geometría)". (2023). Consultado en agosto de 2023, desde https://es.wikipedia.org/wiki/Simetr%C3%ADa_(geometr%C3%ADa)

Zainuddin, Z., Habiburrahim, H., Muluk, S., & Keumala, C. (2019). How do students become self-directed learners in the EFL flipped-class pedagogy? A study in higher education. *Indonesian Journal of Applied Linguistics*, *8 (3)*, 678-690. https://doi.org/10.17509/ijal.v8i3.15270

Parte II

Anexos.

Anexo A

Los saberes básicos en la asignatura de Matemáticas.

Tabla A.1

Saberes básicos del sentido numérico, con habilidades y capacidades relacionadas (Fuente: Real Decreto 217/2022. Elaboración propia).

A. SENTIDO NUMÉRICO.	
SABER BÁSICO MATEMÁTICO	HABILIDADES RELACIONADAS
A.1. Conteo	**A.1.1.** Estrategias variadas de recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana. **A.1.2.** Adaptación del conteo al tamaño de los números en problemas de la vida cotidiana.
A.2. Cantidad	**A.2.1** Números grandes y pequeños: notación exponencial y científica y uso de la calculadora. **A.2.2.** Realización de estimaciones con la precisión requerida. **A.2.3** Números enteros, fraccionarios, decimales y raíces en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana. **A.2.4** Diferentes formas de representación de números enteros, fraccionarios y decimales, incluida la recta numérica. par **A.2.5** Porcentajes mayores que 100 y menores que 1: interpretación.

– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

A. SENTIDO NUMÉRICO.	
SABER BÁSICO MATEMÁTICO	**HABILIDADES RELACIONADAS**
A.3. Sentido de las operaciones	**A.3.1.** Estrategias de cálculo mental con números naturales, fracciones y decimales. **A.3.2.** Operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales en situaciones contextualizadas. **A.3.3.** Relaciones inversas entre las operaciones (adición y sustracción; multiplicación y división; elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada): comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas. **A.3.4.** Efecto de las operaciones aritméticas con números enteros, fracciones y expresiones decimales. **A.3.5.** Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo.
A.4. Relaciones	**A.4.1.** Factores, múltiplos y divisores. Factorización en números primos para resolver problemas: estrategias y herramientas. **A.4.2.** Comparación y ordenación de fracciones, decimales y porcentajes: situación exacta o aproximada en la recta numérica. **A.4.3.** Selección de la representación adecuada para una misma cantidad en cada situación o problema. **A.4.4.** Patrones y regularidades numéricas.
A.5. Razonamiento proporcional	**A.5.1.** Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas. **A.5.2.** Porcentajes: comprensión y resolución de problemas. **A.5.3.** Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, escalas, cambio de divisas, velocidad y tiempo, etc.).
A.6. Educación financiera	**A.6.1.** Información numérica en contextos financieros sencillos: interpretación. **A.6.2.** Métodos para la toma de decisiones de consumo responsable: relaciones calidadprecio y valor-precio en contextos cotidianos.

Tabla A.2

Saberes básicos del sentido de la medida, con habilidades y capacidades relacionadas (Fuente: Real Decreto 217/2022. Elaboración propia).

B. Sentido de la Medida.	
Saber Básico Matemático	**Habilidades Relacionadas**
B.1. Magnitud	**B.1.1.** Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos: investigación y relación entre los mismos. **B.1.2.** Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida.
B.2. Medición	**B.2.1.** Longitudes, áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación. **B.2.2.** Representaciones planas de objetos tridimensionales en la visualización y resolución de problemas de áreas. **B.2.3.** Representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos. **B.2.4.** La probabilidad como medida asociada a la incertidumbre de experimentos aleatorios.
B.3. Estimaciones y relaciones	**B.3.1.** Formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones. **B.3.2.** Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida.

Tabla A.3

Saberes básicos del sentido espacial, con habilidades y capacidades relacionadas (Fuente: Real Decreto 217/2022. Elaboración propia).

C. Sentido Espacial.	
Saber Básico Matemático	**Habilidades Relacionadas**
C.1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones	**C.1.1.** Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características. **C.1.2.** Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales: identificación y aplicación. **C.1.3.** Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada...).
C.2. Localización y sistemas de representación	**C.2.1.** Relaciones espaciales: localización y descripción mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.

– Continúa en la siguiente página –

– CONTINUACIÓN DE LA TABLA A.3 –

C. SENTIDO ESPACIAL.	
SABER BÁSICO MATEMÁTICO	**HABILIDADES RELACIONADAS**
C.3. Movimientos y transformaciones	**C.3.1.** Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas o manipulativas.
C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica	**C.4.1.** Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas. **C.4.2.** Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria...).

Tabla A.4

Saberes básicos del sentido algebraico, con habilidades y capacidades relacionadas (Fuente: Real Decreto 217/2022. Elaboración propia).

D. SENTIDO ALGEBRAICO.	
SABER BÁSICO MATEMÁTICO	**HABILIDADES RELACIONADAS**
D.1. Patrones	**D.1.1.** Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la regla de formación en casos sencillos.
D.2. Modelo matemático	**D.2.1.** Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico. **D.2.2.** Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.
D.3. Variable	**D.3.1.** Variable: comprensión del concepto en sus diferentes naturalezas.
D.4. Igualdad y desigualdad	**D.4.1.** Relaciones lineales y cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica. **D.4.2** Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas basados en relaciones lineales y cuadráticas. **D.4.3** Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones y sistemas lineales y ecuaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana. **D.4.4.** Ecuaciones: resolución mediante el uso de la tecnología.

– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

– Continuación de la Tabla A.4 –

D. Sentido Algebraico.	
Saber Básico Matemático	**Habilidades Relacionadas**
D.5. Relaciones y funciones	**D.5.1.** Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan. **D.5.2** Relaciones lineales y cuadráticas: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas. **D.5.3** Estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.
D.6. Pensamiento computacional	**D.6.1.** Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas a otras situaciones. **D.6.2.** Estrategias útiles en la interpretación y modificación de algoritmos. **D.6.3.** Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.

Tabla A.5

Saberes básicos del sentido estocástico, con habilidades y capacidades relacionadas (Fuente: Real Decreto 217/2022. Elaboración propia).

E. Sentido Estocástico.	
Saber Básico Matemático	**Habilidades Relacionadas**
E.1. Organización y análisis de datos	**E.1.1.** Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucran una sola variable. Diferencia entre variable y valores individuales. **E.1.2.** Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales. **E.1.3.** Gráficos estadísticos: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones..) y elección del más adecuado. **E.1.4.** Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales. **E.1.5.** Variabilidad: interpretación y cálculo, con apoyo tecnológico, de medidas de dispersión en situaciones reales. **E.1.6.** Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión.

– Continúa en la siguiente página –

– Continuación de la Tabla A.5 –

E. Sentido Estocástico.	
Saber Básico Matemático	**Habilidades Relacionadas**
E.2. Incertidumbre	**E.2.1.** Fenómenos deterministas y aleatorios: identificación. **E.2.2.** Experimentos simples: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada. **E.2.3.** Asignación de probabilidades mediante experimentación, el concepto de frecuencia relativa y la regla de Laplace.
E.3. Inferencia	**E.3.1.** Formulación de preguntas adecuadas que permitan conocer las características de interés de una población. **E.3.2.** Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la información procedente de una muestra mediante herramientas digitales. **E.3.3.** Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.

Tabla A.6

Saberes básicos del sentido socioafectivo, con habilidades y capacidades relacionadas (Fuente: Real Decreto 217/2022. Elaboración propia).

F. Sentido Socioafectivo.	
Saber Básico Matemático	**Habilidades Relacionadas**
F.1. Creencias, actitudes y emociones	**F.1.1.** Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación. **F.1.2.** Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas. **F.1.3.** Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.
F.2. Trabajo en equipo y toma de decisiones	**F.2.1.** Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático. **F.2.2.** Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.
F.3. Inclusión, respeto y diversidad	**F.3.1.** Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad. **F.3.2.** La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde una perspectiva de género.

Anexo B

Comentarios sobre la atención a la diversidad.

La atención a la diversidad es parte crucial de la labor continua del docente, dado que la figura docente no debe ser un mero transmisor pasivo de conocimientos. Nuestro rol como docente implica mostrar una importante versatilidad para adaptar lo mejor posible el conocimiento y el medio de transmitirlos a las necesidades y posibilidades de cada alumno. No obstante, cada tipo de necesidad o situación puede requerir un tipo de atención y adaptación distinta.

Ciertas necesidades son relativamente fáciles de adaptar; por ejemplo, en caso de que un alumno o alumna tenga problemas de visión moderados puede ser suficiente con adaptar el tamaño de la fuente de documentos o el brillo de las pantallas; ese tipo de adaptación es lo que se denomina '*adaptación curricular no significativa*' (Domínguez Rodríguez y Molina Jaén, 2020). Éstas no requieren una reestructuración de los objetivos ni de los contenidos curriculares, por lo que son adaptaciones que pueden ser llevadas a cabo por el propio docente.

Algunas adaptaciones curriculares no significativas pueden ser la simplificación de instrucciones, resaltar conceptos esenciales, esquematizar la información, reducir y simplificar actividades, reducción de contenidos no troncales, intercalar variedad de actividades, dar pautas de actuación más guiadas, permitir material de apoyo, evaluaciones orales, pruebas enfocadas a contenidos mínimos, evitar oraciones extensas y complejas, etc (Cereceda Apodaca, Mª C., et al., s.f.). Todas ellas son actuaciones que se pueden implementar (consultando al Equipo Pedagógico o al Departamento de Orientación si fuera conveniente) a lo largo del desarrollo del curso y de la UD.

Existen también las '*adaptaciones curriculares significativas*', las cuales son valoradas y desarrolladas por el Equipo Pedagógico y por el Departamento de Orientación del centro (IC 1/2022, Artículos 33-36). Es habitual que dichas medidas sean de carácter continuista; es decir, que ya se aplicaran en la etapa de Educación Primaria y se mantendrán de cara a la Educación Secundaria. Las adaptaciones curriculares significativas más comunes suelen responder a fuertes dificultades o disfunciones de aprendizaje en la lectura, escritura o cálculo (dislexia, dispraxia, discalculia…); a trastornos del espectro autista, discapacidades físicas o sensoriales, etc.

A pesar de lo anterior, es posible que observemos fuertes dificultades de aprendizaje en alumnado que no tiene pautadas adaptaciones significativas y que no se subsanan por medio de la adaptación curricular no significativa. En tal caso, habrá que poner en conocimiento del Equipo Pedagógico y del Departamento de Orientación la situación, para que realicen una evaluación, valoren las posibles vías de actuación, desarrollen la adaptación pertinente y valoren su eficacia posteriormente.

Cuando se habla de adaptación a la diversidad es común pensar en medidas para el alumnado con dificultades graves de aprendizaje; no obstante, es importante recalcar que el alumnado de incorporación tardía al sistema educativo, de otras procedencias, con barrera lingüística y de altas capacidades también requieren una atención personalizada con el fin garantizar una educación de calidad y adaptada.

Respecto al alumnado de altas capacidades, es posible que se implique de manera voluntaria en ciertas tareas, como la ampliación de actividades; no obstante, es importante que la adaptación para ellos sea de calidad y no de cantidad ya que, de por sí, será habitual que el alumnado de altas capacidades cuente con varias actividades extraescolares o incluso algún tipo de asociación (existen varias tanto a nivel nacional, como la '*AESAC*' [1]; o a nivel provincial, como la asociación '*Ágora*'[2]). En estos casos es especialmente importante ayudarles a equilibrar todas sus capacidades en caso de que cuenten con alguna menos dotada, como pudiera ser alguna faceta actitudinal (manejo de la frustración por el error o el desconocimiento, de la presión al toparse con un reto o no destacar, la aceptación del error de una manera sana, atender el compañerismo evitando monopolizar la participación en grupos heterogéneos…). Por tanto, puede ser interesante enfrentarles algún tipo de reto o proyecto entre iguales que puedan realizar a lo largo de todo el trimestre y trabajar en clases de trabajo libre o en pequeños ratos dedicados a trabajar las tareas en clase en los que terminan antes.

De cara a una adaptación efectiva, resulta de gran interés el *Diseño Universal de Aprendizaje* o DUA, que se trata de "un modelo teórico-práctico para la enseñanza, basado en la investigación y la práctica educativa, que establece un marco para […] crear contextos inclusivos de aprendizaje" (Alba Pastor et al., 2023). En ella se pueden consultar los principios del DUA, pautas, herramientas y recursos, entre otras cosas.

[1] '*Asociación Española de Superdotación y Altas Capacidades*'. Se puede consultar su página web mediante la URL https://aesac.org/.

[2] Asociación de la provincia de Jaén particularizada para niños y jóvenes. Se puede consultar su página web mediante la URL https://altascapacidadesjaen.es/.

Anexo C

Figuras ampliadas del Capítulo 2.

Figura C.1

Estructura de contenido del libro de texto de Edebé (Fuente: Edebé).

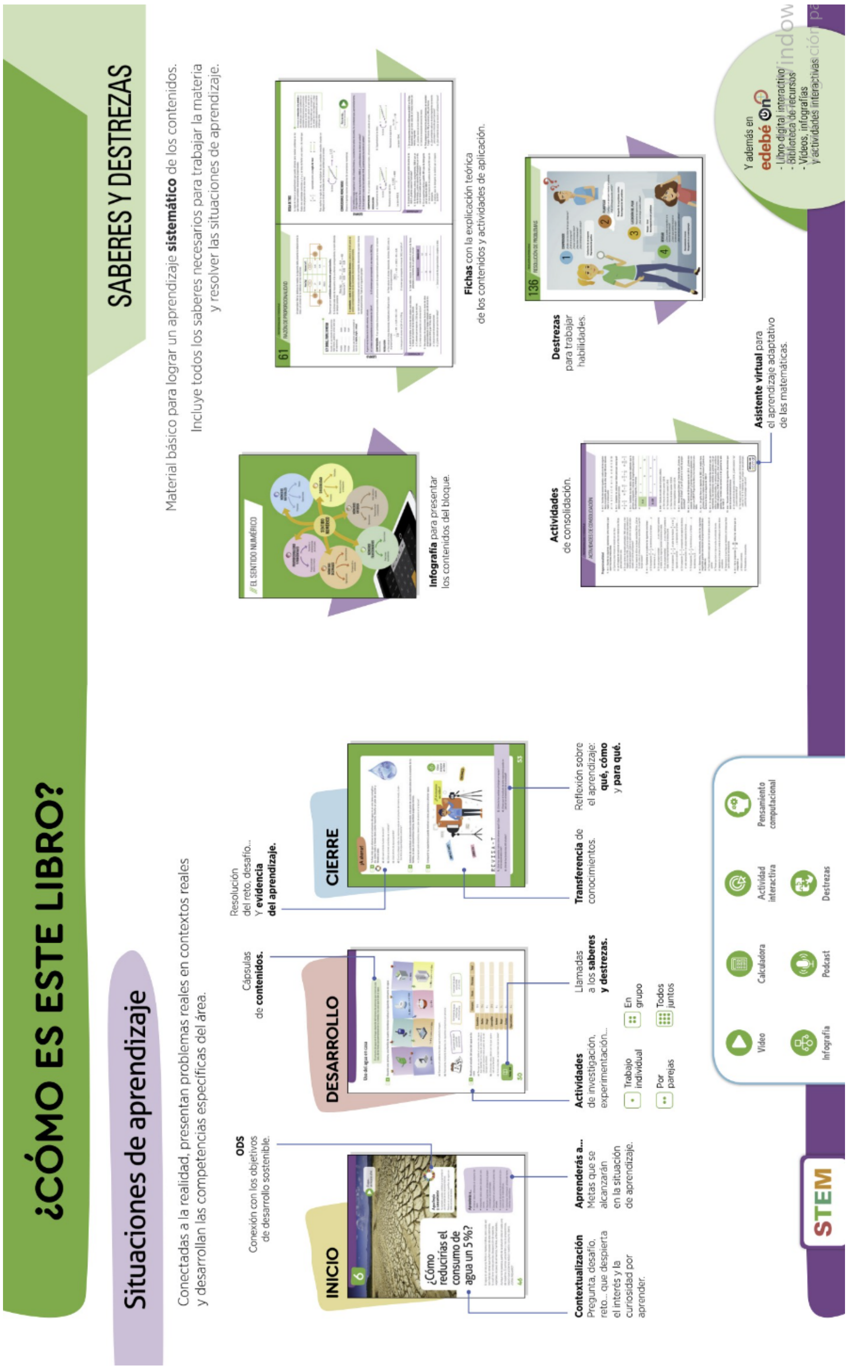


Figura C.2

Estructura de contenido del libro de texto de McGraw-Hill (Fuente: McGraw-Hill, 2022).

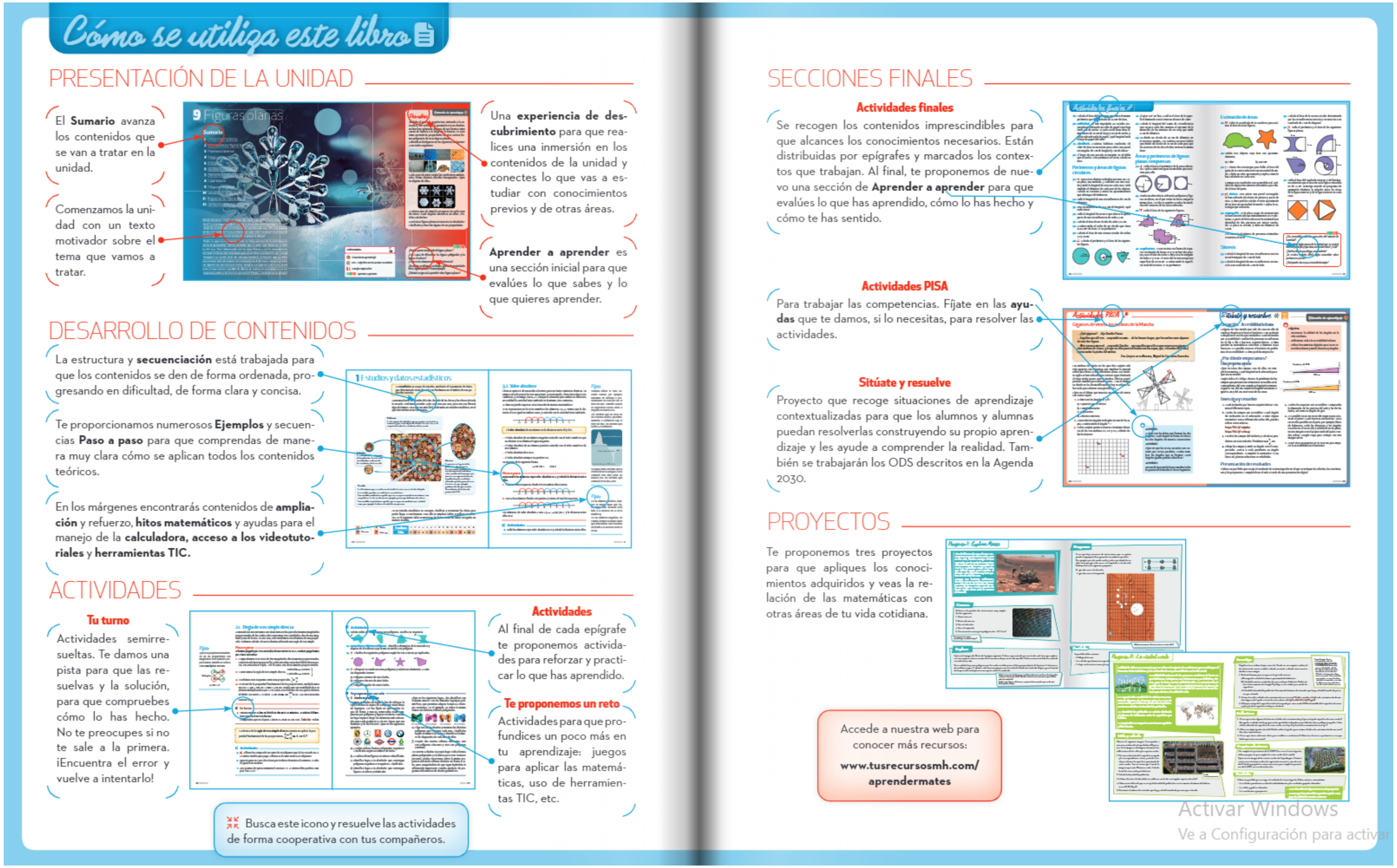


Figura C.3

Índice de situaciones de aprendizaje en el libro de texto de Edebé (Fuente: Edebé, 2022).

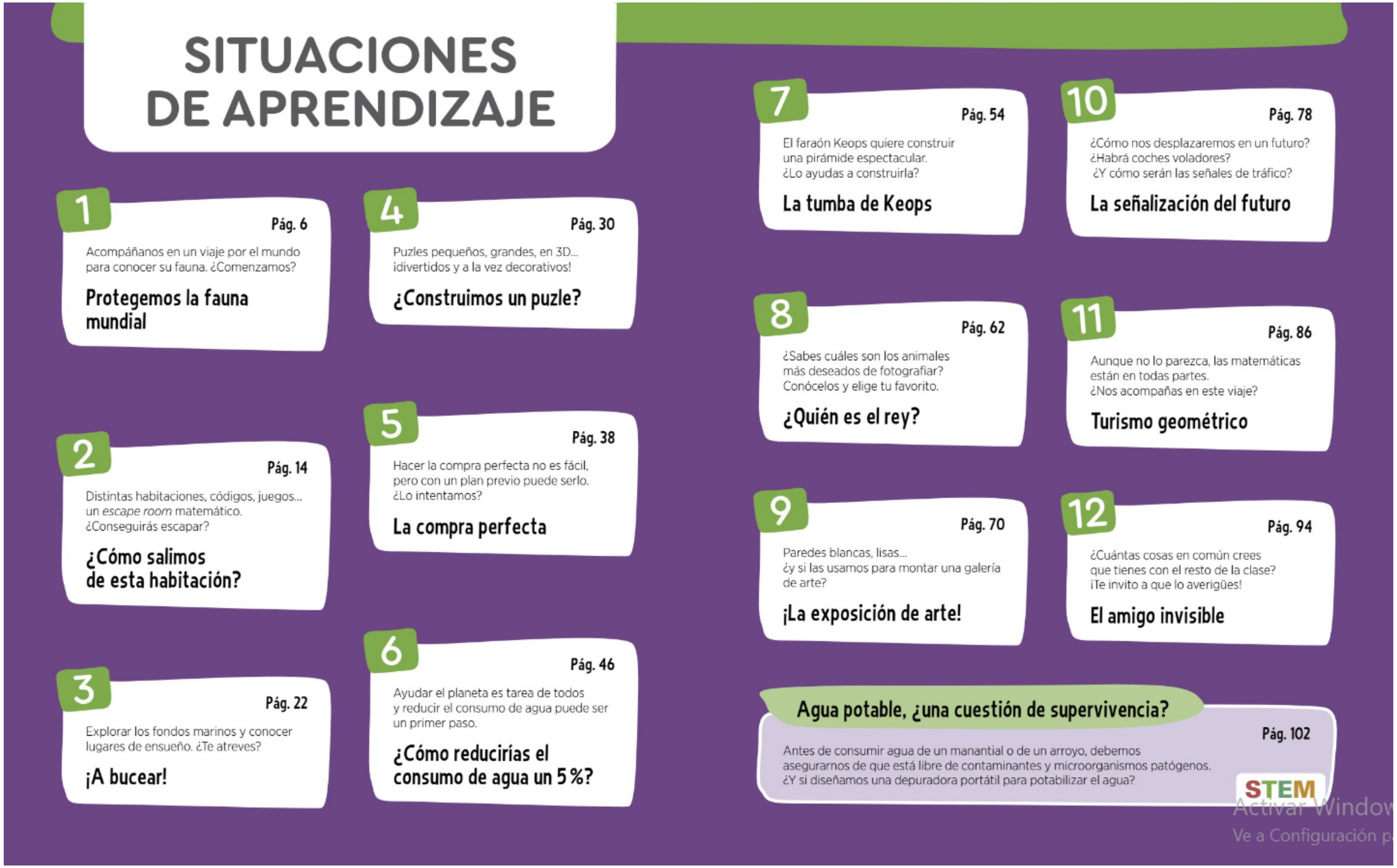


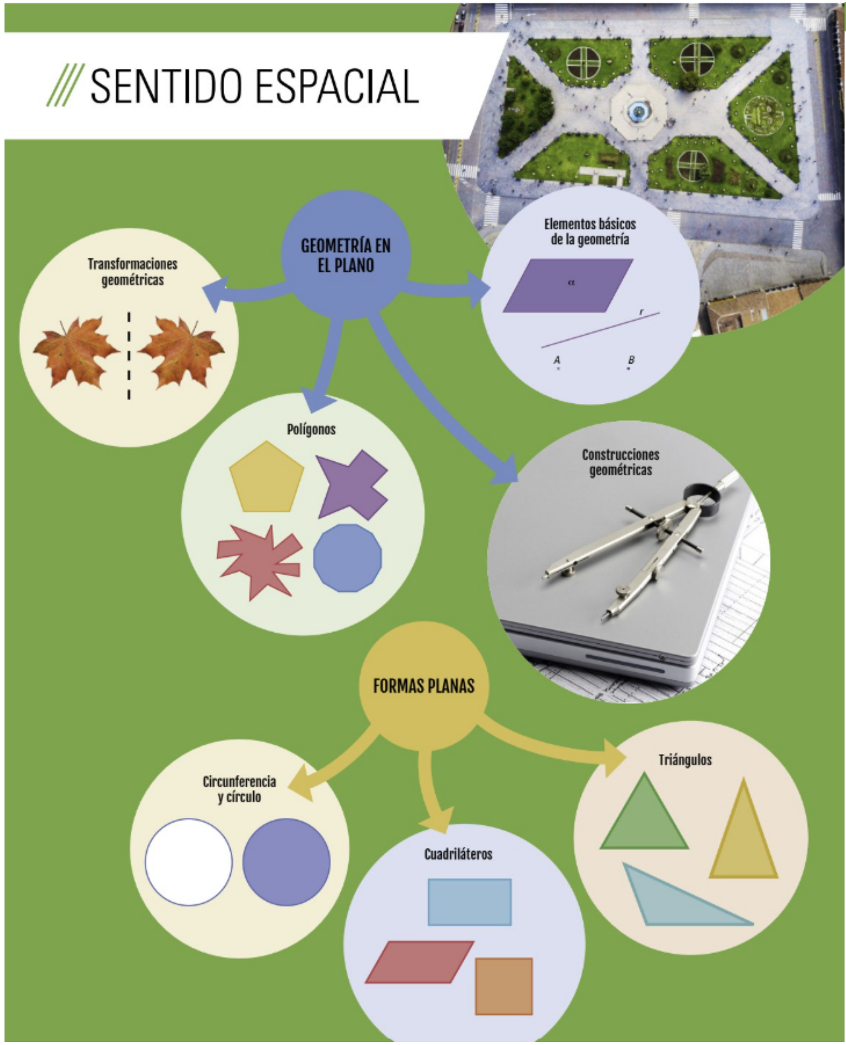
Figura C.4

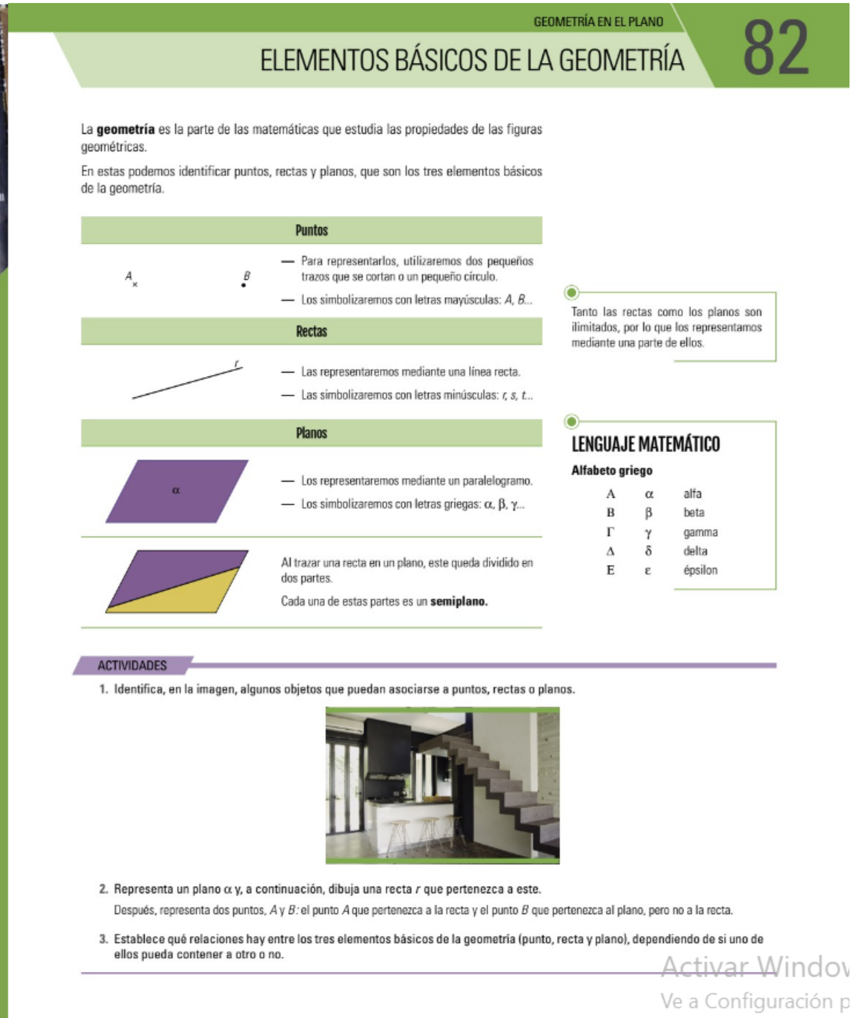
Índice de saberes y destrezas en el libro de texto de Edebé (Fuente: Edebé, 2022).

SABERES Y DESTREZAS

Figura C.5

Infografía de sentido espacial y una ficha de saber geométrico en el libro de texto de Edebé (Fuente: Edebé, 2022).





GEOMETRÍA EN EL PLANO

82

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA

La **geometría** es la parte de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras geométricas.

En estas podemos identificar puntos, rectas y planos, que son los tres elementos básicos de la geometría.

Puntos

— Para representarlos, utilizaremos dos pequeños trazos que se cortan o un pequeño círculo.

— Los simbolizaremos con letras mayúsculas: *A*, *B*...

Rectas

— Las representaremos mediante una línea recta.

— Las simbolizaremos con letras minúsculas: *r*, *s*, *t*...

Planos

— Los representaremos mediante un paralelogramo.

— Los simbolizaremos con letras griegas: α, β, γ...

Al trazar una recta en un plano, este queda dividido en dos partes.

Cada una de estas partes es un **semiplano.**

Tanto las rectas como los planos son ilimitados, por lo que los representamos mediante una parte de ellos.

LENGUAJE MATEMÁTICO

Alfabeto griego

Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	épsilon

ACTIVIDADES

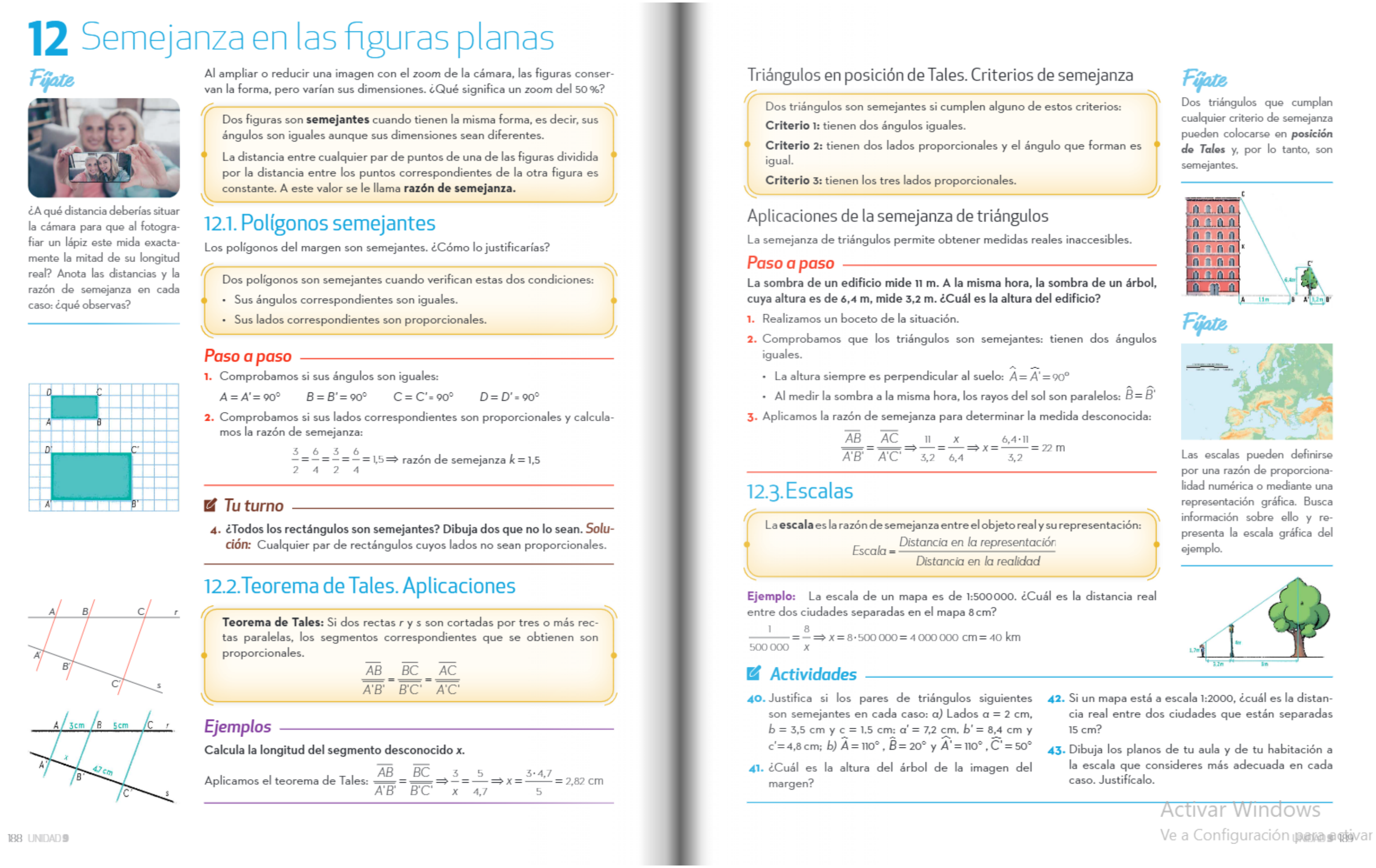
1. Identifica, en la imagen, algunos objetos que puedan asociarse a puntos, rectas o planos.

2. Representa un plano α y, a continuación, dibuja una recta *r* que pertenezca a este.
   Después, representa dos puntos, *A* y *B*: el punto *A* que pertenezca a la recta y el punto *B* que pertenezca al plano, pero no a la recta.

3. Establece qué relaciones hay entre los tres elementos básicos de la geometría (punto, recta y plano), dependiendo de si uno de ellos pueda contener a otro o no.

Figura C.6

Muestra de una unidad de saberes en el libro de texto de McGraw-Hill (Fuente: McGraw-Hill, 2022).



12 Semejanza en las figuras planas

Fíjate

¿A qué distancia deberías situar la cámara para que al fotografiar un lápiz este mida exactamente la mitad de su longitud real? Anota las distancias y la razón de semejanza en cada caso: ¿qué observas?

Al ampliar o reducir una imagen con el zoom de la cámara, las figuras conservan la forma, pero varían sus dimensiones. ¿Qué significa un zoom del 50 %?

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma, es decir, sus ángulos son iguales aunque sus dimensiones sean diferentes.

La distancia entre cualquier par de puntos de una de las figuras dividida por la distancia entre los puntos correspondientes de la otra figura es constante. A este valor se le llama **razón de semejanza.**

12.1. Polígonos semejantes

Los polígonos del margen son semejantes. ¿Cómo lo justificarías?

Dos polígonos son semejantes cuando verifican estas dos condiciones:

- Sus ángulos correspondientes son iguales.
- Sus lados correspondientes son proporcionales.

Paso a paso

1. Comprobamos si sus ángulos son iguales:

$A = A' = 90°$ $B = B' = 90°$ $C = C' = 90°$ $D = D' = 90°$

2. Comprobamos si sus lados correspondientes son proporcionales y calculamos la razón de semejanza:

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \Rightarrow$ razón de semejanza $k = 1{,}5$

Tu turno

4. ¿Todos los rectángulos son semejantes? Dibuja dos que no lo sean. *Solución:* Cualquier par de rectángulos cuyos lados no sean proporcionales.

12.2. Teorema de Tales. Aplicaciones

Teorema de Tales: Si dos rectas *r* y *s* son cortadas por tres o más rectas paralelas, los segmentos correspondientes que se obtienen son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Ejemplos

Calcula la longitud del segmento desconocido *x*.

Aplicamos el teorema de Tales: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{4{,}7} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 4{,}7}{5} = 2{,}82$ cm

188 UNIDAD 9

Triángulos en posición de Tales. Criterios de semejanza

Dos triángulos son semejantes si cumplen alguno de estos criterios:

Criterio 1: tienen dos ángulos iguales.

Criterio 2: tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

Criterio 3: tienen los tres lados proporcionales.

Fíjate

Dos triángulos que cumplan cualquier criterio de semejanza pueden colocarse en ***posición de Tales*** y, por lo tanto, son semejantes.

Aplicaciones de la semejanza de triángulos

La semejanza de triángulos permite obtener medidas reales inaccesibles.

Paso a paso

La sombra de un edificio mide 11 m. A la misma hora, la sombra de un árbol, cuya altura es de 6,4 m, mide 3,2 m. ¿Cuál es la altura del edificio?

1. Realizamos un boceto de la situación.
2. Comprobamos que los triángulos son semejantes: tienen dos ángulos iguales.
   - La altura siempre es perpendicular al suelo: $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$
   - Al medir la sombra a la misma hora, los rayos del sol son paralelos: $\hat{B} = \hat{B}'$
3. Aplicamos la razón de semejanza para determinar la medida desconocida:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \Rightarrow \frac{11}{3{,}2} = \frac{x}{6{,}4} \Rightarrow x = \frac{6{,}4 \cdot 11}{3{,}2} = 22 \text{ m}$$

12.3. Escalas

La **escala** es la razón de semejanza entre el objeto real y su representación:

$$Escala = \frac{\text{Distancia en la representación}}{\text{Distancia en la realidad}}$$

Fíjate

Las escalas pueden definirse por una razón de proporcionalidad numérica o mediante una representación gráfica. Busca información sobre ello y representa la escala gráfica del ejemplo.

Ejemplo: La escala de un mapa es de 1:500 000. ¿Cuál es la distancia real entre dos ciudades separadas en el mapa 8 cm?

$\frac{1}{500\,000} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 8 \cdot 500\,000 = 4\,000\,000$ cm $= 40$ km

Actividades

40. Justifica si los pares de triángulos siguientes son semejantes en cada caso: *a)* Lados $a = 2$ cm, $b = 3{,}5$ cm y $c = 1{,}5$ cm; $a' = 7{,}2$ cm, $b' = 8{,}4$ cm y $c' = 4{,}8$ cm; *b)* $\hat{A} = 110°$, $\hat{B} = 20°$ y $\hat{A}' = 110°$, $\hat{C}' = 50°$

41. ¿Cuál es la altura del árbol de la imagen del margen?

42. Si un mapa está a escala 1:2000, ¿cuál es la distancia real entre dos ciudades que están separadas 15 cm?

43. Dibuja los planos de tu aula y de tu habitación a la escala que consideres más adecuada en cada caso. Justifícalo.

Anexo D

Complementos al análisis de idoneidad de los libros de texto.

Esta sección es complementaria a la Sección 4.2. En ella se dispone más información de las distintas dimensiones de idoneidad, componentes, subcomponentes, indicadores, grado de idoneidad asignado a cada indicador y adjudicación final de idoneidad. Dado que los grados de idoneidad conforman una variable cualitativa, la adjudicación se basará principalmente en la moda, la mediana y el diagrama de frecuencias; evitando así transformaciones numéricas.

La adjudicación de grados de idoneidad es relativamente intuitiva. Consideraremos que a un indicador le corresponde un grado de idoneidad:

- '*Baja*' (B): Si se verifica la descripción de manera insuficiente, siendo evidente o ampliamente mejorable.
- '*Media-Baja*' (M-B): Si se verifica la descripción de manera fluctuante, generalmente con una tendencia más insuficiente o mejorable que aceptable. No se puede considerar plenamente aceptable por las deficiencias que presenta, pero está cerca de serlo.
- '*Media*' (M): Si se verifica la descripción de manera aceptable, con espacio considerable para una mejora o con una fluctuación equitativa a mejor y a peor.
- '*Media-Alta*' (M-A): Si se verifica la descripción de manera fluctuante, pero generalmente con una tendencia más sobresaliente o destacable que mejorable. No se puede considerar simplemente aceptable, ni plenamente idóneo, pero destaca lo suficiente como para considerarlo.
- '*Alta*' (A): Si se verifica la descripción de manera notable o sobresaliente.

Es menester comentar que, dado que no se disponía de tiempo suficiente como para hacer un análisis exhaustivo, reposado y acompañado de una puesta en práctica de ambos libros completos y sus respectivos recursos digitales, se ha optado por hacer un análisis de los temas más relacionados con el saber geométrico (ver Tabla 4.1 y Tabla 4.2). Además, mencionar que el libro de Edebé presenta ciertas peculiaridades para su análisis, dado que bastantes indicadores de idoneidad pueden tener grados de idoneidad muy dispares según se enfoque más a sus *fichas de contenidos* o a sus *situaciones de aprendizaje*.

Asimismo, como el análisis de idoneidad es una herramienta dirigida al libro de texto y es posible que no sea accesible para los lectores, se añadirán ciertas consideraciones al respecto de cada dimensión de idoneidad para que, junto con el contenido del Capítulo 4, sea suficiente justificación de cara a la idoneidad de los indicadores.

D.1. Idoneidad epistémica.

Está enfocada a evaluar la representatividad de los 'significados' incluidos respecto a un significado de referencia; entendiendo por 'significado' de un objeto matemático a …

> …los sistemas de prácticas operativas y discursivas […] para resolver un tipo de situaciones problema. Si existe disparidad entre significados de tipo institucional (por ejemplo, entre el significado de referencia y el implementado en un libro de texto) se habla de '*conflicto epistémico*', mientras que un desajuste entre el significado manifestado por un sujeto y el de referencia se trata de un '*conflicto cognitivo*' (Castillo Céspedes et al., 2022).

Para su análisis se consideran los siguientes indicadores:

1. Indicadores relativos a la subcomponente de '*problemas*' en la componente de '*significados*':
    - Ep_1: Las tareas presentan heterogeneidad (realistas, rutinarias, de aplicación, de deducción, etc.).
    - Ep_2: Las cuestiones tratadas son diversas (numéricas, teóricas, gráficas, etc.).
    - Ep_3: El nivel de dificultad es variado.
    - Ep_4: El tiempo necesario para la resolución de las tareas es adecuado.
    - Ep_5: La cantidad de ejercicios diferentes es adecuada.
2. Indicadores relativos a la subcomponente de '*lenguaje*' en la componente de '*significados*':
    - Ep_6: Se promueven alternativas al lápiz y papel.
    - Ep_7: Se promueve la construcción y refinamiento de organización y representación de datos o ideas.

- Ep_8: Se hace uso de un lenguaje adaptado al alumnado con enunciados concisos.

3. Indicadores relativos a la subcomponente de '*conceptos*' en la componente de '*significados*':
    - Ep_9: La presentación es clara y correcta, adaptada al nivel educativo dirigido.
    - Ep_{10}: La presentación es precisa, con una lógica matemática y didáctica adecuada.
    - Ep_{11}: Se generan situaciones en las que el alumnado genere o suscite definiciones.
4. Indicadores relativos a la subcomponente de '*argumentos*' en la componente de '*significados*':
    - Ep_{12}: Las proposiciones y procedimientos están explicados y argumentados.
    - Ep_{13}: Se favorece el razonamiento y justificación de enunciados y proposiciones mediante diversos tipos de razonamientos y pruebas.
5. Indicadores relativos a la subcomponente de '*proposiciones*' en la componente de '*significados*':
    - Ep_{14}: Las proposiciones fundamentales se presentan de forma clara y correcta con un nivel adecuado.
    - Ep_{15}: Se generan situaciones en las que el alumnado genere o suscite proposiciones.
6. Indicadores relativos a la subcomponente de '*procedimientos*' en la componente de '*significados*':
    - Ep_{16}: Los procedimientos se presentan de manera clara y correcta con un nivel adecuado.
    - Ep_{17}: Se generan situaciones en las que el alumnado genere o suscite procedimientos.
7. Indicadores relativos a la componente de '*relaciones*':
    - Ep_{18}: Los diversos objetos matemáticos se relacionan y se conectan entre sí.
    - Ep_{19}: Se identifican y se articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en la práctica.
8. Indicadores relativos a la subcomponente de '*comunicación y argumentación*' en la componente de '*procesos*':
    - Ep_{20}: Se promueve la argumentación y conjeturación de relaciones matemáticas.

- Ep_{21}: Se incita a usar el lenguaje matemático de manera precisa.
- Ep_{22}: Se busca que el alumnado analice y evalúe pensamientos y estrategias de los demás.

9. Indicadores relativos a la subcomponente de '*Modelización*' en la componente de '*procesos*':
   - Ep_{23}: Se promueve el uso de modelos matemáticos.
   - Ep_{24}: Se hace uso de tecnología y funciones para modelar cambios de manera dinámica.
10. Componente de '*procesos*', subcomponente de '*generalización*':
    - Ep_{25}: Se proporcionan situaciones con espacio a la generalización y conjeturación.
11. Componente de '*conflicto epistémico*'.
    - Ep_{26}: El contenido está presentado correctamente; sin errores, contradicciones o ambigüedades.

A parte de lo mencionado en el Capítulo 4, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones de cara al análisis de idoneidad epistémica:

El libro de texto de Edebé presenta una cantidad aceptable de ejercicios en las fichas de contenidos, siendo una gran mayoría de ellos rutinarios (de aplicación directa, corroboración y afianzamiento), mientras que los ejercicios de otros estilos suelen ser de poco calado. En general, se puede afirmar que tales ejercicios son de dificultad principalmente baja con una única vía de resolución. En las situaciones de aprendizaje la naturaleza de las tareas cambia, presentando una mayor variedad (manipulativas, de búsqueda y contraste de información, de herramientas digitales, modelización, etc.) y con una cantidad decente de tareas en grupo. Éstas pueden dar espacio a diálogo entre iguales, a contraste de ideas, a cierto espacio para la innovación y a un rol más autónomo del alumnado (dependiendo a veces de cómo se enfoque). Las tareas digitales están presentes, pero llegan a ser demasiado abiertas en método y ejecución, sin indicar o prestar un programa o herramienta concreta para su ejecución y sin tutoriales de apoyo para su resolución.

La presentación de los conceptos en el libro es igualmente dispar. Mientras que las situaciones de aprendizaje son muy llamativas y curiosas, las fichas de contenido son considerablemente básicas e incluso asépticas en comparación. También es mejorable el orden de los contenidos en las fichas y, aunque el libro en general cuenta con un lenguaje correcto y adaptado al nivel, son relativamente frecuentes las oraciones o enunciados con cierta ambigüedad (sin afectar a la veracidad de enunciados matemáticos) y tanto el lenguaje matemático como las demostraciones podrían estar más presentes. No obstante, las situaciones de aprendizaje suelen ser una oportunidad considerable de relacionar conceptos matemáticos con situaciones reales, aplicadas o aspectos de interés (más relacionados con el diseño, el arte, preservación de recursos naturales, etc.).

En cuanto a cómo dispone el libro la información respecto a sus contenidos, recalcar lo críptico que es el índice de situaciones de aprendizaje en cuanto a contenidos o conocimientos requeridos (simplemente mencionan el título de las situaciones de aprendizaje). En contraste, la ficha de contenidos si está más detallada y está complementada con infografías a inicio de cada bloque, las cuales menciona el saber matemático de ese bloque y algunas habilidades.

El libro de McGraw-Hill cuenta con una amplia gama de ejercicios, de una variedad notable (de aplicación directa, manipulativos, deductivos, aplicados, de corroboración, modelización, etc.), con al menos un 25 % de tareas en grupo aseguradas y de dificultad variable. Aquellos ejercicios de un ámbito más rutinario suelen tener una vía de resolución única, pero también se disponen ejercicios con vías de resolución alternativas con las que se puede dar pie a analizar estrategias ajenas. Las tareas, grupales o no, dan pie a una participación activa del alumnado y éstas, junto con las tareas de refuerzo, ampliación y curiosidades motivan la autonomía del alumnado. En general, el libro da un gran peso a justificar los resultados y procedimientos, tanto los expuestos como los que el alumnado pueda desarrollar. También están presentes las tareas digitales, aunque de manera mejorable dado que no suelen ir acompañadas de un programa o herramienta concreta para su ejecución.

Los conceptos tienen un desarrollo bien detallado, formal y correcto; sin ambigüedades, con un orden adecuado, un lenguaje adaptado y un nivel óptimo. A lo largo del libro se introduce una cantidad aceptable de lenguaje matemático sin llegar a saturar al alumno, aunque sí que se podrían incluir más demostraciones. Los contenidos en general se presentan de forma amena y llamativa, intercalando el objetivo matemático con otro tipo de intereses (datos históricos, curiosidades, espacio para innovación, cuestiones artísticas, etc.).

Tabla D.1

Indicadores de idoneidad epistémica de cada libro de texto. Los grados de idoneidad son 'Baja' *(*B*),* 'Media-Baja' *(*M-B*),* 'Media' *(*M*),* 'Media-Alta' *(*M-A*) y* 'Alta' *(*A*) (Fuente: Elaboración propia).*

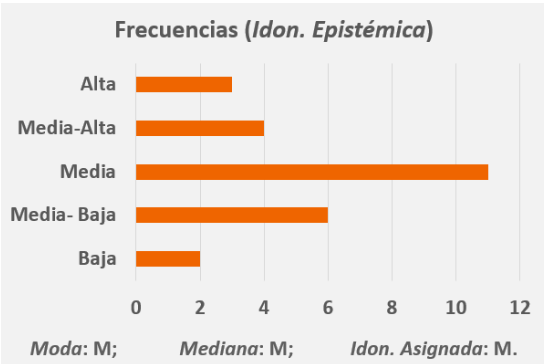
IDONEIDAD EPISTÉMICA					
Edebé			McGraw-Hill		
Ep_1: M-B;	Ep_2: M-A;	Ep_3: B;	Ep_1: M-A;	Ep_2: A;	Ep_3: A;
Ep_4: M;	Ep_5: M-A;	Ep_6: A;	Ep_4: M-A;	Ep_5: A;	Ep_6: A;
Ep_7: M-A;	Ep_8: M-B;	Ep_9: M-B;	Ep_7: A;	Ep_8: M-A;	Ep_9: A;
Ep_{10}: M-B;	Ep_{11}: M;	Ep_{12}: M;	Ep_{10}: A;	Ep_{11}: M;	Ep_{12}: A;
Ep_{13}: B;	Ep_{14}: A;	Ep_{15}: M;	Ep_{13}: M;	Ep_{14}: A;	Ep_{15}: A;

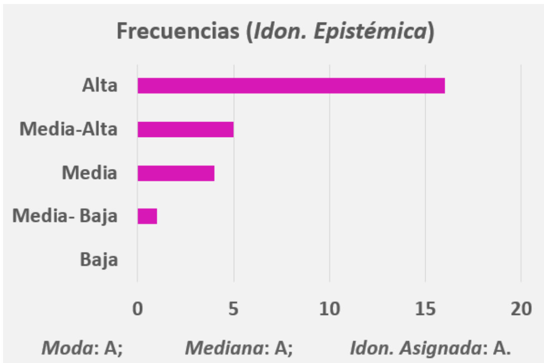
– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

IDONEIDAD EPISTÉMICA					
Edebé			McGraw-Hill		
Ep_{16}: M;	Ep_{17}: M;	Ep_{18}: M-A;	Ep_{16}: A;	Ep_{17}: M;	Ep_{18}: M-A;
Ep_{19}: M;	Ep_{20}: M;	Ep_{21}: M;	Ep_{19}: M-A;	Ep_{20}: A;	Ep_{21}: M;
Ep_{22}: A;	Ep_{23}: M;	Ep_{24}: M-B;	Ep_{22}: A;	Ep_{23}: M-A;	Ep_{24}: M-B;
Ep_{25}: M;	Ep_{26}: M-B.		Ep_{25}: A;	Ep_{26}: A.	

Figura D.1

Diagramas de frecuencias de idoneidad en los indicadores de idoneidad epistémica obtenidos a partir de la Tabla D.1. A la izquierda, el diagrama de barras para el libro de Edebé; a la derecha, el de McGraw-Hill (Fuente: Elaboración propia).





D.2. Idoneidad cognitiva.

La idoneidad cognitiva está enfocada a evaluar si los *significados* implementados favorecen el desarrollo potencial del alumnado, procurando *significados logrados* cercanos a los *significados implementados*. Para su análisis se consideran los siguientes indicadores:

1. Indicadores relativos a la componente '*relaciones*':
   - C_1: Presenta interconexiones para un aprendizaje significativo.
   - C_2: Procura experiencias que facilitan la comprensión de conceptos relacionados.
2. Indicadores relativos a la componente '*conocimientos previos*':
   - C_3: Se especifican los requisitos previos.
   - C_4: Se disponen los objetivos y conceptos en grado creciente de complejidad.
3. Indicadores relativos a las componentes '*diferencias individuales*' y '*conflictos cognitivos*':

- C_5: Se plantea el error como oportunidad de aprendizaje y se prevén posibles dificultades de aprendizaje.
- C_6: Se incluyen actividades para detectar errores o dificultades.
- C_7: Dispone de actividades de ampliación y refuerzo.

4. Indicadores relativos a la componente '*evaluación*':
   - C_8: Hay diversos instrumentos de evaluación, coevaluación y autoevaluación.
   - C_9: Los procesos de generalización, modelización y abstracción están contemplados en la evaluación.
   - C_{10}: La evaluación tiene en cuenta los niveles de comprensión y competencia individuales.

A parte de lo mencionado en el Capítulo 4 y anteriormente, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones de cara al análisis de la idoneidad cognitiva:

El libro de texto de Edebé hace un esfuerzo por presentar experiencias de alto valor para establecer conexiones entre objetos matemáticos y el mundo real, aunque sólo en las situaciones de aprendizaje. En ellas se pueden evaluar los conocimientos previos, pero como un recurso extra del profesor (y no del alumnado). En general, se echa en falta una mejor atención a la auto-evaluación y la co-evaluación; así como un mejor espacio para la reflexión personal.

También dispone de material digital de ampliación y refuerzo (un tanto básicos) de cara a contemplar las diferencias individuales del alumnado. No obstante, se echa en falta una mejor atención a conflictos cognitivos habituales o a tratar el error como parte del proceso o como una oportunidad, en lugar de como un fracaso o un castigo.

El libro de McGraw-Hill hace el mismo esfuerzo por presentar experiencias de alto valor junto a sus contenidos, pero lo realiza de manera continua a lo largo de todo el libro. A inicio de unidad hace un leve tanteo de los conocimientos previos, pero la atención a los conflictos cognitivos a lo largo de la unidad es mejorable. En su plataforma digital, '*ALEKS*', se pone a disposición del alumnado material de refuerzo, de ampliación y video-tutoriales de los cuales el docente puede hacer un seguimiento. También cuenta con una breve auto-evaluación como recurso digital y espacio para la reflexión sobre los objetivos alcanzados y las dificultades persistentes. No se dispone de co-evaluación.

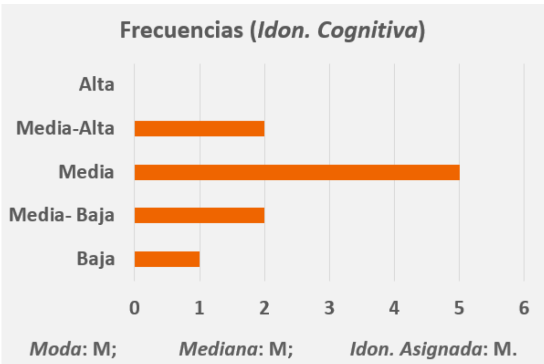
Tabla D.2

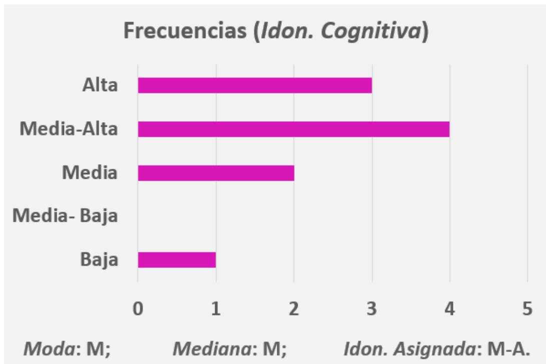
Indicadores de idoneidad cognitiva de cada libro de texto. Los grados de idoneidad son ‘Baja’ *(*B*),* ‘Media-Baja’ *(*M-B*),* ‘Media’ *(*M*),* ‘Media-Alta’ *(*M-A*) y* ‘Alta’ *(*A*) (Fuente: Elaboración propia).*

IDONEIDAD COGNITIVA					
Edebé			McGraw-Hill		
C_1: M-A;	C_2: M-A;	C_3: M;	C_1: M-A;	C_2: A;	C_3: M-A;
C_4: M;	C_5: B;	C_6: M;	C_4: A;	C_5: M;	C_6: A;
C_7: M;	C_8: M-B;	C_9: M;	C_7: M-A;	C_8: M;	C_9: M-A;
C_{10}: M-B.			C_{10}: B.		

Figura D.2

Diagramas de frecuencias de idoneidad en los indicadores de idoneidad cognitiva obtenidos a partir de la Tabla D.2. A la izquierda, el diagrama de barras para el libro de Edebé; a la derecha, el de McGraw-Hill (Fuente: Elaboración propia).





D.3. Idoneidad afectiva.

La idoneidad afectiva está enfocada a evaluar si promueve la motivación e implicación del alumnado. Para su análisis se consideran los siguientes indicadores:

1. Indicadores relativos a la componente ‘*actitudes*’:
   - A_1: Se motiva al alumnado a argumentar, valorando sus explicaciones e ideas.
   - A_2: Se presentan tareas colaborativas que requieren participación activa, responsable, perseverancia y el respeto a las aportaciones ajenas.
   - A_3: Se incita a la exploración de ideas y métodos de resolución alternativos.
2. Indicadores relativos a la componente ‘*emociones*’:
   - A_4: Los problemas son relativos a cuestiones ciudadanas o de la vida social del alumnado.

- A_5: Se busca la motivación mediante el humor, juegos, hechos históricos, situaciones de la vida real, etc.
- A_6: Las tareas y el contenido son de interés para el alumnado y valoran la originalidad y el pragmatismo.
- A_7: Se dota de espacio para el fomento de la autoestima y evitar el rechazo a las matemáticas.

3. Indicadores relativos a la componente '*creencias*':
   - A_8: Se analizan y consideran creencias y concepciones sobre las matemáticas, metacognición, enseñanza matemática y el contexto del aprendizaje.
4. Indicadores relativos a la componente '*valores*':
   - A_9: Se promueve el valor de la estética, precisión y utilidad de las matemáticas.
5. Indicadores relativos a la componente '*evaluación afectiva*':
   - A_{10}: Incluye actividades para valorar aspectos afectivos del proceso de enseñanza-aprendizaje.

A parte de lo mencionado en el Capítulo 4 y anteriormente, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones de cara al análisis de la idoneidad afectiva:

Como se ha ido mencionando, el libro de texto de Edebé pide justificar los procesos y resultados como es natural; sin embargo, por cómo se enfocan algunas situaciones de aprendizaje y tareas, da la sensación de que podría estar mejor motivada con leves cambios (como facilitar ciertas ideas a la hora de modelizar o conjeturar). A pesar de ello, las tareas y situaciones de aprendizaje dan pie a que el alumnado exprese o plasme impresiones, ideas y haga pruebas sobre ellas. Asimismo, las situaciones de aprendizaje ya se defendieron como un recurso llamativo, que cubre intereses y objetivos varios como aspectos sociales, cívicos, artísticos u otros.

También hay cierto espacio a la reflexión personal, a evitar el rechazo a las matemáticas y demás, pero a menudo mejorables. Por ejemplo, se podría incluir ese aspecto más o mejor en las propias tareas, con una mejor auto-evaluación y co-evaluación, como un recurso más presente en el propio libro en lugar de como recurso digital complementario, etc. En definitiva, apostando más en la evaluación afectiva como un recurso necesario que como algo puntual.

En el libro de McGraw-Hill es también mejorable la evaluación afectiva y la valoración de ideas. Las tareas dan pie a que el alumnado plasme ideas, creencias, suposiciones y demás; pero el espacio a la reflexión personal, la evaluación de ideas ajenas y tratar el error como parte del proceso para evitar rechazo a las matemáticas es aún mejorable (aunque cuenta también con ciertos recursos digitales complementarios). Aún así, se desprende un gran esfuerzo por hacer llamativo el contenido, fomentar el interés, tratar aspectos sociales y cívicos que pueden compensar parcialmente la evaluación afectiva.

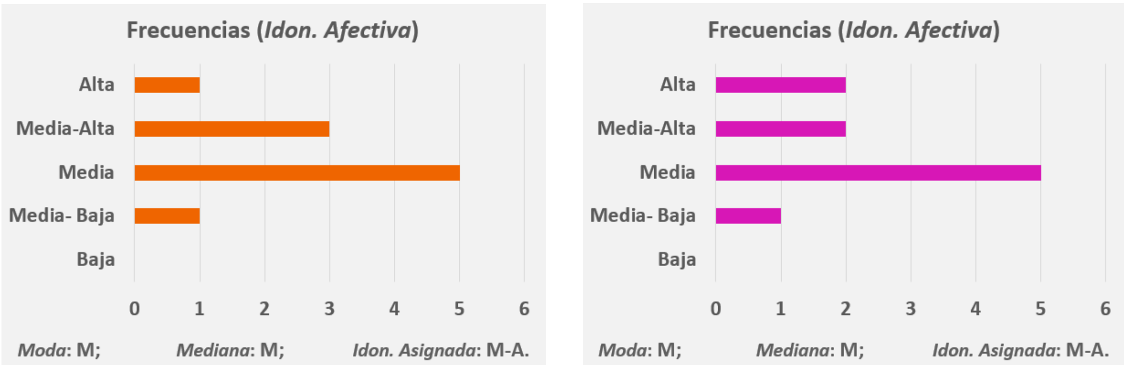
Tabla D.3

Indicadores de idoneidad afectiva de cada libro de texto. Los grados de idoneidad son 'Baja' *(*B*),* 'Media-Baja' *(*M-B*),* 'Media' *(*M*),* 'Media-Alta' *(*M-A*) y* 'Alta' *(*A*) (Fuente: Elaboración propia).*

IDONEIDAD AFECTIVA					
Edebé			McGraw-Hill		
A_1: M;	A_2: A;	A_3: M;	A_1: M;	A_2: A;	A_3: M;
A_4: M-A;	A_5: M-A;	A_6: M;	A_4: M-A;	A_5: A;	A_6: M;
A_7: M;	A_8: M-B;	A_9: M-A;	A_7: M;	A_8: M-B;	A_9: M-A;
A_{10}: M.			A_{10}: M.		

Figura D.3

Diagramas de frecuencias de idoneidad en los indicadores de idoneidad afectiva obtenidos a partir de la Tabla D.3. A la izquierda, el diagrama de barras para el libro de Edebé; a la derecha, el de McGraw-Hill (Fuente: Elaboración propia).



D.4. Idoneidad interaccional.

La idoneidad interaccional (también denominada a veces como 'idoneidad instruccional') está enfocada a evaluar desde el punto de vista interacciona y comunicativo si la configuración de los contenidos ayudan a identificar potenciales conflictos didácticos y resolverlos. Para su análisis se consideran los siguientes indicadores:

1. Indicadores relativos a la componente '*interacción autor-aulumno*':
   - I_1: Los contenidos se presentan de manera clara y bien organizada, enfatizando los conceptos clave.
   - I_2: El contenido se presenta con un vocabulario comprensible, ilustraciones adecuadas (con calidad gráfica y un objetivo a reflejar) y ejemplos variados que ayuden a la comprensión de los conceptos.

- I_3: Se incita a consensuar el mejor argumento en situaciones concretas.
- I_4: Se busca que el alumnado exponga ideas, resultados y trabajo.

2. Indicadores relativos a la componente '*interacciones entre discentes*':
   - I_5: Se disponen tareas que promueven el diálogo, la comunicación o el debate entre los alumnos.
   - I_6: Se incluyen tareas que tienen como objetivo convencerse a uno mismo y al resto de la clase de la validez de afirmaciones o conjeturas en base a argumentos matemáticos.
3. Indicadores relativos a la componente '*autonomía*':
   - I_7: Se promueve la participación y el dinamismo por parte del alumnado.
   - I_8: Se disponen situaciones nuevas a las que el alumnado debe enfrentarse.
4. Indicadores relativos a la componente '*evaluación formativa*':
   - I_9: Se incluyen métodos de evaluación continua en la lección, sirviendo de retroalimentación para el alumnado y permitiendo notar su progreso.
   - I_{10}: Los métodos de evaluación incluidos son coherentes con las metas de aprendizaje.
   - I_{11}: Los métodos de evaluación son diversos y variados (autoevaluación, coevaluación, etc.).

A parte de lo mencionado en el Capítulo 4 y anteriormente, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones de cara al análisis de la idoneidad interaccional:

El libro de texto de Edebé es, en conjunto, fácil de usar para el alumnado, con una disposición clara de sus contenidos y con un vocabulario comprensible. La naturaleza de varias de sus tareas da lugar a consensuar ideas dentro de tareas grupales por medio de la comunicación, el diálogo y el debate. No obstante, no se desprende que convencerse a ellos mismos o a los demás de ideas sea un objetivo en sí mismo (más bien es una etapa de la tarea). A través de sus tareas, el docente puede ir haciendo evaluación y seguimiento del alumnado, pero el espacio concreto a una evaluación formativa es mejorable tal y como se ha ido comentando anteriormente.

El libro de texto de McGrawHill es fácil de usar para el alumnado, con una disposición buena de contenidos y un vocabulario a su alcance. La variedad de las tareas da pie a que el alumnado consensúe ideas, se comunique, debata e incluso que se autoconvenza de ciertas ideas con tareas de ampliación. El docente puede hacer un seguimiento del alumnado con las tareas que dispone el libro aunque hay espacio para una evaluación formativa más concreta y responsiva.

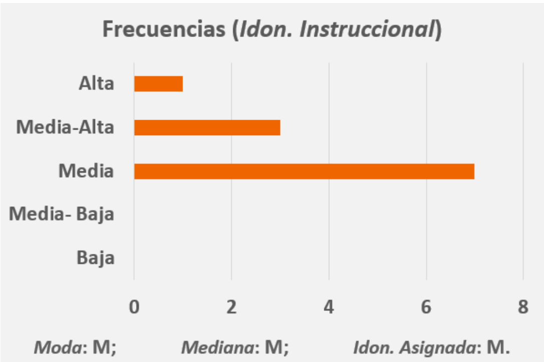
Tabla D.4

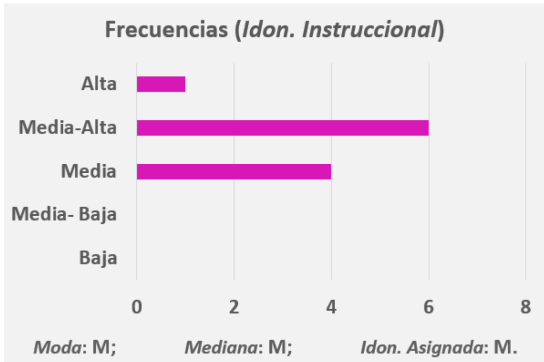
Indicadores de idoneidad interaccional de cada libro de texto. Los grados de idoneidad son 'Baja' *(*B*),* 'Media-Baja' *(*M-B*),* 'Media' *(*M*),* 'Media-Alta' *(*M-A*) y* 'Alta' *(*A*) (Fuente: Elaboración propia).*

IDONEIDAD INTERACCIONAL					
Edebé			McGraw-Hill		
I_1: M;	I_2: M;	I_3: M;	I_1: M-A;	I_2: A;	I_3: M-A;
I_4: M-A;	I_5: M-A;	I_6: M;	I_4: M;	I_5: M-A;	I_6: M-A;
I_7: M-A;	I_8: A;	I_9: M;	I_7: M-A;	I_8: M-A;	I_9: M;
I_{10}: M;	I_{11}: M.		I_{10}: M;	I_{11}: M.	

Figura D.4

Diagramas de frecuencias de idoneidad en los indicadores de idoneidad interaccional obtenidos a partir de la Tabla D.4. A la izquierda, el diagrama de barras para el libro de Edebé; a la derecha, el de McGraw-Hill (Fuente: Elaboración propia).





D.5. Idoneidad mediacional.

La idoneidad mediacional está enfocada a evaluar la disponibilidad y adecuación de los recursos, inclusive el recurso temporal. Para su análisis se consideran los siguientes indicadores:

1. Indicadores relativos a la componente '*recursos materiales*':
   - M_1: Se incorpora o se promueve material complementario al libro de texto (manipulativo, audiovisual, informático, etc.).
   - M_2: Se incluyen tareas que requieren el uso de calculadora, ordenador o internet y se acompañan de diversas fuentes.
   - M_3: Los contenidos se contextualizan con recursos y visualizaciones.
2. Indicadores relativos a la componente '*tiempo*':

- M_4: El tiempo dedicado a cada sección está adecuado a su dificultad.
- M_5: La temporalización propuesta por el libro de texto es factible.

A parte de lo mencionado en el Capítulo 4 y anteriormente, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones de cara al análisis de la idoneidad mediacional:

En ambos libros se tiene que el recurso temporal es difícil de evaluar dado que no se dispone de una ruta sugerida de temporalización, así que se va a evaluar en función de su extensión (y teniendo en cuenta que los contenidos según el currículo son de por sí abultados).

La editorial Edebé pone a su disposición recursos digitales complementarios (aunque por lo que se pudo comprobar, eran bastante básicos) y una cantidad aceptable de tareas que requieren algún tipo de utensilio o herramienta (calculadoras, compás, ordenador, etc.). La contextualización de los contenidos es dispar según se enfoque. Por un lado, las fichas de contenidos están enfocadas a un contenido más reducido que luego puede ser de utilidad en sus situaciones de aprendizaje; mientras que por otro lado, a las situaciones de aprendizaje puede costar encontrarle la motivación matemática incluso con las indicaciones de las fichas relacionadas.

En cuanto al recurso temporal, al hacer una apuesta fuerte por sus situaciones de aprendizaje y al ser más escueto en sus contenidos, se puede decir que es una temporalización factible aunque mejorable (en el sentido de poder ajustar mejor el balance entre las situaciones de aprendizaje y la profundidad de los contenidos).

Por su parte, la editorial de McGraw-Hill también pone a su disposición recursos digitales complementarios y una cantidad aceptable de tareas que requieren algún tipo de útil. Además, la contextualización de los contenidos está bastante bien cubierta entre el contenido impreso y el complementario. Su temporalización a lo largo del curso es factible, aunque algo apretada por su esfuerzo en profundizar en los contenidos.

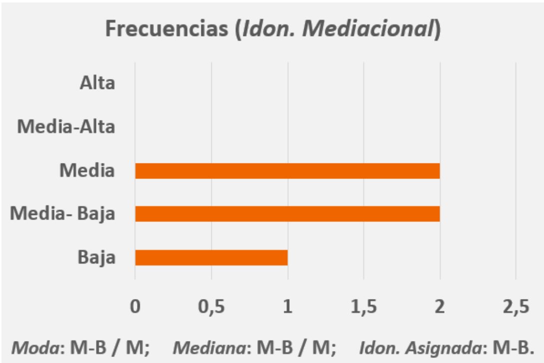
Tabla D.5

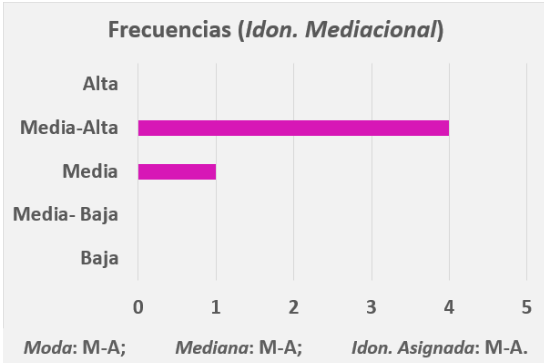
Indicadores de idoneidad mediacional de cada libro de texto. Los grados de idoneidad son 'Baja' (B)*,* 'Media-Baja' (M-B)*,* 'Media' (M)*,* 'Media-Alta' (M-A) *y* 'Alta' (A) *(Fuente: Elaboración propia).*

IDONEIDAD MEDIACIONAL					
Edebé			**McGraw-Hill**		
M_1: M-B;	M_2: M-B;	M_3: B;	M_1: M;	M_2: M-A;	M_3: M-A;
M_4: M;	M_5: M.		M_4: M-A;	M_5: M-A.	

Figura D.5

Diagramas de frecuencias de idoneidad en los indicadores de idoneidad mediacional obtenidos a partir de la Tabla D.5. A la izquierda, el diagrama de barras para el libro de Edebé; a la derecha, el de McGraw-Hill (Fuente: Elaboración propia).





D.6. Idoneidad ecológica.

La idoneidad ecológica está enfocada a evaluar el ajuste al proyecto educativo de un centro, de una institución educativa, de la sociedad y su legislación. Para su análisis se consideran los siguientes indicadores:

1. Indicadores relativos a la componente '*Adaptación curricular*':
   - Ec_1: Los objetivos, los contenidos, su desarrollo y su evaluación sigue las directrices curriculares.
2. Indicadores relativos a la componente '*Innovación*':
   - Ec_2: Se procura la innovación en tareas acompañada de una práctica reflexiva.
3. Indicadores relativos a la componente '*adaptación socioprofesional*':
   - Ec_3: Se disponen los contenidos de manera que contribuyan a una formación socioprofesional.
4. Indicadores relativos a la componente '*educación en valores*':
   - Ec_4: Los valores democráticos están contemplados en el desarrollo del libro de texto, evitando los estereotipos y discriminación de cualquier índole.
5. Indicadores relativos a la componente '*conexiones inter- e intradisciplinares*':
   - Ec_5: Los contenidos no se presentan como conocimiento estanco dentro de propia asignatura, de la matemática o del resto de disciplinas.

A parte de lo mencionado en el Capítulo 4 y anteriormente, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones de cara al análisis de la idoneidad ecológica:

El libro de texto de Edebé se adapta correctamente al RD 217/2022 y a la IC 1/2022, otorgando un espacio a la innovación relegado a las situaciones de aprendizaje, pero considerable; al igual que ocurre con la adaptación socio-profesional y la educación en valores. Aunque el contenido presenta una inter-disciplinaridad notable con las situaciones de aprendizaje, se puede dotar de un espacio mejorable a la intra-disciplinaridad y profundización de la propia matemática con mayor presencia de curiosidades matemáticas, hechos históricos matemáticamente relevantes y demás.

El libro de texto de McGraw-Hill se adapta correctamente al RD 217/2022 y a la IC 1/2022, dando espacio de manera intercalada a la innovación y a la adaptación socio-profesional; la educación en valores democráticos, en cambio, puede tener algo más de peso. Tanto la componente inter-disciplinar como la intra-disciplinar están considerablemente bien cubiertas.

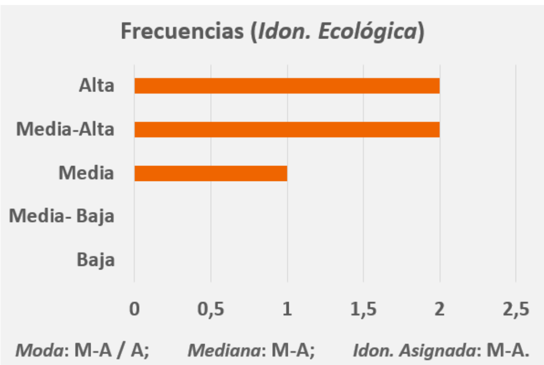
Tabla D.6

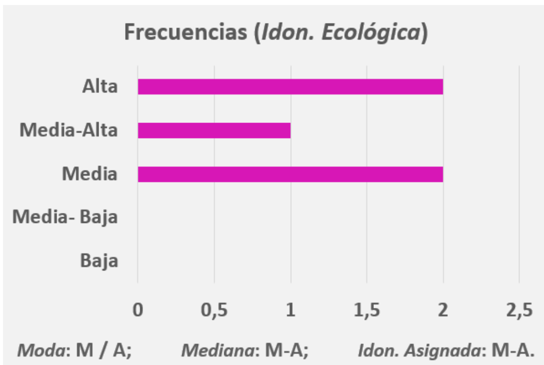
Indicadores de idoneidad ecológica de cada libro de texto. Los grados de idoneidad son 'Baja' *(*B*),* 'Media-Baja' *(*M-B*),* 'Media' *(*M*),* 'Media-Alta' *(*M-A*) y* 'Alta' *(*A*) (Fuente: Elaboración propia).*

IDONEIDAD ECOLÓGICA					
Edebé			McGraw-Hill		
Ec_1: A;	Ec_2: M-A;	Ec_3: A;	Ec_1: A;	Ec_2: M-A;	Ec_3: M;
Ec_4: A;	Ec_5: M.		Ec_4: M;	Ec_5: A.	

Figura D.6

Diagramas de frecuencias de idoneidad en los indicadores de idoneidad ecológica obtenidos a partir de la Tabla D.6. A la izquierda, el diagrama de barras para el libro de Edebé; a la derecha, el de McGraw-Hill (Fuente: Elaboración propia).





Anexo E

Ampliación Epistemológica.

La extensión del trabajo no permite un desarrollo más amplio y autocontenido del Capítulo 5; sin embargo, considero que tratar la geometría de manera clásica (sin recursos analíticos) es una empresa delicada y requiere un tratamiento más exhaustivo. Por eso, se pone a disposición del lector este anexo, enfocado a dar una ampliación del contenido desarrollado.

E.1. Comentario sobre la axiomática.

El enfoque de Buser y Costa (2018) está basado, según sus palabras, "en un sistema de axiomas clásico-moderno que supera algunas dificultades de sistemas axiomáticos completamente geométricos [...] donde usaremos un lenguaje conjuntista".

Básicamente, en un intento de arrancar relativamente rápido sin derivar a cuestiones sobre lógica, los autores introducen de manera conjuntista los *espacios métricos*, la *métrica euclídea* y los conceptos de *segmento* y *alineación de puntos*. A partir de ahí, comienzan el desarrollo geométrico-axiomático, estableciendo la existencia del plano euclídeo axiomáticamente y usando libremente los conceptos desarrollados.

E.2. Espacios métricos.

Esta sección desarrolla los conceptos de *métrica* y *espacio métrico*, que se introdujeron de manera previa al Axioma 1 del Capítulo 5. Se dispone también las definiciones de *puntos fijos* de una función y de *conjunto invariante* mediante una función (ver Definición E.2).

Definición E.1 *Sea X un conjunto no vacío. Diremos que la función $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una* ***métrica*** *en X (o una* ***distancia****) si verifica que:*

1. *Es no-negativa. Esto es, si* $d(x, y) \geq 0;\ \forall x, y \in X$*. Además, se tiene que* $d(x, y) = 0$ *si, y sólo si,* $y = x$*.*

2. *Es simétrica. Esto es, si* $d(x, y) = d(y, x);\ \forall x, y \in X$*.*

3. *Verifica la desigualdad triangular. Esto es,* $d(x, y) \leq d(x, z)+d(z, y);\ \forall x, y, z \in X$*.*

En tal caso, se dice que (X, d) *es un* ***espacio métrico****.*

Existe una larga lista de métricas. Algunas a destacar son la métrica trivial o discreta, la euclídea, la rectangular, la p-métrica, etc. De entre todas ellas, la métrica por excelencia es la métrica euclídea o d_E, que es la que representa nuestras medidas en la vida cotidiana. A continuación, se demuestra que $(\mathbb{R}^2, d_E)$ es espacio métrico.

Proposición E.1 *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*. Se verifica que:*

i) $2ab \leq a^2 + b^2$. (E.1)

ii) $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$. (E.2)

Demostración:

i) Dado que $(a - b)^2 \geq 0$, se sigue que $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ y de ello $2ab \leq a^2 + b^2$.

ii) Desarrollamos ambos miembros.

$$(ab + cd)^2 = (ab)^2 + (cd)^2 + 2(ab)(cd),$$
$$(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (ab)^2 + (cd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2.$$

Aplicamos la desigualdad (E.1) al sumando $2(ab)(cd) = 2(ad)(bc) \leq (ad)^2 + (bc)^2$, de modo que actualizando tenemos

$$(ab + cd)^2 \leq (ab)^2 + (cd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2,$$
$$(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (ab)^2 + (cd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2,$$

quedando probada la desigualdad (E.2). ■

Teorema E.1 *Dados* $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$ *dos puntos en* $\mathbb{R}^2$*, la aplicación definida por* $d_E(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ *es una métrica en* $\mathbb{R}^2$ *denominada* ***métrica euclídea*** *y* $(\mathbb{R}^2, d_E)$ *es un* ***espacio métrico euclídeo****.*

Demostración: Para demostrar que en efecto es una distancia, hay que verificar las tres condiciones de la Definición E.1.

1. La no-negatividad es consecuencia de que la aplicación esté bien definida.

$$\begin{aligned}(x_1 - y_1)^2, (x_2 - y_2)^2 \geq 0 \implies & (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \geq 0 \implies \\ \implies & \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0.\end{aligned}$$

Además, se verifica que

$$\begin{aligned} d_E(x,y)=0 \iff d_E^2=0 &\iff \underbrace{(x_1-y_1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(x_2-y_2)^2}_{\geq 0}=0 \iff \\ &\iff \begin{cases} x_1-y_1=0 \\ x_2-y_2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_2 \end{cases} \iff x=y. \end{aligned}$$

2. La simetría de la métrica se debe a la simetría de la potencia cuadrada respecto del elemento neutro.
$$d_E(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}=d_E(y,x).$$
3. Para demostrar la desigualdad triangular vamos a recurrir a la notación de las normas[1] y del producto escalar[2] por comodidad, ya que permite una escritura más compacta. Dados $x=(x_1,x_2)$ e $y=(y_1,y_2)$, es inmediato notar que $||x||^2=x\cdot x$ y que la distancia euclídea se puede expresar entonces como $d_E(x,y)=||x-y||$. Así pues, debemos demostrar que
$$d_E(x,y)=||x-y||\leq ||x-z||+||z-y||=d_E(x,z)+d_E(z,y).$$
Usando esta notación en la desigualdad (E.2) podemos expresarla como $(x\cdot y)^2\leq ||x||^2\,||y||^2$ y deducir, tomando raíces cuadradas, que $|x\cdot y|\leq ||x||\,||y||$. Por otro lado, tenemos que
$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= (x+y)\cdot(x+y)=x{\cdot}x+y{\cdot}y+2x{\cdot}y\leq ||x||^2+||y||^2+2|x\cdot y| \overset{\text{(E.1)}}{\leq} \\ &\leq ||x||^2+||y||^2+2||x||\,||y||=\Big(||x||+||y||\Big)^2 \end{aligned}$$
$$\Longrightarrow ||x+y||\leq ||x||+||y||. \tag{E.3}$$
Dado que $||x-y||=\Big|\Big|(x-z)+(z-y)\Big|\Big|$, basta con aplicar la desigualdad (E.3) para obtener la desigualdad triangular. ■

Conviene hacer notar que la distancia euclídea es una función continua y, además, invariante bajo rotaciones, reflexiones, traslaciones y composiciones de éstas. Todas ellas son aplicaciones denominadas *isometrías*, las cuales son formalizadas más adelante.

Proposición E.2 *Sean $x_1,\ldots,x_n\in X$ (con $n\geq 3$) elementos en un espacio métrico (X,d). Entonces se verifica que $d(x_1,x_n)\leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)$.*

Demostración: Basta con aplicar $n-2$ veces la desigualdad triangular, encajando elementos.
$$\begin{aligned} d(x_1,x_n) &\leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_n)\leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+d(x_3,x_n)\leq\ldots \\ &\leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n). \end{aligned}$$
■

Definición E.2 *Sea $f\colon X\longrightarrow X$ una aplicación en un conjunto no vacío. Entonces:*

- *Se dice que x **es un punto fijo de** f si verifica que $f(x)=x$.*

[1] Dado $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, se define su **norma** como $||x||=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$.
[2] Dados $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, se define su **producto escalar** como $x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2$.

- *Se dice que un conjunto $C \subset X$ **es invariante mediante** f (o que queda invariante) si verifica que $f(C) = C$.*

Conviene notar que un conjunto de puntos fijos de una función es siempre un conjunto invariante, pero no se cumple el recíproco. Es decir, un conjunto puede ser invariante mediante una función y no tener ningún punto fijo; por ejemplo, las traslaciones son un tipo de funciones (se ven más adelante) que no cuentan con puntos fijos, pero sí con conjuntos invariantes.

E.3. Segmentos, alineación y rectas. Punto medio.

Esta sección elabora los conceptos de *segmento*, *puntos alineados*, de *recta*, de *rectas paralelas* y rectas que *se cortan*. Dichos conceptos se pueden desarrollar a partir de los Axiomas 1 y 2, de modo que ya pasamos de una notación conjuntista (conjuntos en mayúscula, elementos en minúscula, etc.) a una notación geométrica que se usará en el resto del desarrollo (notando por Π al plano, sus puntos en mayúscula, las rectas en minúscula, etc.). También se definirá el concepto de *punto medio* (ver la Proposición E.3).

Definición E.3 *Dado (X, d) un espacio métrico, se pueden establecer los siguientes conceptos:*

- *Dados $x, y \in X$, denominaremos **segmento de extremos 'x' e 'y'**, y lo notaremos por $[x, y]$ al conjunto*
$$[x, y] = \Big\{p \in X \;/\; d(x, p) + d(p, y) = d(x, y)\Big\}.$$
*Al valor $d(x, y)$ lo denominaremos **longitud del segmento**.*
- *Tres elementos de X **están alineados** si existe una elección para la cual uno de los tres elementos está contenido en el segmento formado por los otros dos.*

Corolario E.1 *De la Definición E.3 se desprende que, para cualesquiera $x, y \in X$ se verifica que $[x, x] = \{x\}$ y que $[x, y] = [y, x]$.*

Definición E.4 *Sea $r \subset \Pi$ un subconjunto del plano. Diremos que r **es una recta** si verifica las siguientes condiciones:*

1. *r contiene al menos dos puntos distintos. Esto es, $\exists A, B \in r$ con $A \neq B$.*
2. *Dados tres puntos arbitrarios en r, éstos están alineados.*
3. *Dados $A, B \in r$ dos puntos distintos y dado $P \in \Pi$, se tiene que si A, B, P están alineados, entonces $P \in r$.*

Nótese además que con esta noción, la recta es una extensión del segmento en el sentido de que si $A, B \in r$ se tiene que $[A, B] \subset r$. También permite concluir que dados dos puntos distintos $A, B \in \Pi$, la recta que pasa por dichos puntos es única y la podemos notar como
$$r_{A,B} = \Big\{P \in \Pi \;/\; A, B, P \text{ están alineados}\Big\}.$$

Definición E.5 *Sean $r, s \subset \Pi$ dos rectas. Distinguimos las siguientes posiciones relativas entre ellas:*

*i) En caso de que r y s no tengan puntos en común diremos que ambas rectas son **paralelas disjuntas**.*

*ii) En caso de que r y s tengan un único punto en común diremos que ambas rectas **se cortan**.*

*iii) En caso de que r y s tengan más de un punto en común diremos que ambas rectas son **paralelas coincidentes**.*

Demostrar que dos rectas del plano sólo pueden generar esas tres situaciones es ligeramente delicado, principalmente por demostrar la existencia de rectas paralelas disjuntas. Es necesario recurrir a conceptos posteriores para demostrar que dicha posición relativa es posible.

Proposición E.3 *Sea $r \subset \Pi$ una recta y sean $A, B \in r$ dos puntos distintos. Entonces:*

*i) Existe un único punto $M \in r$ verificando que $d(A, M) = d(M, B)$. Además, se tiene que $M \in [A, B]$, se denomina **punto medio** del segmento $[A, B]$ y se nota por $M = Medio[A, B]$.*

ii) Existe un único punto $C \in r$ verificando que $B = Medio[A, C]$.

Demostración:

i) Consideremos la aplicación $f\colon [A, B] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(P) = d(A, P)$, $\forall P \in [A, B]$. Dado que d es continua en Π, se sigue que f es continua en $[A, B]$ con $f([A, B]) = [0, d(A, B)]$. El Teorema del Valor Intermedio asegura la existencia de algún $M \in [A, B]$ con $f(M) = \frac{d(A,B)}{2}$.

La unicidad del punto medio se debe a la alineación en el segmento. Supongamos que $\exists P, Q \in [A, B] \;/\; f(P) = \frac{d(A,B)}{2} = f(Q)$ y, supongamos sin pérdida de generalidad la siguiente alineación:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \underbrace{d(A, P)}_{=f(P)} + d(P, Q) + \underbrace{d(Q, B)}_{=d(A,B)-d(A,Q)} = \\ &= f(P) + d(P, Q) + d(A, B) - f(Q) = \\ &= \cancel{\frac{d(A, B)}{2}} + d(P, Q) + d(A, B) - \cancel{\frac{d(A, B)}{2}}. \end{aligned}$$

De ello se concluye que $d(P, Q) = 0$, significando que son el mismo punto.

ii) Basta con hacer un proceso análogo. ■

E.4. Semirrectas.

Esta sección define exclusivamente el concepto de *semirrecta*, el cual se desarrolla con ayuda del Axioma 3 de la Sección 5.1.

DEFINICIÓN E.6 *Sea $r \subset \Pi$ una recta del plano, sea $P \in r$ un punto en dicha recta y sea $s \subset \Pi$ una recta que corta a r en P. Consideremos, en virtud del Axioma 3, los semiplanos $\Pi_{1,s}, \Pi_{2,s}$. Entonces podemos determinar los conjuntos*

$$r^{\vdash}_{P,1} = r \cap \Pi_{1,s} \qquad \text{y} \qquad r^{\vdash}_{P,2} = r \cap \Pi_{2,s};$$

*los cuales denominaremos **semirrectas en** r **determinadas por** P y al punto P lo denominaremos **extremo** de la semirrecta.*

Es conveniente notar, aunque no se va a demostrar, que la definición de las semirrectas no depende de la recta s.

E.5. Isometrías. Consideraciones elementales.

Esta sección supone una primera toma de contacto con las *isometrías* y se desarrolla de manera previa al Axioma 4. Para un óptimo desarrollo de los conceptos relacionados con las isometrías, es conveniente esperar a la Sección E.7.

DEFINICIÓN E.7 *Una biyección $f\colon \Pi \longrightarrow \Pi$ es una **isometría** si conserva la distancias; esto es, si verifica que*

$$d\Big(f(P), f(Q)\Big) = d(P,Q); \ \forall P, Q \in \Pi.$$

Al conjunto de todas las isometrías del plano lo notaremos por $Isom(\Pi)$.

COROLARIO E.2 *Sea $Id_\Pi\colon \Pi \longrightarrow \Pi$ la aplicación identidad, la cual aplica cada punto en sí mismo. Se verifica que $Id_\Pi \in Isom(\Pi)$.*

TEOREMA E.2 *Sean $P, Q \in \Pi$ dos puntos distintos y sea $f \in Isom(\Pi)$. Entonces se tiene que:*

i) Las isometrías aplican segmentos en segmentos. En particular, la imagen de un segmento es el segmento delimitado por las imágenes de los extremos; es decir $f\Big([P,Q]\Big) = \Big[f(P), f(Q)\Big]$.

ii) Las isometrías aplican rectas en rectas. En particular, la imagen de una recta que pasa por dos puntos es la recta que pasa por las imágenes de dichos puntos; es decir $f(r_{P,Q}) = r_{f(P),f(Q)}$.

iii) Las isometrías aplican semiplanos (ver Axioma 3 de la Sección 5.1) en semiplanos determinados por rectas. En particular, si una recta r determina H^r_1, H^r_2, entonces $f\Big(H^r_i\Big) = H^{f(r)}_j$ para ciertos $i, j \in \{1,2\}$.

Demostración: Su demostración se debe básicamente a que tales conceptos son de naturaleza métrica. Dado que $[P,Q] = \Big\{X \in \Pi \ / \ d(P,X) + d(X,Q) = d(P,Q)\Big\}$ y que las isometrías conservan distancias, se sigue que

$$\forall X \in [P,Q], \ d\Big(f(P), f(X)\Big) + d\Big(f(X), f(Q)\Big) = d\Big(f(P), f(Q)\Big) \implies$$
$$\implies \forall X \in [P,Q], \ f(X) \in \Big[f(P), f(Q)\Big].$$

La conservación de rectas se debe a su definición mediante alineación, mientras que la conservación de semiplanos se debe a que se pueden caracterizar conjuntos para los cuales sus segmentos no cortan a la recta de separación. ■

Como consecuencia de que las isometrías preserven la alineación y las distancias se tiene la siguiente propiedad.

PROPOSICIÓN E.4 *Sea $f \in Isom(\Pi)$ una isometría del plano con dos puntos fijos A, B distintos. Entonces toda la recta $r_{A,B}$ es una recta de puntos fijos.*

Demostración: Por ser $f \in Isom(\Pi)$ se tiene que $f(r_{A,B}) = r_{f(A),f(B)} = r_{A,B}$; es decir, la recta debe quedar invariante por contener puntos fijos. Tomemos $P \in r_{A,B}$ un punto distinto de A y de B; entonces

$$d(A,P) \overset{f\in Isom}{=} d\Big(f(A), f(P)\Big) \overset{A \text{ pto. fijo}}{=} d\Big(A, f(P)\Big) \implies \begin{cases} \text{o bien } f(P) = P. \\ \text{o bien } A = medio\Big[P, f(P)\Big]. \end{cases}$$

Sin embargo, aceptar que P no es un punto fijo permite aplicar el mismo razonamiento con $d(B,P)$, llegando a la conclusión de que $B = medio\Big[P, f(P)\Big]$ y suponiendo una contradicción con la unicidad del punto medio. Por tanto, $f(P) = P,\ \forall P \in r_{A,B}$. ■

DEFINICIÓN E.8 *Sean $C_1, C_2 \subset \Pi$ dos conjuntos del plano. Diremos que ambos conjuntos son **congruentes** si $\exists f \in Isom(\Pi)$ verificando que $C_2 = f(C_1)$.*

Ahora, antes de completar la sección de isometrías elaborando más resultados y tipos de isometrías, es conveniente continuar asentando las bases. Es por ello que se recomienda volver al Axioma 4.

E.6. Reflexiones. Ortogonalidad y paralelismo.

Esta sección se desarrolla una vez se ha establecido el Axioma 5, tras lo cual es posible dar unos primeros resultados sobre *reflexiones* y desarrollar ampliamente los conceptos de *ortogonalidad* (ver Definición E.9), así como resultados de *paralelismo*.

PROPOSICIÓN E.5 *Sea $\sigma \in Isom(\Pi)$ una reflexión respecto a la recta r. Entonces se verifica que el segmento $[P, \sigma(P)]$ corta a r; en particular $medio\Big[P, \sigma(P)\Big] \in r,\ \forall P \in \Pi$.*

Demostración: Como las reflexiones son involutivas, se tiene que $\sigma\Big([P,\sigma(P)]\Big) = \Big[\sigma(P), \sigma\circ\sigma(P)\Big] = [\sigma(P), P]$; es decir, el segmento queda invariante y sus extremos se intercambian mediante la reflexión. Como además σ debe conservar las distancias, se sigue que:

$$medio[P,\sigma(P)] = X \ / \ d(X,P) = d\Big(X, \sigma(P)\Big) \implies$$
$$\implies \sigma(X) \in \Pi \ / \ d\Big(\sigma(X), \sigma(P)\Big) = d\Big(\sigma(X), P\Big).$$

Es decir, que la imagen del punto medio también equidista de los extremos, implicando que $\sigma\Big(medio[P,\sigma(P)]\Big) = medio[P,\sigma(P)]$. Por tanto, el punto medio es un punto fijo y por el Axioma 5, se concluye que $medio[P,\sigma(P)] \in r$. ■

Corolario E.3 *Las reflexiones intercambian los semiplanos determinados por el eje de reflexión. Esto es, sea $\sigma \in Isom(\Pi)$ una reflexión respecto a una recta $r \subset \Pi$ y sean H_1^r, H_2^r los semiplanos que dicha recta determina. Entonces, $\sigma(H_1^r) = H_2^r$ y viceversa.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad, consideremos $P \in H_1^r$ y su imagen $\sigma_r(P)$. Por la Proposición E.5 se tiene que $[P, \sigma_r(P)]$ interseca con r en su punto medio, lo cual implica que $\sigma(P) \in H_2^r$. Teniendo además en cuenta el Teorema E.2, se concluye que $\sigma_r(H_1^r) = H_2^r$. ■

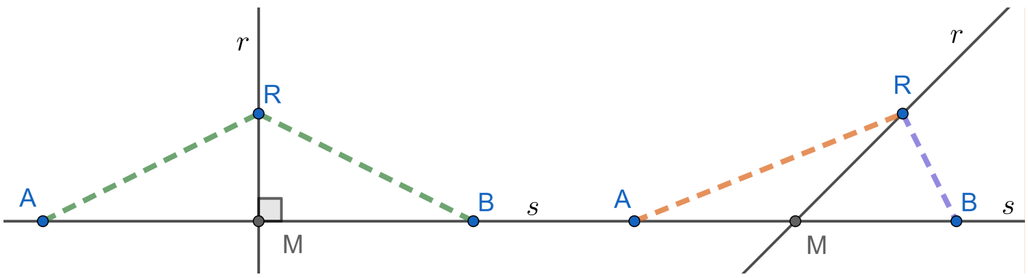
Definición E.9 *Sean $r, s \subset \Pi$ dos rectas distintas que se cortan en un punto $M \in \Pi$. Diremos que r* ***es ortogonal a*** *s, y lo notaremos por $r \perp s$ o $r \perp_M s$, cuando verifiquen que*

$$\forall R \in r,\ \forall A, B \in s \text{ con } \big(A \neq B\big) \wedge \big(M = medio[A, B]\big) \implies d(A, R) = d(B, R). \quad \text{(E.4)}$$

La Figura E.1 se puede consultar para mayor claridad; donde conviene recalcar que, para indicar gráficamente la ortogonalidad, se remarca el ángulo con un cuadrado pequeño tal y como se muestra en la misma figura.

Figura E.1

A la izquierda, dos rectas ortogonales mostrando la condición (E.4). A la derecha, dos rectas no ortogonales ya que no cumplen la condición (E.4) (Fuente: Elaboración propia).



Corolario E.4 *Las isometrías preservan la ortogonalidad entre rectas. Es decir, si $r \perp_P s$ y $f \in Isom(\Pi)$, entonces $f(r) \perp_{f(P)} f(s)$.*

Demostración: Trivial. Es consecuencia de que las isometrías conserven distancias, rectas y puntos medios. ■

Cabe destacar que la definición de ortogonalidad y la relación (E.4) indica que los puntos de una recta s ortogonal a otra recta r equidistan de cualquier segmento en r que esté centrado en el punto de intersección. No obstante, no afirma que todos los puntos equidistantes estén en s. Para ello es necesario el resultado que sigue.

Teorema E.3 *Sean $r \perp_M s$ dos rectas del plano y sean $A, B \in r$ dos puntos distintos verificando que $M = medio[A, B]$. Entonces*

$$s = \Big\{X \in \Pi \,/\, d(A, X) = d(X, B)\Big\}.$$

Demostración: Se puede demostrar mediante doble inclusión. Que todos los puntos de s equidistan de $A, B \in r$ es consecuencia de la Definición E.9. De modo que basta con demostrar que ningún punto de fuera equidista.

La recta s determina dos semiplanos Π_1^s y Π_2^s, con $A, B \in r$ situados en semiplanos opuestos. Sea $X \in \Pi \backslash s$, y supongamos que $A \in \Pi_1^s$, mientras que $X, B \in \Pi_2^s$. Entonces $[A, X]$ corta con s, mientras que $[X, B] \subset \Pi_2^s$. Sea $S = [A, X] \cap s$, por ser $s \perp_M r$ se tiene que $d(A, S) = d(S, B)$ y por tanto:

$$d(A, X) = d(A, S) + d(S, X) = d(B, S) + d(S, X) \overset{(*)}{\geq} d(B, X),$$

donde en (*) se está aplicando la desigualdad triangular. Como además $S \notin [B, X]$, se sigue que la desigualdad es estricta y se concluye que X no equidista de A y B. ■

Con este resultado demostrado ya sí que se puede identificar la recta ortogonal s como el *lugar geométrico* de puntos de Π que equidistan de cualquier par de puntos $A, B \in r$ que tengan a M por punto medio.

Teorema E.4 *Sean $r, s \subset \Pi$ dos rectas que se cortan. Dichas rectas son ortogonales si, y sólo si, una es invariante mediante la reflexión que tiene por eje a la otra recta. Esto es, dadas rectas que se cortan, $r \perp s \iff \sigma_r(s) = s$.*

Demostración: Veamos primero que $r \perp s \implies \sigma_r(s) = s$.

Como $r \perp s$, podemos considerar M la intersección entre ambas rectas y dos puntos distintos $P, Q \in r$ con $M = medio(P, Q)$; de modo que s sea el conjunto de puntos equidistantes de P y Q. Entonces $\sigma_r(s)$ es el conjunto de puntos equidistantes de $\sigma_r(P) = P$ y de $\sigma_r(Q) = Q$; es decir, que $\sigma_r(s)$ sigue siendo el conjunto de puntos equidistantes a ambos, concluyendo que s es invariante mediante σ_r.

Veamos ahora la otra implicación; partamos de que las rectas r y s se cortan y que $\sigma_r(s) = s$. Consideremos entonces M' el punto de corte entre ambas rectas y fijemos $P', Q' \in s$ con $M' = medio(P', Q')$. Como s es invariante mediante σ_r y P', Q' están escogidos de modo que tengan a $M' \in r$ por punto medio, se tiene que $\sigma_r(P') = Q'$ y, por ello

$$\forall R \in r, d\Big(R, P'\Big) = d\Big(\sigma_r(R), \sigma_r(P')\Big) \implies \forall R \in r, d(R, P') = d(R, Q').$$

Se concluye así que r y s verifican la relación (E.4) y por tanto, $r \perp s$. ■

Teorema E.5 *Sea $r \subset \Pi$ una recta del plano y sea $P \in \Pi$ un punto exterior a ella. Entonces existe una única recta $s \perp r$ que pasa por P.*

Demostración: Sea $P \in \Pi \backslash r$ un punto cualquiera, consideremos $\sigma = \sigma_r \in Isom(\Pi)$ la reflexión respecto dicha recta y construyamos $s = r_{P,\sigma(P)}$. Claramente s es invariante mediante σ_r dado que $\sigma_r(s) = \sigma_r(r_{P,\sigma(P)}) = r_{\sigma(P),P} = r_{P,\sigma(P)} = s$. Por el Teorema E.4, ello implica que $s \perp r$. La unicidad es consecuencia de que la recta se construye a partir de dos puntos: P y $\sigma_r(P)$. ■

Corolario E.5 *Sea $r \subset \Pi$ una recta del plano. Entonces la reflexión de eje r es única y la notaremos como σ_r.*

Demostración: Supongamos que es posible definir dos reflexiones respecto a r que vamos a notar como σ y $\widetilde{\sigma}$. Por definición, ambas deben dejar fijo al eje de reflexión; pero al ser aplicaciones distintas, debe existir algún punto en $\Pi \backslash r$ para el cuál ambas reflexiones actúen de manera distinta.

Sea $P \in \Pi \backslash r$, consideremos $s \perp r$ pasando por P (tal recta es única por el Teorema E.5) y consideremos $P' \in s$ el punto que hace que r y s intersequen en $medio[P, P']$. El Teorema E.4 asegura que s es invariante mediante reflexiones de eje r, de modo que $\sigma(P), \widetilde{\sigma}(P) \in s$. La Proposición E.5, junto con la unicidad del punto medio, sólo deja como salida que $\sigma(P) = P' = \widetilde{\sigma}(P)$; probando que ambas reflexiones son idénticas en todo el plano. ■

Teorema E.6 *Sea $r \subset \Pi$ una recta del plano y sea $R \in r$ un punto en ella. Entonces existe una única recta $s \perp_R r$.*

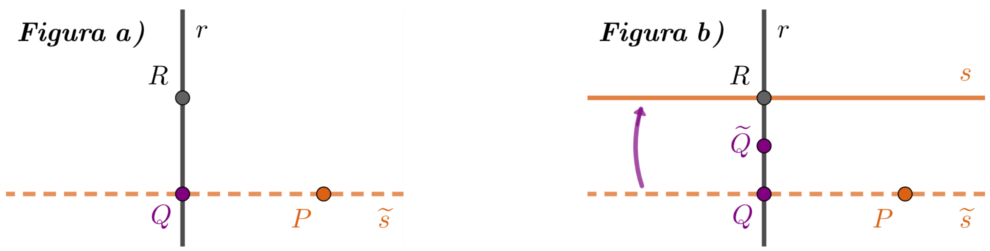
Demostración: Basta con tomar $P \in \Pi \backslash r$ un punto auxiliar, considerar la recta $\widetilde{s}$ perpendicular a r que pasa por P (Teorema E.5) y tomar Q como el punto de intersección entre ambas rectas. Pueden ocurrir dos situaciones: o $Q = R$ (en tal caso habríamos terminado y tendríamos $s = \widetilde{s}$), o $Q \neq R$.

En este último caso basta con construir $\widetilde{Q} = medio[Q, R]$ y aprovechar el Axioma de movilidad (Axioma 4 de la Sección 5.1) para asegurar la existencia de $f \in Isom(\Pi)$ con $f(\widetilde{Q}) = \widetilde{Q}$ y $f(Q) = R$. Dado que las isometrías mandan rectas en rectas y que f intercambia $Q, R \in r$, tenemos que $f(r) = r$; pero como además preservan la ortogonalidad (Corolario E.4), se concluye que $\widetilde{s} \perp_Q r$ se transforma en $f(\widetilde{s}) \perp_{f(Q)} f(r)$ o, equivalentemente, en $f(\widetilde{s}) \perp_R r$. Así pues, habríamos construido la recta deseada como $s = f(\widetilde{s})$.

La unicidad de dicha recta se puede justificar mediante la caracterización de la recta ortogonal como lugar geométrico (Teorema E.3). ■

Figura E.2

Esquema auxiliar para la demostración del Teorema E.6. En la Figura a) se muestra la perpendicular por un punto exterior a r; en la Figura b) se muestra cómo la isometría creada genera la recta s. (Fuente: Elaboración propia).



El siguiente resultado sobre paralelismo es necesario destacarlo antes de plantear el Axioma 6 de la Sección 5.1, dado que afirma la existencia de las paralelas. También vamos a estandarizar la notación de rectas paralelas, independientemente de que sean disjuntas o coincidentes. Así pues, dadas $r, s \subset \Pi$ dos rectas paralelas del plano, las notaremos como $r \parallel s$.

TEOREMA E.7 *Sea $r \subset \Pi$ una recta del plano y sea $P \in \Pi \backslash r$ un punto exterior a ella. Entonces existe la recta $s \parallel r$ que pasa por P.*

Demostración: Por el Teorema E.5, podemos construir la recta auxiliar $\widetilde{r} \perp r$ que pasa por P; mientras que por el Teorema E.6 podemos construir la recta $s \perp_P \widetilde{r}$.

Sólo queda comprobar que $r \cap s = \emptyset$ para probar que son paralelas. No obstante, suponer que dichas rectas se pueden cortar en algún punto supondría que $\widetilde{r}$ admite dos rectas ortogonales pasando por un mismo punto y contradiciendo la unicidad del Teorema E.5. ■

Este resultado es igualmente válido si $P \in r$ con la trivialidad de que, en tal caso, se tendría que $s = r$. Más interesante es el siguiente hecho, que se desprende de la misma demostración.

COROLARIO E.6 *Dos rectas ortogonales a una misma recta son paralelas entre sí. Es decir, dadas $r, s, t \subset \Pi$ tres rectas con $r \perp t$ y $s \perp t$; entonces, $r \parallel s$.*

El siguiente es el último resultado sobre paralelismo y se desarrolla con el Axioma de las paralelas ya establecido.

TEOREMA E.8 *Sean $r, s \subset \Pi$ dos rectas paralelas entre sí. Entonces cualquier recta $t \perp r$ verificará que $t \perp s$.*

Demostración: Sea $R \in r$ un punto arbitrario y construyamos $t \perp_R r$. Consideremos $S \in s$ un punto arbitrario y construyamos una recta auxiliar $a \perp_S t$. Por el Corolario E.6, tenemos que $a \parallel r$ con $S \in a$. Por el Axioma 6, $a = s$ dado que ambas son paralelas a r pasando por S. ■

E.7. Ampliación sobre isometrías.

E.7.1. Relativo a reflexiones.

Haciendo un poco de recopilación, tenemos que las reflexiones son isometrías con una recta de puntos fijos (el eje de reflexión), son funciones involutivas, cualquier punto y su imagen determinan una recta ortogonal al eje de reflexión y que, además, intercambian los semiplanos determinados por dicho eje.

TEOREMA E.9 *Sea $f \in Isom(\Pi)$ una isometría con dos puntos fijos A y B (distintos) y sea $r = r_{A,B}$. Entonces, o bien $f = \sigma_r$, o bien $f = Id_\Pi$.*

Demostración: Por la Proposición E.4 tenemos que toda $r_{A,B}$ queda fija mediante f. Estudiemos cómo actúa sobre los puntos que no están en dicha recta.

Para cualquier $P \in \Pi \backslash r_{A,B}$ se considera la recta s que pasa por P y verifica $s \perp r_{A,B}$ (notemos por R al punto de corte entre ambas rectas). Ello supone que s es invariante mediante f por el Teorema E.4 y, como f debe conservar las distancias, deja como únicas opciones:

- $d(P,R) = d\big(f(P),R\big)$ porque $f(P) = P$.
- $d(P,R) = d\big(f(P),R\big)$ porque $f(P) = \sigma_r(P)$.

Concluyendo que las únicas dos opciones son $f = Id_\Pi$ o $f = \sigma_r$. ■

COROLARIO E.7 *Sea $f \in Isom(\Pi)$ una isometría que deja fijos tres puntos no alineados. Entonces $f = Id_\Pi$.*

Demostración: Sean P_1, P_2 dos de los puntos fijos de la isometría f. Por el Teorema E.9 tenemos que f sólo puede ser la identidad o una reflexión; pero cuenta con un tercer punto fijo P_3 no alineado, lo cual es incompatible con ser una reflexión. Se concluye por tanto que $f = Id_\Pi$. ■

COROLARIO E.8 *Sean $P_1, P_2, P_3 \in \Pi$ tres puntos no alineados y sean $f_1, f_2 \in Isom(\Pi)$ isometrías del plano con $f_1(P_i) = f_2(P_i)$, para $i \in \{1,2,3\}$. Entonces $f_1 = f_2$; es decir, ambas isometrías son la misma.*

Demostración: Como $Isom(\Pi)$ tiene estructura de grupo, tenemos que la composición $g = f_2^{-1} \circ f_1 \in Isom(\Pi)$ con $g(P_i) = P_i$ para $i \in \{1,2,3\}$. Dado que g tiene 3 puntos fijos, el Corolario E.7 determina que g debe ser la identidad, lo que implica que $f_2^{-1} \circ f_1 = Id_\Pi$ o, equivalentemente, $f_1 = f_2$. ■

E.7.2. Relativo a rotaciones.

DEFINICIÓN E.10 *Sean $r, s \subset \Pi$ dos rectas del plano que se cortan en un punto $P \in \Pi$. Llamaremos **rotación centrada en** P a la isometría $\rho_P = \sigma_s \circ \sigma_r$.*

Conviene notar que las rotaciones, así presentadas, no se definen mediante un ángulo de giro (ni siquiera es posible puesto que aún no se ha definido el concepto). No obstante, nos es de sobra conocido que sí que hay un ángulo de giro, uno de los formados por las rectas r y s de su definición.

PROPOSICIÓN E.6 *Sea $\rho_C \in Isom(\Pi)$ una rotación de centro C. Su único punto fijo es C.*

TEOREMA E.10 *Sea $\rho_C \in Isom(\Pi)$ una rotación de centro $C \in \Pi$ y sea $r \subset \Pi$ una recta con $C \in r$. Entonces existen dos únicas rectas $s, t \subset \Pi$ que pasan por C y que verifican que $\rho_C = \sigma_s \circ \sigma_r = \sigma_r \circ \sigma_t$.*

E.7.3. Relativo a traslaciones.

DEFINICIÓN E.11 *Sean $r \parallel s$ dos rectas del plano y sea $t \perp r$ una recta ortogonal. Llamaremos **traslación de dirección** t a la isometría $\tau_t = \sigma_s \circ \sigma_r$.*

PROPOSICIÓN E.7 *Sea $\tau_t \in Isom(\Pi)$ una traslación de dirección t. Entonces τ_t no tiene puntos fijos, pero t y cualquier recta paralela a ella son invariantes mediante τ_t.*

PROPOSICIÓN E.8 *Una recta y su imagen mediante una traslación son paralelas entre sí. Esto es, sea $r \subset \Pi$ una recta arbitraria y sea $\tau_s \in Isom(\Pi)$. Entonces $\tau_s(r) \parallel r$.*

Conviene notar que las traslaciones, así presentadas, no están definidas mediante un vector de traslación (ni siquiera está definido aún el concepto). No obstante, sabemos que sí que hay un vector de traslación: aquel cuya dirección está determinada por t y su longitud es el doble de la distancia entre las rectas r y s de su definición.

E.7.4. Relativo a reflexiones centrales.

DEFINICIÓN E.12 *Sean $r \perp_R s$, denominaremos **reflexión central respecto** R (o **media vuelta de centro** R) a la rotación $\sigma_R = \sigma_s \circ \sigma_r$.*

PROPOSICIÓN E.9 *Sea $P \in \Pi$ un punto del plano y sea $\sigma_P \in Isom(\Pi)$ la reflexión central respecto P. Entonces:*

i) *σ_P es involutiva. Esto es, $\sigma_P \circ \sigma_P = Id_\Pi$.*

ii) *P es el único punto fijo de σ_P.*

iii) *Dado $X \in \Pi$ un punto arbitrario, se tiene que $P = medio\Big[X, \sigma_P(X)\Big]$.*

iv) *Para cualquier par de rectas $r_1 \perp_P r_2$ se tiene que $\sigma_P = \sigma_{r_1} \circ \sigma_{r_2}$.*

v) *Dada $r \subset \Pi$ una recta arbitraria, se tiene que $\sigma_P(r) \parallel r$.*

E.7.5. Relativo a reflexiones con deslizamiento.

DEFINICIÓN E.13 *Sean σ_r, τ_r una reflexión de eje r y una traslación de dirección r, respectivamente. Entonces, a la composición $\varphi_r = \tau_r \circ \sigma_r$ la denominamos **reflexión con deslizamiento** respecto el eje r.*

COROLARIO E.9 *Sea $\varphi_r \in Isom(\Pi)$ una reflexión con deslizamiento respecto al eje r. Entonces la recta r es el conjunto invariante mediante φ_r.*

E.8. Ángulos.

DEFINICIÓN E.14 *Sean $r, s \subset \Pi$ dos rectas con, al menos, un punto V en común. Sean $r^{\vdash}_{1,V}$, $r^{\vdash}_{2,V}$, $s^{\vdash}_{1,V}$ y $s^{\vdash}_{2,V}$ cada una de las semirrectas determinadas por V en r y s, respectivamente. Denominaremos **ángulo** a cualquiera de los pares no ordenados $\{r^{\vdash}_{i,V}, s^{\vdash}_{j,V}\}$, a V lo denominaremos **vértice del ángulo**, mientras que a las semirrectas $r^{\vdash}_{i,V}, s^{\vdash}_{j,V}$ las denominaremos **lados del ángulo**.*

En caso de considerar únicamente las semirrectas en r, pueden darse dos situaciones:

- *El ángulo $\{r^{\vdash}_{i,V}, r^{\vdash}_{i,V}\}$ para cierto $i \in \{1,2\}$, al cual denominaremos **ángulo nulo**.*
- *El ángulo $\{r^{\vdash}_{1,V}, r^{\vdash}_{2,V}\}$, al cual denominaremos **ángulo llano**.*

Respecto a la notación, hay varias que suelen aparecer con frecuencia; por ejemplo, $\angle\{r_i, s_j\}$, $\angle V$ o $\widehat{V}$. Es interesante notar que en geometría clásica no se usa la noción de *ángulo* como *medida*, sino como objeto geométrico.

Otro detalle a remarcar es que, al considerar el ángulo como pares no ordenados de semirrectas, el ángulo llano describe en verdad a la propia recta. Para hacer uso del ángulo llano como *medida* o "región del plano" es necesario determinar un elemento del semiplano al que se refiere; si no, podría referirse indistintamente a cualquiera de los dos.

DEFINICIÓN E.15 *Sean $\widehat{V} = \{r^{\vdash}_{1,V}, s^{\vdash}_{1,V}\}$ y $\widehat{A} = \{a^{\vdash}_{1,A}, b^{\vdash}_{1,A}\}$ dos ángulos de vértices V y A, respectivamente. Diremos que dichos ángulos son **congruentes**, y lo notaremos por $\widehat{V} = \widehat{A}$, si existe una isometría entre ambos. Esto es,*

$$\widehat{V} = \widehat{A} \iff \exists f \in Isom(\Pi) \ / \ f\Big(\{r^{\vdash}_{1,V}, s^{\vdash}_{1,V}\}\Big) = \{a^{\vdash}_{1,A}, b^{\vdash}_{1,A}\}.$$

COROLARIO E.10 *Sean $\widehat{A} = \widehat{V}$ ángulos congruentes mediante la isometría $f \in Isom(\Pi)$. Entonces $f(A) = V$.*

COROLARIO E.11 *Todos los ángulos nulos son congruentes. Asimismo, todos los ángulos llanos son congruentes.*

TEOREMA E.11 *Sean $r, s \subset \Pi$ dos rectas que se cortan en V. Sean $r^{\vdash}_{1,V}, r^{\vdash}_{2,V}, s^{\vdash}_{1,V}$ y $s^{\vdash}_{2,V}$ las semirrectas determinadas por V en r y en s, respectivamente. Entonces el ángulo $\angle\{r^{\vdash}_{1,V}, s^{\vdash}_{1,V}\}$ es congruente con $\angle\{r^{\vdash}_{2,V}, s^{\vdash}_{2,V}\}$, el ángulo $\angle\{r^{\vdash}_{1,V}, s^{\vdash}_{2,V}\}$ es congruente con $\angle\{r^{\vdash}_{2,V}, s^{\vdash}_{1,V}\}$ y diremos que dichos pares de ángulos son **opuestos por el vértice** V.*

Demostración: Basta con considerar la reflexión central respecto a V. ■

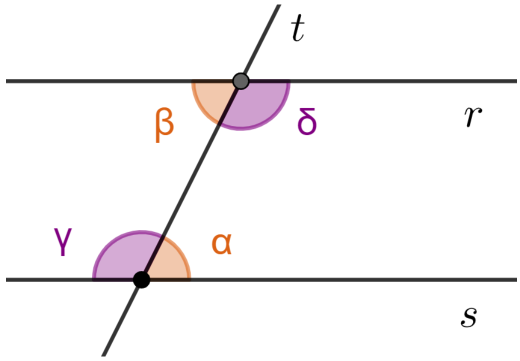
DEFINICIÓN E.16 *Sean $r, s \subset \Pi$ dos rectas ortogonales con $r \perp_V s$ y sean $r^{\vdash}_{1,V}, r^{\vdash}_{2,V}, s^{\vdash}_{1,V}$ y $s^{\vdash}_{2,V}$ las semirrectas determinadas por V en r y en s. Al ángulo $\angle\{r^{\vdash}_{1,V}, s^{\vdash}_{1,V}\}$ lo denominaremos **ángulo recto**.*

TEOREMA E.12 *Todos los ángulos rectos son congruentes. En particular, las rectas $r \perp_V s$ forman cuatro ángulos rectos.*

La definición dada de ángulo permite compararlos y sumarlos, aunque no sean medidas. Para ello, se requiere previamente definir los conceptos de '*interior*' y '*exterior*' del ángulo en función de los semiplanos que determinan. Por no alargarlo, no se incluirán dichos conceptos.

DEFINICIÓN E.17 *Sean $r, s \subset \Pi$ dos rectas paralelas y sea $t \subset \Pi$ una recta que corta a ambas en los puntos R y S, respectivamente. Denominaremos* ***ángulos alternos-internos*** *a cada par de ángulos situados entre las rectas paralelas, pero a distintos semiplanos de la recta t (tal y como se muestra en la figura Figura E.3).*

Figura E.3
En la imagen puede distinguirse una situación genérica de la Definición E.17 con cuatro ángulos, de los cuales α y β son un par de ángulos alternos-internos (marcados en naranja) mientras que γ y δ forman otro par (marcados en morado) (Fuente: Elaboración propia).



TEOREMA E.13 *Todo par de ángulos alternos-internos son congruentes.*

Demostración: Supongamos sin pérdida de generalidad que la situación es la descrita en la Figura E.3. Además, consideremos que:

- R genera las semirrectas $r_1^{\vdash}, r_2^{\vdash}, t_1^{\vdash}$ y $t_2^{\vdash}$. S genera las semirrectas $s_1^{\vdash}, s_2^{\vdash}, t_3^{\vdash}$ y $t_4^{\vdash}$.
- Las semirrectas $r_1^{\vdash}, s_1^{\vdash}$ quedan en el mismo semiplano respecto t. Las semirrectas $r_2^{\vdash}, s_2^{\vdash}$ quedan en el otro semiplano respecto t.
- $\alpha = \angle\{s_1^{\vdash}, t_3^{\vdash}\}$ y $\beta = \angle\{r_2^{\vdash}, t_2^{\vdash}\}$.

Sea entonces $M = medio[R, S]$ y consideremos σ_M la reflexión central respecto M.

○) Por ser $M \in t$, se tiene que $\sigma_M(t) = t$.

○) Por ser $M = medio[R, S]$, se tiene que $\sigma_M(R) = S$ y $\sigma_M(S) = R$.

○) $\sigma_M(r)$ es la recta paralela que pasa por $\sigma_M(R)$. Es decir, que $\sigma_M(r) = s$ y viceversa.

Lo único que falta para concluir la demostración es probar que $\sigma_M(\alpha) = \beta$ o viceversa. Pero como σ_M es una simetría central, los semiplanos generados por t también se ven intercambiados, de modo que $\sigma_M(r_2^{\vdash}) = s_1^{\vdash}$. Sólo queda justificar que $\sigma_M(t_2) = t_3$, lo cual es inmediato al notar que $t = t_1^{\vdash} \cup [R, S] \cup t_4^{\vdash}$. ■

Anexo F

Complementos de la UD.

F.1. Metodología: Sistema de puntos.

En esta sección se establecen las bases del sistema de gamificación continua mencionado en la Subsección 7.5.3. Esta puntuación es una primera propuesta que surge como respuesta a actitudes y situaciones que observé a lo largo de la estancia prácticas.

Tabla F.1

Bases para la obtención de puntos en el sistema de gamificación continua (Fuente: Elaboración propia).

Descripción	Puntuación
1. Aportar ideas de valor que contribuyan a la elaboración de un concepto durante las sesiones dialógicas o a la resolución de ejercicios.	**+1 punto**
2. Salir voluntariamente a la pizarra para resolver ejercicios mandados para hacer en casa o en clase.	**+1 punto**
3. Trabajar eficazmente en equipo durante las actividades grupales y colaborativas, permitiendo y favoreciendo la participación de todos los integrantes, valorando todas las ideas que se plantean de forma razonada y adecuada, identificando adecuadamente los objetivos de la tarea y reflejando todo ello en su trabajo.	**+3 puntos**
4. Resolver satisfactoriamente dudas de compañeros.	**+1 punto**
5. Plantear dudas y situaciones que demuestren un dominio avanzado de los contenidos o enfoques originales.	**+1 punto**
6. Realizar a tiempo las tareas y ejercicios mandados tras una sesión de clase. Se deben realizar de manera completa y demostrando un esfuerzo real por intentar aquellos en los que tuviera dudas o dificultades.	**+2 puntos**

– Continúa en la siguiente página –

DESCRIPCIÓN	PUNTUACIÓN
7. Entrar con retraso a clase sin una causa auténticamente justificable.	**-2 puntos**
8. Negarse a participar con compañeros/as en un grupo o imposibilitar su normal funcionamiento.	**-5 puntos**
9. No presentar las tareas a tiempo.	**-1 puntos**
10. Mandar tareas que no corresponden.	**-3 puntos**
11. Presentar tareas incompletas o no hacer las debidas justificaciones y razonamientos en las tareas que lo requieran.	**-1 punto**
12. No completar una ficha personal.	**-5 puntos**
13. Tener faltas no justificadas.	**Inhabilita**

Este sistema puede requerir la edición de ciertos aspectos para evitar que se vuelva una mecánica contraproducente. Por ejemplo, pueden requerirse cambios de algunas puntuaciones o medidas para evitar que algunos discentes acaparen opciones, o que lleguen a acuerdos como inventarse dudas pactadas para obtener puntos. Igualmente, es posible ampliar las vías para modificar puntos según el grupo o la UD.

También conviene fomentar la participación de los alumnos y alumnas más introvertidos, procurando unas puntuaciones finales equilibradas y con una distribución normal. Evidentemente, la valoración debe estar adaptada en caso de contar con alumnado con algún tipo de dificultad de aprendizaje.

Por un lado, resulta evidente que todos los medios de obtener puntos tienen una finalidad didáctica y actitudinal (fomentar la participación, la autoconfianza, la colaboración y cooperación, incentivar el trabajo diario, la responsabilidad...). Por otro lado, las vías para perder puntos suponen generalmente una pérdida más notable (aunque conviene que sean medidas esporádicas para evitar la aversión por castigo).

La regla de inhabilitar la puntuación si se tienen faltas injustificadas puede ser una buena oportunidad de negociación en caso de tener alumnado conflictivo o absentista. Tanto los sistemas de '*economías de fichas*' como los '*contratos de contingencia*' son buenas técnicas con alumnado conflictivo (Cerezo Rusillo et al., 2022).

En cuanto a cómo gastar los puntos, antes del examen se debe hacer un recuento de cuántos tiene el alumnado para así poner a cada recurso un precio adecuado. Entre las ventajas disponibles se pueden plantear las siguientes (donde se especifica además un precio orientativo):

- Compensación de faltas ortográficas. $\longrightarrow 2$ *puntos*
- Pistas de un ejercicio al azar. $\longrightarrow 3$ *puntos*
- Pistas de un ejercicio concreto que escoja el discente. $\longrightarrow 5$ *puntos*
- Respuesta a una pregunta concreta que escoja el discente. $\longrightarrow 10$ *puntos*

- Revisión de un ejercicio al momento para confirmar si tiene fallos. $\longrightarrow 15$ *puntos*

Esta propuesta de precios podría ser válida en una UD donde el máximo alcanzable son 30 puntos, con una mayoría normal en torno a los 15 puntos y unos valores extremos cercanos a los 5 y 20 puntos.

F.2. Metodología: Ficha de reflexión personal.

Esta sección desarrolla de manera algo más concisa la metodología de la ficha personal mencionada en la Subsección 7.5.3. El formulario al completo se puede visualizar mediante la URL https://forms.gle/SVAtYjEPm3weUarY6.

Es habitual que parte del alumnado tenga dificultades de cara a la autoreflexión o que sea reacio a la comunicación con el docente. Es por esto que es necesario recalcar la sensación de espacio seguro con el formulario para ayudar a que el alumnado responda de manera sincera y la mecánica se vuelva efectiva. Para ello se va a prestar atención a dos aspectos, la intimidad y las primeras valoraciones.

Para fomentar la sensación de intimidad (a pesar de que se tratan de cuestionarios nominativos) se les hace saber que no se van a compartir sus respuestas con el resto de la clase. Sin embargo, no se plantea el formato anónimo por varios motivos; como evitar respuestas maliciosas, tener un registro de participación y que puede servir como vía para romper la barrera de comunicación con ciertos alumnos/as.

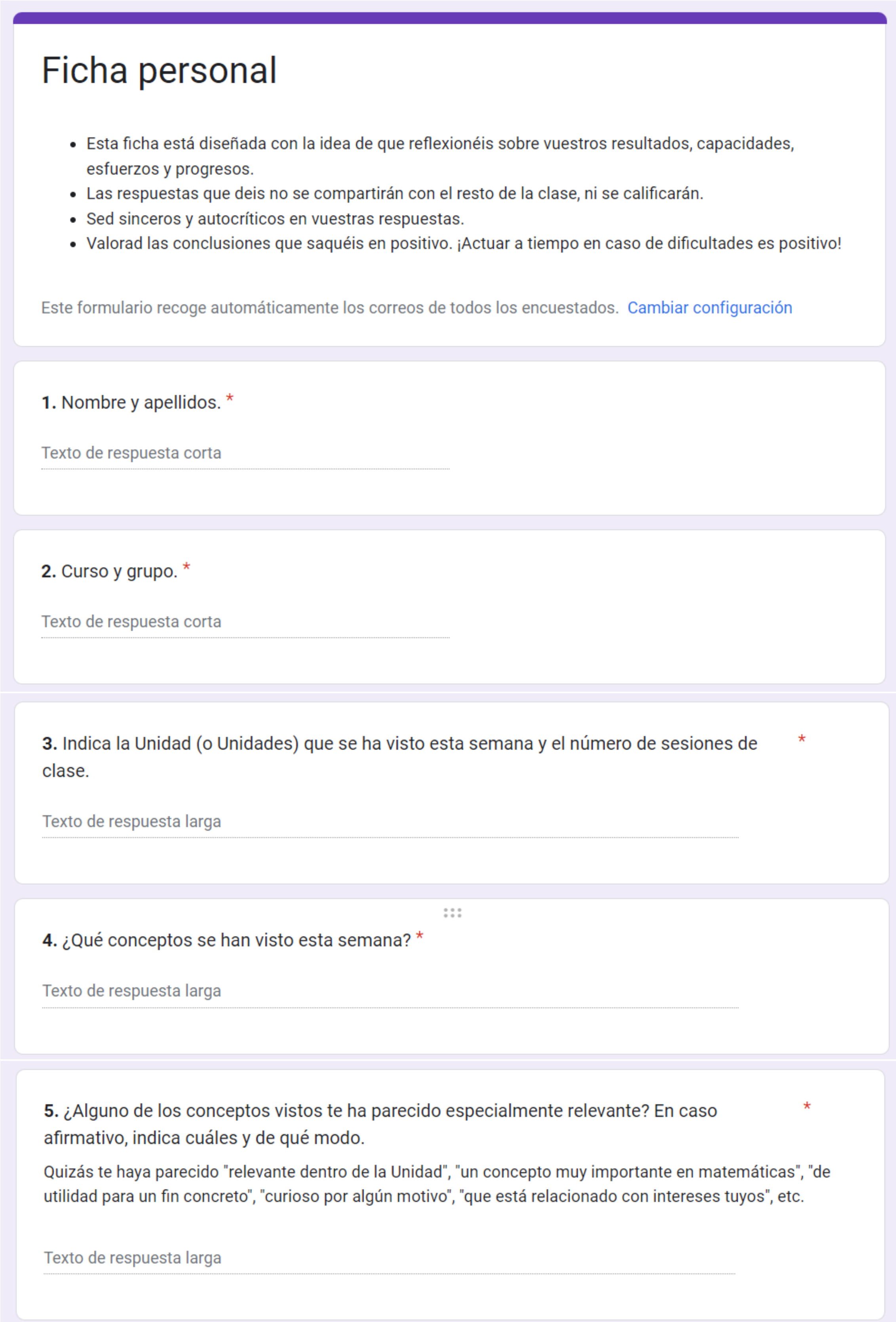
Comentar también que, para muchos y muchas, el mero hecho de saber que algo no va acompañado de una calificación ya les supone un alivio (al fin y al cabo, suele ser el principal motivo por el cual tienen que responder ante sus padres y madres). No obstante, la finalidad de tener dicha información es poder ayudarles, ya sea notando dificultades que podamos haber pasado por alto o intentando mejorar su capacidad de reflexión; y ello requiere hacer algún tipo de valoración.

Resulta conveniente hacer valoraciones en positivo para reforzar la sensación de logro. Para ello se puede hacer uso de frases como “*creo que lo que has hecho te ha servido para mejorar aquello que señalaste en tu ficha*” o “*me parece que has mejorado respecto la otra semana*”, que además ponen al alumnado como causa de su propia mejora. Esto puede ser particularmente importante al inicio para evitar una mayor barrera de entrada, pero es conveniente tenerlo en cuenta para cualquier intervención. Así pues, es igualmente conveniente que, en caso de tener que hacer sugerencias al respecto, sean siempre sutiles y de tal manera que puedan considerarlas una conclusión propia.

Como últimos comentarios, mencionar que se debe evitar convertirlo en una tarea tediosa (evitando hacer demasiado largo el formulario) y que debe realizarse con una frecuencia moderada (para que la reflexión tenga efecto y valor). A continuación, se incluyen imágenes reflejando las preguntas del formulario (ver Figura F.1 y Figura F.2).

Figura F.1

Primera muestra de la ficha personal del alumnado (Fuente: Elaboración propia).



Ficha personal

- Esta ficha está diseñada con la idea de que reflexionéis sobre vuestros resultados, capacidades, esfuerzos y progresos.
- Las respuestas que deis no se compartirán con el resto de la clase, ni se calificarán.
- Sed sinceros y autocríticos en vuestras respuestas.
- Valorad las conclusiones que saquéis en positivo. ¡Actuar a tiempo en caso de dificultades es positivo!

Este formulario recoge automáticamente los correos de todos los encuestados. Cambiar configuración

1. Nombre y apellidos. *

Texto de respuesta corta

2. Curso y grupo. *

Texto de respuesta corta

3. Indica la Unidad (o Unidades) que se ha visto esta semana y el número de sesiones de clase. *

Texto de respuesta larga

4. ¿Qué conceptos se han visto esta semana? *

Texto de respuesta larga

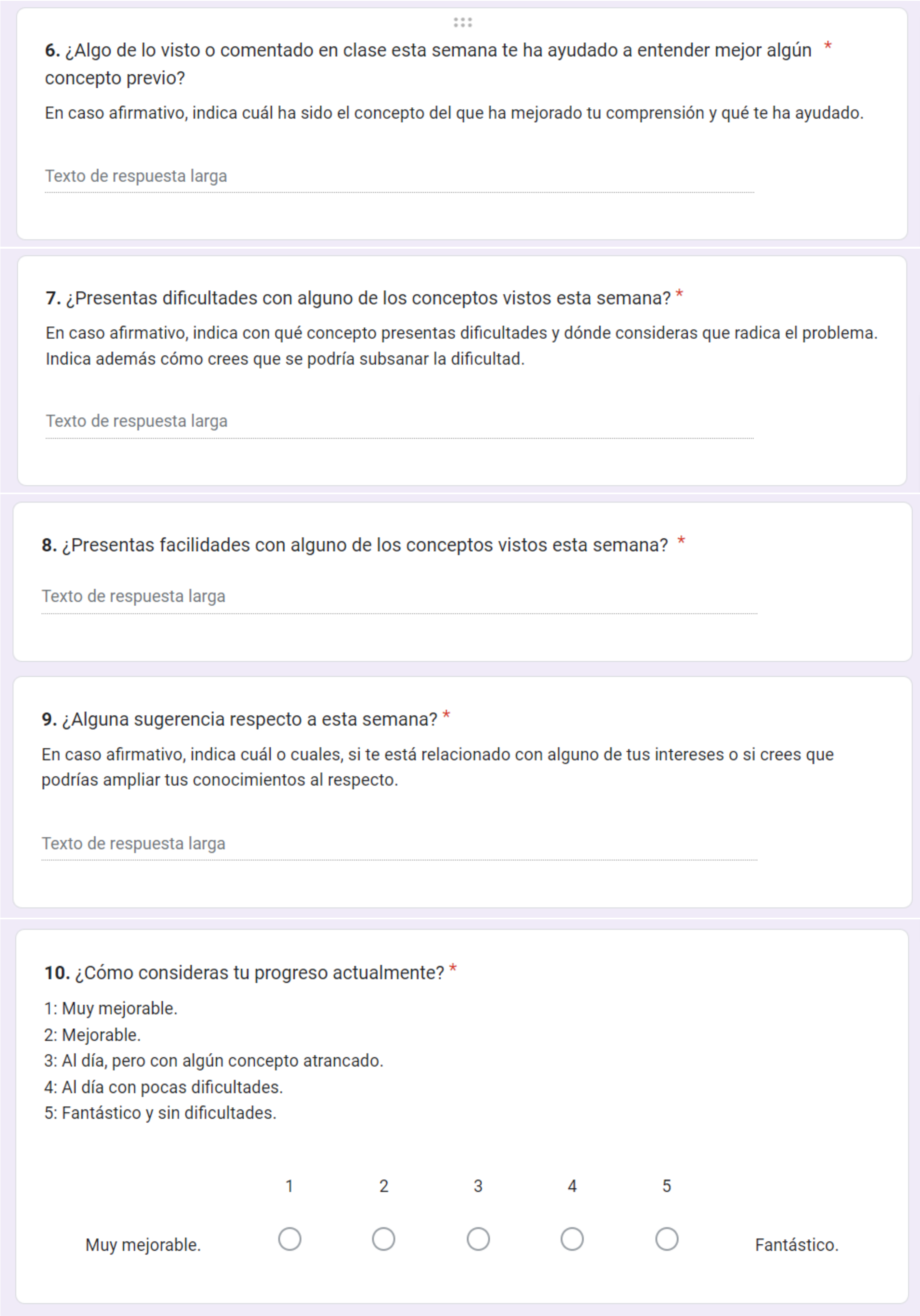
5. ¿Alguno de los conceptos vistos te ha parecido especialmente relevante? En caso afirmativo, indica cuáles y de qué modo. *

Quizás te haya parecido "relevante dentro de la Unidad", "un concepto muy importante en matemáticas", "de utilidad para un fin concreto", "curioso por algún motivo", "que está relacionado con intereses tuyos", etc.

Texto de respuesta larga

Figura F.2

Segunda muestra de la ficha personal del alumnado (Fuente: Elaboración propia).



6. ¿Algo de lo visto o comentado en clase esta semana te ha ayudado a entender mejor algún concepto previo? *

En caso afirmativo, indica cuál ha sido el concepto del que ha mejorado tu comprensión y qué te ha ayudado.

Texto de respuesta larga

7. ¿Presentas dificultades con alguno de los conceptos vistos esta semana? *

En caso afirmativo, indica con qué concepto presentas dificultades y dónde consideras que radica el problema. Indica además cómo crees que se podría subsanar la dificultad.

Texto de respuesta larga

8. ¿Presentas facilidades con alguno de los conceptos vistos esta semana? *

Texto de respuesta larga

9. ¿Alguna sugerencia respecto a esta semana? *

En caso afirmativo, indica cuál o cuales, si te está relacionado con alguno de tus intereses o si crees que podrías ampliar tus conocimientos al respecto.

Texto de respuesta larga

10. ¿Cómo consideras tu progreso actualmente? *

1: Muy mejorable.
2: Mejorable.
3: Al día, pero con algún concepto atrancado.
4: Al día con pocas dificultades.
5: Fantástico y sin dificultades.

	1	2	3	4	5	
Muy mejorable.	○	○	○	○	○	Fantástico.

F.3. Sesiones: Desarrollo detallado.

F.3.1. Sesión 1. Inicio de la UD. El concepto de polígono.

Tabla F.2

Expansión de la Tabla 7.5 y de la Sesión 1 de la UD (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 1. INICIO DE LA UD. EL CONCEPTO DE POLÍGONO.	
OBJETIVOS: O_1, O_2, O_8.	**COMPET. ESPECÍF.:** 1, 3, 5, 6, 8, 10.
DESCRIPT. OPERAT.: CCL1, CCL3, STEM1, STEM2, STEM4, CD1, CD2, CD3, CPSAA1, CPSAA3, CE2, CCEC1, CCEC4.	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN:** 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.2, 5.1, 5.2, 6.1, 6.3, 8.1, 8.2, 10.1, 10.2.

1. **Recepción:** A la par que se prepara el material de clase (ordenador del profesor, proyector, libro de texto, etc.), se le pide al alumnado que tome asiento y prepare su material. Este espacio se aprovechará también para ver si alguien tiene algo que compartir, ya sean dudas o algún otro aspecto (anécdotas, planes para esa semana, trabajo de otras asignaturas, etc.). *5min*

2. **Presentación del tema:** Inicialmente se presenta el índice del tema, detallando objetivos y conceptos que serán relevantes. Se les recordará la mecánica del sistema de puntos y de la ficha personal. *10min*

3. **Polígonos, poligonales y otras curvas:** Se repasan los conceptos de recta y curva (tratados en la UD previa). Se pregunta a modo de evaluación inicial rápida si conocen el concepto de '*polígono*' y se les plantea el reto de, entre toda la clase, llegar a una definición válida del concepto. También se busca alcanzar los conceptos de '*curva cerrada*', '*curva abierta*', '*poligonal*' y '*curva mixta*'.

   Debe evitarse el uso excesivo de valoraciones como "*mal*" o "*eso no vale*". En su lugar hay que plantear situaciones y ejemplos con preguntas guía con las que el alumnado sea crítico y refine las propuestas. Por ejemplo con "*¿se os ocurre algún caso en el que esa definición pueda no funcionar?*" o "*supongamos este caso, ¿valdría esa definición?*".

   En caso de notar fuertes dificultades, se intervendrá enfocando la atención en características clave, pero permitiendo aún su rol activo. *20min*

– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

SESIÓN 1. INICIO DE LA UD. EL CONCEPTO DE POLÍGONO.	
OBJETIVOS: O_1, O_2, O_8.	**COMPET. ESPECÍF.:** 1, 3, 5, 6, 8, 10.
DESCRIPT. OPERAT.: CCL1, CCL3, STEM1, STEM2, STEM4, CD1, CD2, CD3, CPSAA1, CPSAA3, CE2, CCEC1, CCEC4.	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN:** 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.2, 5.1, 5.2, 6.1, 6.3, 8.1, 8.2, 10.1, 10.2.

4. **Toma de apuntes y ejercicio en clase:** Llegados a una respuesta válida (o a la conclusión de que no es posible alcanzar tal objetivo), se pedirá a la clase que apunte la definición, explicando además cómo se nombran los polígonos en función del número de lados. A los conceptos anteriores se sumarán los conceptos de '*diagonal*', '*polígono cóncavo*' y '*polígono convexo*'. También se mandará el ejercicio 1.1 de clasificación de curvas para realizar en clase y comprobar así que han entendido la lección. *10min*

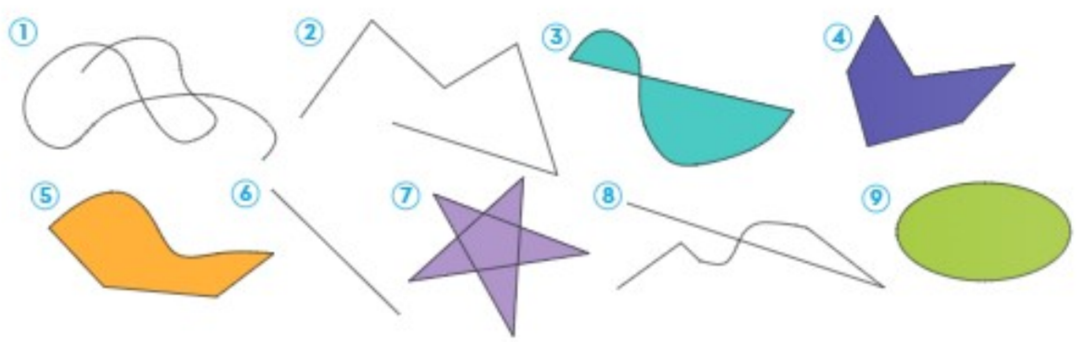
5. **Cierre de sesión:** El tiempo restante se dedicará a mencionar brevemente la implicación de las figuras planas en la ciencia, en el arte y en la naturaleza, entre otras. Se hará contextualizando en aspectos como la descripción de sistemas físicos y reales, tácticas de dibujo y diseño basadas en simplificar los modelos a dibujar en figuras planas para facilitar la labor, su presencia tanto en organismos como en sus construcciones (plantas, panales, etc.). Como tarea relacionada, se pedirá que busquen (de manera individual o en grupos de a lo sumo tres personas) información relacionada con esos temas o con otros de su interés.

   Se trasladará al alumnado que deben mirar en casa la sección de simetría del libro de texto y que cuentan con un documento sobre cómo diseñar una figura simétrica que deben leer para la siguiente clase. *10min*

EJERCICIOS, TAREAS & ACTIVIDADES:

- Ejercicio 1.1 (en clase). Ejercicios 1.2 y 1.3 (en casa).
- Buscar información sobre cómo las figuras planas están presentes en otros ámbitos de la vida o la ciencia. Grupos de 1 a 3 personas. La información debe estar elaborada y se compartirá en la plataforma de la asignatura. Fecha tope de entrega: 1 semana después.
- Lectura comprensiva de las secciones '*Simetría en las figuras planas*' y '*Polígonos regulares*' del libro de texto.
- Lectura comprensiva del recurso '*Elaboración de figuras mediante reflexiones*' disponible en la plataforma de la asignatura (ver Sección F.4).

***Ejercicio* 1.1** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022]. Observa las formas numeradas a continuación e indica cuáles son curvas, polígonos, poligonales o figuras mixtas.*



***Ejercicio* 1.2** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022]. Observa los siguientes polígonos y clasifícalos en función de su número de lados y en función de la amplitud de sus ángulos.*

***Ejercicio* 1.3** *[Fuente: Elaboración propia]. Dibuja un cuadrilátero cóncavo, otro convexo y señala sus diagonales. ¿Cuántas diagonales tiene? ¿Y un pentágono? ¿Y un hexágono? ¿Notas alguna relación entre el número de lados y el número de diagonales?*

F.3.2. Sesión 2. Simetrías reflexivas y polígonos regulares.

Tabla F.3

Expansión de la Tabla 7.6 y de la Sesión 2 de la UD (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 2. SIMETRÍAS REFLEXIVAS Y POLÍGONOS REGULARES.	
OBJETIVOS: O_2, O_3, O_8, O_{14}.	COMPET. ESPECÍF.: 1, 3, 5, 6, 8, 9.
DESCRIPT. OPERAT.: CCL1, STEM1, STEM3, STEM4, CPSAA1, CCEC1, CCEC4.	CRITERIOS DE EVALUACIÓN: 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.2, 5.1, 5.2, 6.3, 8.1, 9.1, 9.2.

1. **Recepción:** A la par que se prepara el material de clase (ordenador del profesor, proyector, libro de texto, etc.), se le pide al alumnado que tome asiento y prepare su material. Este espacio se aprovechará también para ver si alguien tiene algo que compartir, ya sean dudas o algún otro aspecto (anécdotas, planes para esa semana, trabajo de otras asignaturas, etc.). *5min*

2. **Revisión de '*simetría*' y '*polígono regular*':** De manera breve, y atendiendo a las dudas recogidas en caso de haberlas, se harán las explicaciones o aclaraciones pertinentes. Se preguntará si alguien es capaz de razonar la fórmula del ángulo formado entre ejes de simetría consecutivos y se justificará. A continuación, se reforzará la asimilación de conceptos mediante Kahoot! (u otra aplicación o tarea gamificada) en el que cada discente deberá:
   - Reconocer si las figuras mostradas son simétricas/polígonos regulares.
   - Reconocer si las rectas marcadas son eje de simetría o no.
   - Reconocer el número correcto de ejes de simetría en figuras varias.
   - Determinar el número de ejes de simetría en una figura a partir del ángulo entre dos ejes consecutivos o a partir del número de lados en polígonos regulares. *20min*

3. **Ampliación divulgativa:** De manera distendida, se plantearán hechos y curiosidades relativas a la simetría, procurando la aportación y participación de la clase. Por ejemplo, se puede mencionar la gran cantidad de construcciones simétricas así como la disposición simétrica en interiores de edificios (con la consecuente facilidad para la orientación que supone). También se puede recalcar la aparente simetría en organismos vivos, incluidas las personas (sería importante recalcar la palabra "aparente", pudiendo mostrar que tanto las personas como muchos organismos somos ligeramente asimétricos). También es posible enlazarlo con el arte o con su tarea de búsqueda sobre figuras planas, dado que también los elementos simétricos y asiméticos son muy utilizados para destacar figuras o transmitir mensajes. *15min*

– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

SESIÓN 2. SIMETRÍAS REFLEXIVAS Y POLÍGONOS REGULARES.	
OBJETIVOS: O_2, O_3, O_8, O_{14}.	COMPET. ESPECÍF.: 1, 3, 5, 6, 8, 9.
DESCRIPT. OPERAT.: CCL1, STEM1, STEM3, STEM4, CPSAA1, CCEC1, CCEC4.	CRITERIOS DE EVALUACIÓN: 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.2, 5.1, 5.2, 6.3, 8.1, 9.1, 9.2.

4. **Cierre de sesión:** Se comunicará al alumnado que, siguiendo las indicaciones del documento que revisaron, deberán diseñar una figura simétrica a partir de un patrón no simétrico. Para motivarlos y evitar que recurran a diseños extraordinariamente simplistas, se comentará que contarán con una rúbrica de evaluación y que sus diseños serán utilizados para decorar el aula o el pasillo, indicando de quién es cada dibujo.

   Como parte de las tareas para la siguiente sesión, deberán visualizar una serie de videotutoriales sobre la aplicación de geometría dinámica 'Geogebra', invitándoles a probarla libremente para que les vaya resultando familiar. Los tutoriales pueden subirse a la plataforma '*Edpuzzle*', la cual permite incrustarlos desde otras plataformas de vídeo como '*YouTube*', lleva un registro de las visualizaciones y permite incrustar preguntas en instantes concretos. *15min*

EJERCICIOS, TAREAS & ACTIVIDADES:

- Ejercicios 2.1 y 2.2.
- Diseño (en formato físico) de una figura simétrica de acuerdo a las indicaciones del recurso '*Elaboración de figuras simétricas*' (ver Sección F.5). Fecha tope de entrega: 1 semana después.
- Revisión de los videoturoriales sobre Geogebra designados. Fecha tope de visualización: hasta la sesión 4.

***EJEMPLO* 2.1** *[Fuente: Wikipedia, artículo "Facial symmetry"; Autoría fotográfica: Alex Dodge. Licencia CC BY 3.0]. En el centro, la foto original; a la izquierda, edición mostrando dos lados derechos; a la derecha, edición mostrando dos lados izquierdos.*

Ejercicio 2.1 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022. Reelaboración propia]. Observa las siguientes figuras e indica sus ejes de simetría en caso de tener alguno. Puedes ayudarte calcando las figuras y plegando el folio; al doblarlo notarás de inmediato si lo que has marcado son o no ejes de simetría. En caso de que hayas fallado algún eje, ¿qué propiedad geométrica es la que ha fallado? Exprésalo en términos matemáticos.*

Ejercicio 2.2 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022]. ¿Es posible que en un polígono regular de 15 lados su ángulo central mida 30°? ¿Qué polígono es el que tiene un ángulo central de 15°? Justifica las respuestas.*

F.3.3. Sesión 3. Triángulos. Notación y construcción.

Tabla F.4

Expansión de la Tabla 7.7 y de la Sesión 3 de la UD (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 3. TRIÁNGULOS. NOTACIÓN Y CONSTRUCCIÓN.	
OBJETIVOS: O_4, O_5, O_8, O_{10}.	**COMPET. ESPECÍF.: 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9.**
DESC. OPER.: CCL1, CCL3, STEM1, STEM2, STEM4, CD1, CD3, CPSAA1.	**CRIT. DE EVAL.: 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 3.1, 5.1, 7.1, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2.**

1. **Recepción:** A la par que se prepara el material de clase (ordenador del profesor, proyector, libro de texto, etc.), se le pide al alumnado que tome asiento y prepare su material. Este espacio se aprovechará también para ver si alguien tiene algo que compartir, ya sean dudas o algún otro aspecto (anécdotas, planes para esa semana, trabajo de otras asignaturas, etc.). *5min*

2. **Repasos y notación:** Si bien el triángulo es una figura conocida y sus propiedades más básicas deberían saberlas ya, es conveniente hacer un repaso rápido tras el cual se les mostrará una "demostración" de la suma de los ángulos de un triángulo (ver Figura F.3) y se preguntará si es válida para cualquier caso.

   Concluido el repaso, se motivará la necesidad de una notación estándar con un sencillo experimento en clase. Se pedirá que cada uno dibuje un triángulo, nombrando cada lado, cada ángulo y cada vértice. Acto seguido, se pedirá que compartan cómo han denominado a cada elemento para mostrar –muy probablemente– la poca homogeneidad con la que han nombrado las cosas y se les indicará una notación estándar que seguirán en la clase:

   - *Vértices:* Con letras mayúsculas, preferentemente con letras seguidas salvo que alguna esté ya en uso. Por ejemplo: "A, B, C" o "X, Y, Z" o "P, Q, R".
   - *Lados:* Con la misma letra que su vértice opuesto, pero en minúscula. Por ejemplo: "a, b, c" o "x, y, z" o "p, q, r".
   - *Ángulos:* Con la misma letra que su vértice, en mayúscula y con un "sombrero" o acento circunflejo. Por ejemplo: "$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$" o "$\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$" o "$\widehat{P}, \widehat{Q}, \widehat{R}$", respectivamente. *15min*

3. **Relación lados-ángulos:** Con esa base establecida, se repasará también la clasificación de los triángulos en función de sus ángulos ('*acutángulo*', '*rectángulo*' y '*obtusángulo*') y de sus lados ('*equilátero*', '*isósceles*' y '*escaleno*'). Se les mostrará que hay una relación directa entre el tipo de ángulos y el tipo de lados de un triángulo tal y como se muestra en la Figura F.4. *10min*

– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

SESIÓN 3. TRIÁNGULOS. NOTACIÓN Y CONSTRUCCIÓN.	
OBJETIVOS: O_4, O_5, O_8, O_{10}.	**COMPET. ESPECÍF.: 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9.**
DESC. OPER.: CCL1, CCL3, STEM1, STEM2, STEM4, CD1, CD3, CPSAA1.	**CRIT. DE EVAL.: 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 3.1, 5.1, 7.1, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2.**

4. **Construcción de triángulos:** La sección se enfocará inicialmente en la construcción de un triángulo dadas las longitudes de sus lados. Se presentarán casos de manera que el alumnado pueda prever la clave antes de confirmar el resultado; por ejemplo, se les mostrará cómo construir el triángulo de lados 3-4-5cm y se les propondrá que prueben a construir otros (de lados 1-1-5, de lados 1-4-5, de lados 1-5-5, etc) para que analicen qué condición se requiere.

   La construcción de un triángulo con otros datos (conocidos dos de sus lados y el ángulo que conforman o conocido un lado y los dos ángulos comunes a dicho lado) se realizará de manera dialógica en aras de revisar la expresión formal de la clase. En caso de notar avances insuficientes en su modo de comunicar conceptos, se podrán desarrollar tareas de refuerzo (del tipo ‘relacionar oraciones con situaciones’, ‘señalar fallos en frases y corregirlos’ o ‘comparar expresiones que usan habitualmente con cómo debería decirse correctamente’ y tareas de ese estilo).

   En caso de que el tiempo lo permita, se puede complementar la sección invitándoles a pensar cuándo se puede decir que dos triángulos son “iguales” (se les puede preguntar, por ejemplo, si basta con tener la misma forma para decir que dos figuras son iguales e ir elaborando a partir de ahí). No obstante, sería algo complementario dado que la semejanza de figuras se aborda en la siguiente UD (‘*Área y perímetros*’) para una comprensión más completa. *20min*

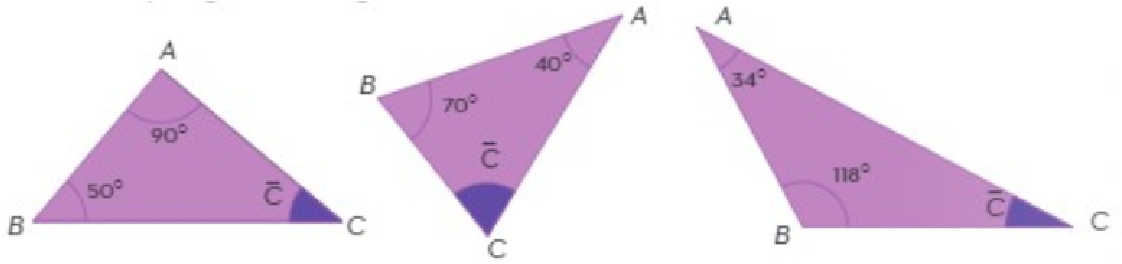
5. **Cierre de sesión:** En el tiempo restante se comentarán los ejercicios que tienen para casa y se les recordará que deben atender al trabajo pendiente (la tarea de indagación y el diseño de la figura simétrica). También se les recordará la importancia de haber consultado los tutoriales sobre GeoGebra y haber probado la herramienta, dado que para la siguiente sección resultará especialmente útil y no se dispone de tiempo suficiente como para verla en clase. *5min*

EJERCICIOS, TAREAS & ACTIVIDADES:

- Ejercicios 3.1 a 3.5.
- Tarea voluntaria: Aportación de videotutoriales sobre GeoGebra que supongan una mejora, actualización o ampliación útil respecto al contenido disponible. Fecha tope de entrega: Hasta la sesión 11.

***Ejercicio* 3.1** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero? Compruébalo con un dibujo.*

***Ejercicio* 3.2** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Calcula el ángulo que falta en cada caso y clasifica los triángulos según sus lados y según sus ángulos.*



***Ejercicio* 3.3** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Si un triángulo es isósceles y rectángulo, ¿cuánto miden sus ángulos?*

***Ejercicio* 3.4** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Construye los siguientes triángulos y clasifícalos:*

i) $a = 6cm; b = 7cm; c = 8cm$.

ii) $\widehat{A} = 130°; b = 5cm; c = 6cm$.

iii) $\widehat{A} = 75°; \widehat{B} = 75°; c = 7cm$.

***Ejercicio* 3.5** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] ¿Se puede construir un triángulo de medidas* $\widehat{A} = 95°$, $\widehat{B} = 100°$ *y* $c = 7cm$*? En caso afirmativo, constrúyelo y, en caso negativo, justifícalo.*

Figura F.3

Ilustración para entender por qué los ángulos del triángulo suman 180° (Fuente: McGraw-Hill, 2022. Elaboración propia).

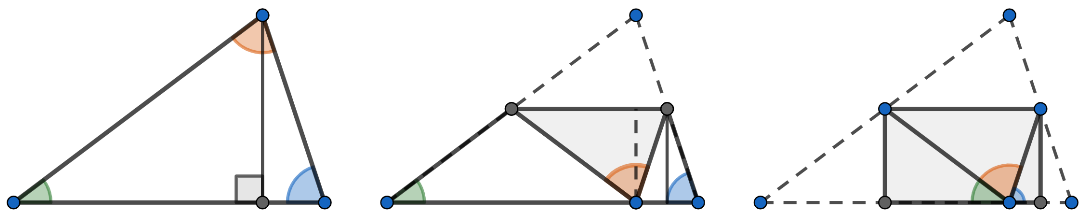
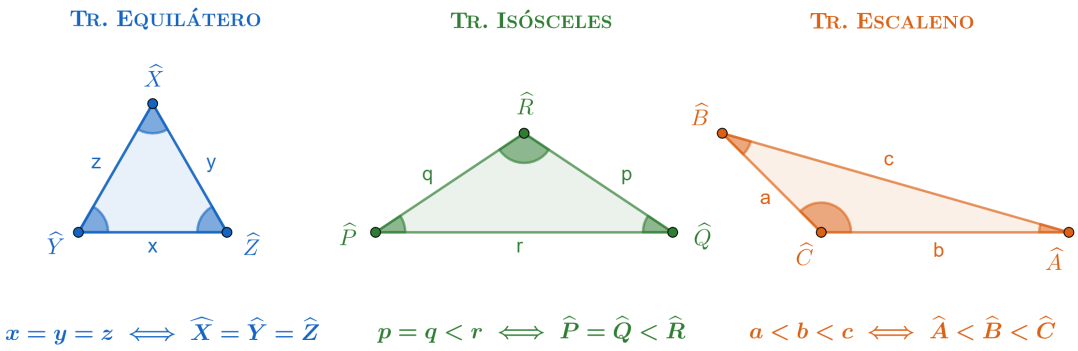


Figura F.4

Muestra de triángulos para ilustrar la relación existente entre el orden de longitudes en los lados de un triángulo y el orden de magnitudes de los ángulos (Fuente: Elaboración propia).



F.3.4. Sesión 4. Elementos notables del triángulo (I).

Tabla F.5

Expansión de la Tabla 7.8 y de la Sesión 4 de la UD (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 4. ELEMENTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO (I).	
OBJETIVOS: O_4, O_6, O_8, O_{14}.	**COMPET. ESPECÍF.:** 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
DESCRIPTORES OPERATIVOS: CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, STEM5, CD2, CD5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5.	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN:** 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.3, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2.

1. **Recepción:** A la par que se prepara el material de clase (ordenador del profesor, proyector, libro de texto, etc.), se le pide al alumnado que tome asiento y prepare su material. Este espacio se aprovechará también para ver si alguien tiene algo que compartir, ya sean dudas o algún otro aspecto (anécdotas, planes para esa semana, trabajo de otras asignaturas, etc.). *5min*

2. **Preparación de conceptos:** Esta sesión es sensiblemente más delicada que el resto dado que pueden entrar en juego las fuertes dificultades de comprensión del alumnado, la falta de atención a los conceptos y una visión geométrica poco desarrollada en algunos casos. Es por ello que se propone dedicar varias sesiones a la misma sección.

   La clase comenzará con una metodología más tradicional para abarcar conceptos indispensables en estas sesiones. Se definirán los siguientes elementos relativos a los triángulos: '*mediana*', '*altura*', '*mediatriz*' y '*bisectriz*'. También se indicarán los centros asociados a cada segmento o recta: '*baricentro*', '*ortocentro*', '*circuncentro*' e '*incentro*'. Es crucial transmitirles la importancia de distinguir bien cada concepto y que eviten confusiones.

   Dado que el alumnado de 1º de ESO es aún muy joven y tiene dificultades a la hora de organizar la información, se pueden acompañar las definiciones con una tabla que relacione los conceptos con elementos involucrados o hacer mención a su etimología. Toda la explicación debe ir acompañada de ejemplos con construcciones y favoreciendo su participación (por ejemplo, pidiéndoles que recuerden ciertos conceptos o preguntando cómo lo construirían ellos).

   Posteriormente se recurrirá a GeoGebra o alguna herramienta dinámica que permita ver cómo varía la construcción al variar el triángulo. *35min*

– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

Sesión 4. Elementos notables del triángulo (I).	
Objetivos: O$_4$, O$_6$, O$_8$, O$_{14}$.	**Compet. Específ.: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.**
Descriptores Operativos: CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, STEM5, CD2, CD5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5.	**Criterios de Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.3, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2.**

3. **Práctica en clase y cierre de sesión:** La sesión finalizará con el reparto de los portátiles para enseñarles un recurso de GeoGebra que se pone a su disposición como herramienta auxiliar (disponible mediante la URL https://www.geogebra.org/calculator/sphcys9u). En dicho recurso cuentan con una construcción de un triángulo y todos sus elementos notables para que lo manipulen y vean de manera dinámica su variación (ver la Figura F.5). Aún así, es indispensable recalcar que deben saber construir los elementos notables con regla y compás, ya que el examen será sin ordenador.

   El tiempo restante pueden utilizarlo para practicar en clase con GeoGebra los ejercicios que se mandan para casa. Además, se les recordará que deben cumplimentar la ficha personal (consultar la Sección F.2 para más información) y que se habilitará un primer cuestionario de repaso de la unidad; ambos disponibles en la plataforma digital de la asignatua. *15min*

Ejercicios, Tareas & Actividades:

- Uso de Geogebra como herramienta auxiliar para los ejercicios (revisando los videotutoriales que se pusieron a su disposición si hiciera falta).
- Ejercicios 4.1 a 4.9.
- Rellenar la ficha personal habilitada en la plataforma de la asignatura.
- Realizar el primer cuestionario de repaso de la UD.

Ejercicio 4.1 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Señala el baricentro de un triángulo de lados $8cm$, $10cm$ y $12cm$. ¿Cómo son los segmentos en los que el baricentro divide las medianas?*

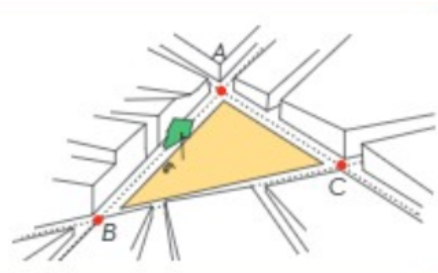
Ejercicio 4.2 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Señala el baricentro y el ortocentro de un triángulo isósceles cualquiera. ¿Coinciden los puntos? ¿Y en un triángulo equilátero?*

Ejercicio 4.3 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Señala el incentro y el circuncentro de un triángulo rectángulo y de un triángulo obtusángulo. ¿Dónde se encuentran?*

Ejercicio 4.4 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Comprueba que en un triángulo equilátero todos los puntos notables coinciden.*

***Ejercicio* 4.5** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Construye un triángulo de lados de $8cm$, $7cm$ y $5cm$. Dibuja la circunferencia que pasa por sus tres vértices y la circunferencia que toca a sus tres lados en un único punto (circunferencia tangente). Indica los radios de ambas circunferencias.*

***Ejercicio* 4.6** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Con motivo de reducir el impacto medioambiental con el alumbrado nocturno, se estudia si es posible iluminar una cierta plaza triangular con una única farola. ¿Es posible iluminar toda la plaza con una única farola? Elabora la respuesta.*



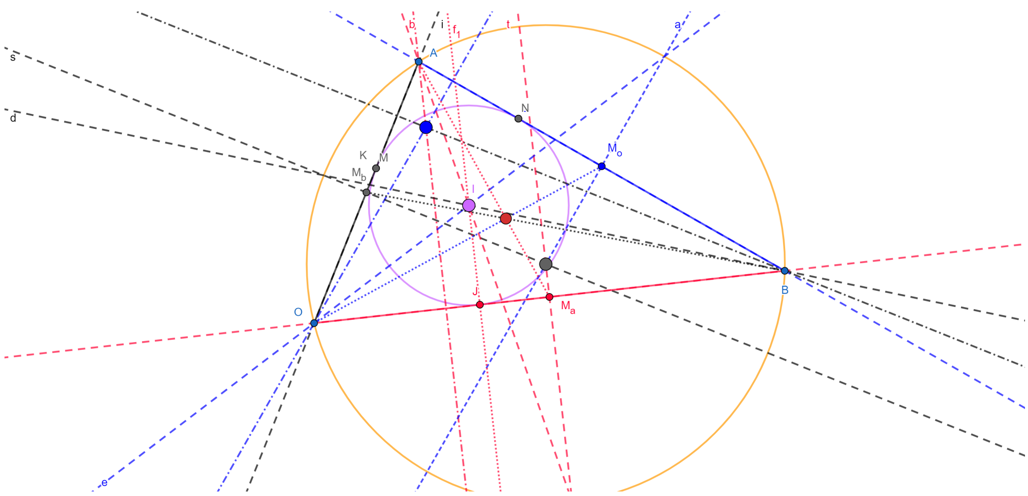
***Ejercicio* 4.7** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Dibuja los puntos notables de tres triángulos: uno acutángulo, otro obtusángulo y otro rectángulo. ¿Qué observas? Haz uso de Geogebra para ver cómo cambian los puntos según los ángulos del triángulo.*

***Ejercicio* 4.8** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Dibuja una circunferencia. ¿Se te ocurre alguna manera de determinar su centro?*

***Ejercicio* 4.9** *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Haciendo uso de Geogebra, construye un triángulo escaleno y dibuja la recta que pasa por su baricentro y su ortocentro. ¿Qué pasa con el circuncentro? ¿Y si cambias el triángulo? ¿Y si el triángulo es isósceles? ¿Qué ocurre en los triángulos rectángulos? ¿Eres capaz de deducir algo peculiar sobre los triángulos equiláteros?*

Figura F.5

Imagen que vería el alumnado si se le muestra el recurso de GeoGebra para los elementos notables del triángulo con todos los campos activos (Fuente: Recurso de GeoGebra, disponible mediante el enlace https://www.geogebra.org/calculator/sphcys9u. Elaboración propia).



La primera impresión al ver la Figura F.5 puede ser un poco abrumadora si ven todos los elementos activos. No obstante, puede ser útil para recordarles que en matemáticas, al igual que en tantos otros aspectos de la vida, con frecuencia se puede desgranar una situación en partes más sencillas, alcanzables o incluso ya conocidas. En casos como ese, basta con ir poco a poco, desgranando el problema en elementos menores y más asequibles de modo que, cuando tengamos una visión clara, podamos retomar la cuestión original.

En esta sesión, en el punto '*2. Preparación de conceptos*', es útil pedir la participación del alumnado tras haber visto los distintos conceptos ya que ello puede ayudar a mantener su atención ante la avalancha de información. También es de utilidad que las explicaciones estén acompañadas de ejemplos que se construyen paulatinamente conforme se requieren. Ello puede facilitar que el alumnado relacione mejor cada concepto con su construcción, además de facilitarles que noten los elementos involucrados en cada definición. Así pues, la pizarra puede ser más efectiva que una imagen digital estática en este caso.

F.3.5. Sesión 5. Elementos notables del triángulo (II). Correcciones (I).

Tabla F.6

Expansión de la Tabla 7.9 y de la Sesión 5 de la UD (Fuente: Elaboración propia).

Sesión 5. Elementos notables del triángulo (II). Correcciones (I).	
Objetivos: O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_8, O_{10}, O_{14}.	Competencias Específicas: 1, 2, 7, 8, 9, 10.
Descript. Operat.: CCL1, STEM1, STEM4, CD5, CPSAA1, CPSAA3, CPSAA4, CE2.	Criterios de Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10.2.

1. **Recepción:** A la par que se prepara el material de clase (ordenador del profesor, proyector, libro de texto, etc.), se le pide al alumnado que tome asiento y prepare su material. Este espacio se aprovechará también para ver si alguien tiene algo que compartir, ya sean dudas o algún otro aspecto (anécdotas, planes para esa semana, trabajo de otras asignaturas, etc.). *5min*

2. **Repaso y corrección de ejercicios:** Esta parte de la sesión se desarrollará de manera más dinámica y menos magistral, recurriendo en mayor medida al proyector y a GeoGebra. Se comenzará con un repaso de los conceptos, evaluando que los conozcan, que sepan definirlos apropiadamente y que sepan reconocerlos. También es importante comprobar si han aprovechado Geogebra desde la otra sesión o si muestran graves dificultades.

   Se aprovecharán algunos de los ejercicios mandados para que algún/a estudiante lo realice en la pizarra, comentando los pasos que sigue, realizando la construcción y comparando posteriormente con el resultado según GeoGebra. Se realizará una corrección de apartados que puedan ser representativos o suscitar nuevas ideas y dudas (por ejemplo, centros que caen fuera del triángulo o alturas en un triángulo rectángulo). *25min*

3. **Espacio de reflexión:** Este momento después de la corrección es un buen momento para recordar a la clase la utilidad de la ficha personal cuando se rellena tras haber reflexionado sobre su propia experiencia. Al fin y al cabo, ésta parte de la unidad suele ser una sección un tanto confusa para ellos/as; por tanto es necesario que noten, mediante dicha reflexión, que tienen posibilidades para reforzar su entendimiento, para corregir asperezas y para apoyarse en un recurso digital muy útil.

– Continúa en la siguiente página –

SESIÓN 5. ELEMENTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO (II). CORRECCIONES (I).	
OBJETIVOS: O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_8, O_{10}, O_{14}.	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS: 1, 2, 7, 8, 9, 10.
DESCRIPT. OPERAT.: CCL1, STEM1, STEM4, CD5, CPSAA1, CPSAA3, CPSAA4, CE2.	CRITERIOS DE EVALUACIÓN: 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10.2.

Otro aspecto importante está relacionado con la participación del alumnado en la pizarra; y es que cabe la posibilidad de que los dibujos en la pizarra de los alumnos salgan bastante mal (por el simple hecho de que no están acostumbrados), sin embargo ello se traduciría en una oportunidad para comentar varias cuestiones.

La primera cuestión es que cuando las cosas están bien razonadas, los fallos pesan menos y por tanto pueden penalizar menos. Para desarrollar esto se puede plantear el caso de un dibujo (en la pizarra o en papel); si es posible apreciar que la construcción está bien encaminada, será fácil entender que el alumno/a tiene los conocimientos que se buscan aunque el dibujo no salga perfecto (problemas con el compás, una regla que se ha movido, una mala jugada con el pulso, etc.). De modo que es posible que no penalice o penalice menos, según la situación.

La segunda cuestión es recalcar que la primera depende demasiado del contexto. La UD actual, la geometría clásica, tiene dos aspectos claves a los que deben prestar especial atención: *propiedades* y *precisión*. Conviene trasladarles que, aunque se pueden pasar por alto algunos errores de precisión por tratarse de un dibujo, errar alguna propiedad en cambio no es admisible ya que cambian completamente la naturaleza de la figura geométrica. *10min*

4. **Comentarios sobre las entregas:** El resto de la sesión se dedicará a comentar cómo han salido las dos tareas que tenían que entregar: la de búsqueda de información sobre la relevancia de las figuras planas en situaciones concretas y el diseño de una figura simétrica.

   Sobre las búsquedas, se puede comentar cuáles han sido los posts más interesantes en la plataforma según ellos (por desconocido, por relevante, por sorprendente, etc.); mientras que de las figuras se podrá hacer algo similar similar y comenzar la decoración de la clase con voluntarios. Para ello se pueden usar cartulinas grandes sobre las que pegar sus diseños con espacio para que indique su nombre y curso junto a sus diseños.

– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

SESIÓN 5. ELEMENTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO (II). CORRECCIONES (I).	
OBJETIVOS: O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_8, O_{10}, O_{14}.	**COMPETENCIAS ESPECÍFICAS:** 1, 2, 7, 8, 9, 10.
DESCRIPT. OPERAT.: CCL1, STEM1, STEM4, CD5, CPSAA1, CPSAA3, CPSAA4, CE2.	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN:** 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10.2.

El resto del tiempo, podrán dedicarlo a completar tareas pendientes, repasar ejercicios con dificultades, hacer o corregir ejercicios extra o repasar y resolver dudas sobre las secciones anteriores. *15min*

EJERCICIOS, TAREAS & ACTIVIDADES:

- Ejercicios extra en función de las dificultades y facilidades notadas en el alumnado.
- Decoración de la clase o del pasillo con las composiciones de sus figuras.
- Sesión de autoevaluación corrigiendo ejercicios pendientes. Las correcciones que realicen deberán ser subidas a un espacio habilitado en la plataforma de la asignatura. Fecha de entrega: antes de la sesión 9.

F.3.6. Sesión 6. Cuadriláteros.

Tabla F.7

Expansión de la Tabla 7.10 y de la Sesión 6 de la UD (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 6. CORRECCIONES (II). CUADRILÁTEROS (I).	
OBJETIVOS: O_4, O_6, O_7, O_8, O_9, O_{14}.	**COMPET. ESPECÍF.:** 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
DESCRIPTORES OPERATIVOS: CCL1, STEM1, STEM3, STEM4, CD2, CD5, CPSAA1, CC3, CE3.	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN:** 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.3, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.3, 7.1, 8.1, 8.2, 9.2, 10.1, 10.2.

1. **Recepción:** A la par que se prepara el material de clase (ordenador del profesor, proyector, libro de texto, etc.), se le pide al alumnado que tome asiento y prepare su material. Este espacio se aprovechará también para ver si alguien tiene algo que compartir, ya sean dudas o algún otro aspecto (anécdotas, planes para esa semana, trabajo de otras asignaturas, etc.). *5min*

2. **Tarea sobre cuadriláteros:** El resto de la clase se destinará a la tarea IBL referida a la clasificación de cuadriláteros. Se deben detallar claramente los objetivos a alcanzar con la tarea, las pautas a seguir y qué se va a evaluar (consultar Sección F.6).

   En grupos de 2 o 3 (según lo permita el material), deberán usar las bandas de plástico proporcionadas (como las mostradas la Figura F.6) para encontrar los seis tipos de cuadriláteros, a la par que realizan un "*informe de investigación*" y un "*diario de trabajo*". El *informe* puede ser una ficha prefabricada, pero se ha optado por usar en su lugar un folio en blanco para que lo rellenen como mejor vean; mientras que el *diario* se trata de otro folio en el que deberán reflejar el proceso intermedio (qué ideas van proponiendo, qué falla o acierta, qué propiedades están considerando o descartando, etc). Al finalizar la tarea deberán entregar el *informe de investigación* junto con el *diario de trabajo* y el set de bandas proporcionado.

   Dado que interesa que todos los alumnos trabajen las figuras y noten sus propiedades geométricas, debe ser un trabajo conjunto sin roles inamovibles. Todos los integrantes deberán realizar en algún momento alguna de las tareas previstas: manipular las bandas para lograr uno de los cuadriláteros, hacer el esbozo de las bandas, escribir la descripción de la figura o de sus propiedades, etc. *30min*

– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

Sesión 6. Correcciones (II). Cuadriláteros(I).	
Objetivos: O_4, O_6, O_7, O_8, O_9, O_{14}.	**Compet. Específ.:** 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Descriptores Operativos: CCL1, STEM1, STEM3, STEM4, CD2, CD5, CPSAA1, CC3, CE3.	**Criterios de Evaluación:** 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.3, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.3, 7.1, 8.1, 8.2, 9.2, 10.1, 10.2.

3. **Ampliación sobre cuadriláteros:** A continuación, se revisará la Sección "*Cuadriláteros*" del libro de texto y se les mostrará cómo los seis tipos de cuadriláteros que se estudian se pueden caracterizar mediante las bandas que se les prestó. Es importante recalcarles que lo que caracteriza a cada cuadrilátero son sus propiedades geométricas y no sus medidas concretas.

   Esto se puede hacer tomando dos cuadrados y un rombo como ejemplos: los dos cuadrados pueden tener medidas distintas y, aún así, comparten todas sus propiedades geométricas; el rombo en cambio, puede tener la misma medida que uno de los cuadrados y sus propiedades geométricas, en cambio, son diferentes. *10min*

4. **Descomposición de figuras y cierre de sesión:** Para finalizar se realizarán en clase actividades con Tangrams, como los ejercicios 6.1, 6.2 y 6.3. Ese tipo de tareas se incluyen con la intención de que vayan acostumbrándose a la descomposición de figuras en triángulos, pero de un modo más tangible y lúdico para el alumnado. Este tipo de tareas pueden ser un buen refuerzo para quienes muestren una dificultad más severa. *10min*

Ejercicios, Tareas & Actividades:

- Ejercicios 6.1, 6.2 y 6.3, con Tangram en clase.
- Ejercicios 6.4 a 6.8.
- Ejercicio 6.9, voluntario. Entrega a través de la plataforma de la asignatura. Fecha tope de entrega: Antes de la Sesión 9.

Ejercicio 6.1 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Haciendo uso del Tangram indica qué cuadriláteros se pueden formar con un triángulo y un romboide. ¿Y con dos trapecios rectángulos iguales?*

Ejercicio 6.2 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Dibuja un cuadrilátero de cada tipo e indica qué tipos de triángulos se forman al trazar una de sus diagonales. ¿Y si se trazan las dos diagonales?*

Ejercicio 6.3 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Dibuja y escribe el nombre de todos los cuadriláteros que se corresponden con las siguientes descripciones:*

a) Sus diagonales son iguales y perpendiculares.

b) Sus diagonales se cortan en sus puntos medios.

c) Sus diagonales son perpendiculares entre sí.

d) Sus ángulos opuestos son iguales aunque no son rectos.

Ejercicio 6.4 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Dibuja tres tipos de cuadriláteros diferentes para los cuales sus diagonales midan* $5cm$ *y* $3cm$*.*

Ejercicio 6.5 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Une los puntos medios de los lados de las siguientes figuras y señala qué tipo de paralelogramo obtienes: cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio escaleno, trapecio isósceles y trapezoide.*

Ejercicio 6.6 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Dibuja en tu cuaderno los siguientes cuadriláteros y nómbralos. ¿Hay casos en los que pueda haber más de un cuadrilátero con esa descripción?*

a) Con las diagonales iguales.

b) Con todos los ángulos iguales.

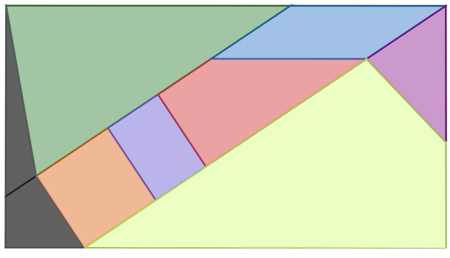
c) Con las diagonales perpendiculares.

d) Con sólo dos lados iguales y dos ángulos iguales.

Ejercicio 6.7 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Dibuja un paralelogramo cualquiera, ¿cuánto suman dos ángulos consecutivos suyos? ¿Y si cambias a otro paralelogramo? Explica cuál es la relación existente.*

Ejercicio 6.8 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Usando Geogebra, estudia las relaciones entre los lados, diagonales y ángulos de un paralelogramo y fíjate en cómo varían de un paralelogramo a otro. ¿Qué tienen en común el rombo y el cuadrado? ¿Y el romboide y el rectángulo?*

Ejercicio 6.9 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022. Reelaboración propia.] ¿Te has fijado alguna vez en cómo se distribuyen los campos de cultivo? Resulta que a menudo las matemáticas ayudan en su diseño. En la figura de la derecha se muestra un terreno dividido para cultivos.*



a) *¿Qué tipos de polígonos distingues?*

b) *¿Cuáles son las parcelas que pueden inscribirse en una circunferencia?*

c) *¿Existe en cada parcela un punto que equidiste de sus vértices?*

d) *Supón que tienes que colocar un aspersor como sistema de riego en cada parcela. ¿Dónde la situarías en cada caso? ¿Qué criterio estás utilizando?*

e) *Traza el alcance de cada fuente (procura ser realista). ¿Es posible suprimir alguna de las fuentes? Señala cuáles en caso afirmativo.*

Instaurar un sistema de riego puede requerir la instalación de un sistema de acequias y desagües para recoger el excedente de agua, devolverla hasta la fuente y así reutilizarla, reduciendo el gasto de agua. Para ello, se idea un sistema de pequeñas acequias ligeramente desniveladas que recogen el agua y la llevan hasta un borde de la parcela. En los bordes se hacen acequias más grandes, con un desagüe subterráneo que conecta con el depósito de agua del aspersor (el aspersor y su depósito no tienen por qué colocarse en el mismo punto).

f) *Si nos fijamos en las parcelas triangulares, ¿cuál sería el punto al que deberían llevar los desagües el agua recogida desde sus lados?*

g) *En el resto de parcelas, ¿es posible encontrar un punto que equidiste de todos sus lados?*

h) *Si se usaran únicamente parcelas triangulares, ¿podría cubrirse el mismo campo con menos fuentes y desagües? Haz un esquema de la situación. Puedes ayudarte de GeoGebra.*

Figura F.6

Bandas de plástico que se usan en la tarea IBL sobre cuadriláteros. Cada set contiene dos bandas paralelas del mismo ancho, una banda paralela de un ancho notablemente diferente y dos bandas no paralelas (o triángulos según el corte). Se pueden elaborar fácilmente a mano (Fuente: Elaboración propia).

F.3.7. Sesión 7. El Teorema de Pitágoras (I).

Tabla F.8

Expansión de la Tabla 7.11 y de la Sesión 7 de la UD (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 7. EL TEOREMA DE PITÁGORAS (I).	
OBJETIVOS: O_4, O_6, O_8, O_{12}, O_{13}, O_{14}.	**COMPETENCIAS ESPECÍF.: 1, 3, 5, 6, 7, 8.**
DESCRIPT. OPERAT.: CCL1, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD1, CD3.	**CRITERIOS DE EVAL.: 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.3, 4.1, 5.1, 6.1, 6.2, 6.3, 7.2, 8.1, 8.2.**

1. **Recepción:** A la par que se prepara el material de clase (ordenador del profesor, proyector, libro de texto, etc.), se le pide al alumnado que tome asiento y prepare su material. Este espacio se aprovechará también para ver si alguien tiene algo que compartir, ya sean dudas o algún otro aspecto (anécdotas, planes para esa semana, trabajo de otras asignaturas, etc.). *5min*

2. **Devolución de tarea y repaso rápido:** Se devolverán los *informes* de la tarea sobre cuadriláteros de la sesión anterior revisados y con las indicaciones pertinentes. Es necesario que todos entiendan las propiedades geométricas clave para clasificar los cuadriláteros: la presencia o ausencia *paralelismo* y la coincidencia o no de las *longitudes* de los lados. También es conveniente recalcar la importancia de saber disponer la información de manera ordenada, adecuada y detallada.

   De manera oral y conjunta, se hará un repaso rápido de contenidos vistos hasta ahora con la idea de refrescar las propiedades que puedan ser de más utilidad de cara al Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones. *15min*

3. **Presentación de Pitágoras y del Teorema:** La sesión comenzará aportando un poco de contexto histórico sobre Pitágoras y haciendo mención de algunos de sus aportes. El contenido a cubrir se puede adaptar al gusto de la clase (aportes a la astronomía, a la filosofía, la escuela pitagórica, sólidos perfectos...). Se hará mención a la importancia del Teorema de Pitágoras, su aparición continua desde el mundo microscópico al macroscópico, la existencia de variantes del Teorema y al hecho de que van a continuar estudiándolo hasta que finalicen su etapa educativa. *10min*

– CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA –

SESIÓN 7. **EL TEOREMA DE PITÁGORAS (I).**	
OBJETIVOS: O_4, O_6, O_8, O_{12}, O_{13}, O_{14}.	**COMPETENCIAS ESPECÍF.:** 1, 3, 5, 6, 7, 8.
DESCRIPT. OPERAT.: CCL1, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD1, CD3.	**CRITERIOS DE EVAL.:** 1.1, 1.2, 1.3, 3.1, 3.3, 4.1, 5.1, 6.1, 6.2, 6.3, 7.2, 8.1, 8.2.

4. **Enunciado y demostración:** Se explicará el Teorema atendiendo a lo siguiente:
   - Definición de '*cateto*' e '*hipotenusa*' en un triángulo.
   - Recalcar, que en triángulos rectángulos, la *hipotenusa* siempre es el lado opuesto al ángulo recto.
   - Hacer hincapié en su correcta enunciación con los términos introducidos para evitar confusiones por la notación.

   Se reforzará el entendimiento del teorema con la interpretación del área de cuadrados. Dado que '*área*' es un concepto de la siguiente UD, se indicará cuál es el *área* de un cuadrado, dejando su justificación para entonces.

   Se mencionará también la existencia de libros, como Loomis (1968), donde se recopilan más de 350 demostraciones diferentes del teorema. En clase se les mostrará una de las más visuales y asequibles, la demostración de Chou-Pei-Suan (ver la Figura F.7), disponible mediante la URL https://www.geogebra.org/m/j6wRRyxB#material/vd6X9mGX.

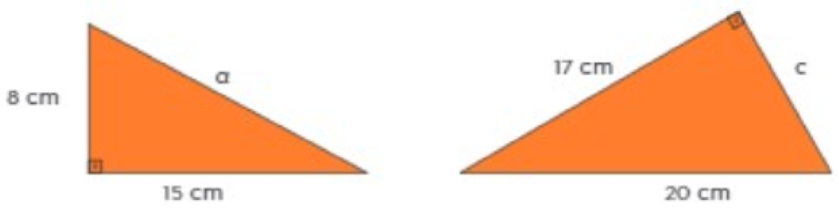
   Como tarea voluntaria, se propondrá que busquen más demostraciones del Teorema y que las suban al espacio habilitado en la plataforma de la asignatura (no se aceptarán demostraciones repetidas que hayan subido otros compañeros antes). Es necesario advertir a la clase de que ciertas demostraciones no podrán entenderlas aún, de modo que para asegurarse que suben demostraciones a su alcance, deberán ir acompañadas de una breve explicación. *20min*

5. **Cierre de sesión:** Para finalizar, se mandarán ejercicios para la siguiente clase y se animará al alumnado a que se esfuerce y se ponga al día, dado que la fecha del examen va estando próxima. *5min*

EJERCICIOS, TAREAS & ACTIVIDADES:

- Ejercicios 7.1 a 7.5.
- Tarea voluntaria de búsqueda de demostraciones de Pitágoras. Deben ir acompañadas de una explicación del alumno/a y no pueden repetirse demostraciones que hayan subido otros compañeros previamente. Sólo se valorará una demostración por persona. Fecha tope de entrega: hasta sesión 11.

Ejercicio 7.1 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Calcula la medida desconocida en los siguientes triángulos rectángulos:*



Ejercicio 7.2 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Si vas a nadar en una piscina rectangular que mide $50m$ de largo y $21m$ de ancho, ¿cuál es la máxima longitud que puedes nadar en línea recta?*

Ejercicio 7.3 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Comprueba cuáles de los siguientes triángulos son rectángulos verificando si cumplen el Teorema de Pitágoras:*

a) $15cm$, $20cm$ y $25cm$.

b) $5cm$, $6cm$ y $17cm$.

c) $18cm$, $24cm$ y $32cm$.

d) $6cm$, $8cm$ y $10cm$.

Usa Geogebra para comprobar qué tipo de triángulo es cada uno y fíjate bien. ¿Notas alguna relación entre el tipo de triángulo y lo que pasa con la identidad del Teorema?

Ejercicio 7.4 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] En un triángulo rectángulo isósceles, los catetos miden $14cm$. ¿Cuándo mide su hipotenusa?*

Ejercicio 7.5 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Calcula, con ayuda del Teorema de Pitágoras, la medida marcada en cada figura:*

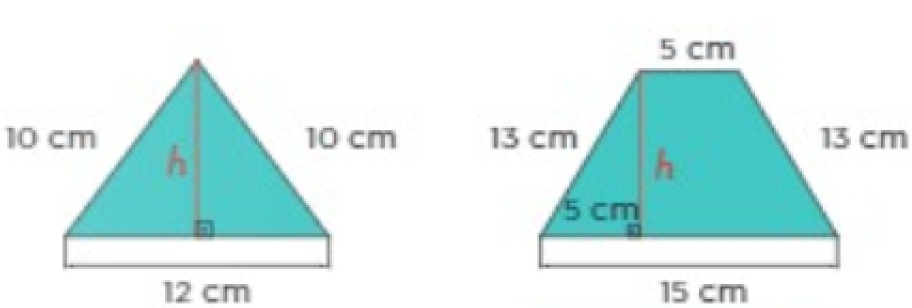
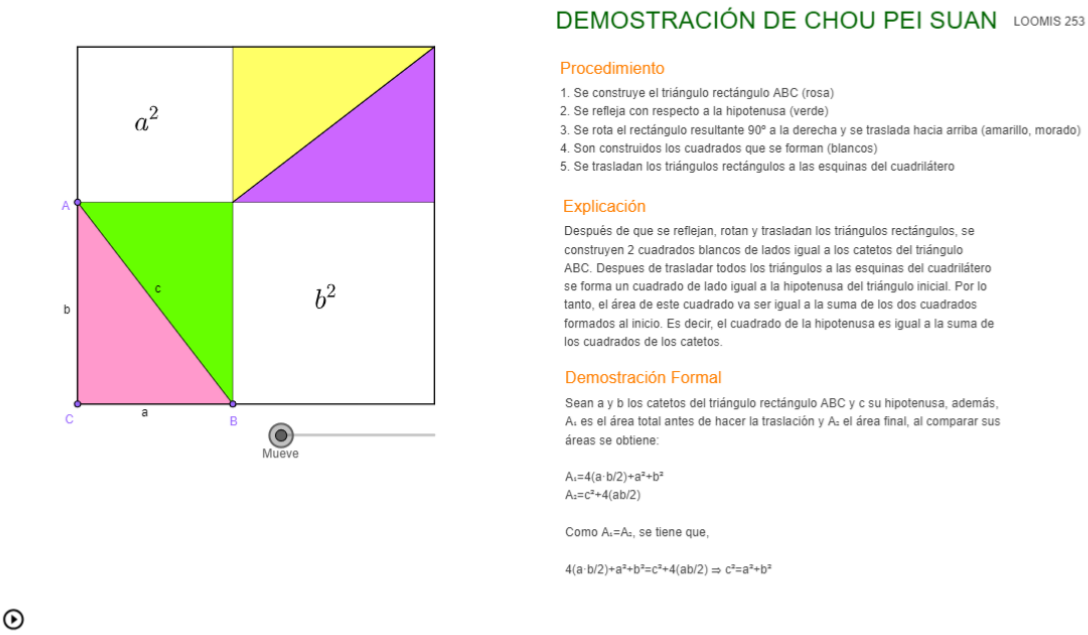


Figura F.7

Recurso de Geogebra para demostrar de manera dinámica el Teorema de Pitágoras (Fuente: Loomis, 1968. Demostración 253. Elaboración: Usuario 'Álvaro López' en GeoGebra, disponible mediante el siguiente hiperenlace o mediante la URL https://www.geogebra.org/m/j6wRRyxB#material/vd6X9mGX).



F.3.8. Sesión 8. El Teorema de Pitágoras (II).

Tabla F.9

Expansión de la Tabla 7.12 y de la Sesión 8 de la UD (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 8. EL TEOREMA DE PITÁGORAS (II).	
OBJETIVOS: O_4, O_6, O_8, O_{12}, O_{13}.	**COMPETENCIAS ESPECÍFICAS: 1, 6, 8, 9.**
DESCRIPTORES OPERATIVOS: CCL1, STEM1, STEM2, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5.	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN: 1.1, 1.2, 6.3, 8.1, 9.1, 9.2.**

1. **Recepción:** A la par que se prepara el material de clase (ordenador del profesor, proyector, libro de texto, etc.), se le pide al alumnado que tome asiento y prepare su material. Este espacio se aprovechará también para ver si alguien tiene algo que compartir, ya sean dudas o algún otro aspecto (anécdotas, planes para esa semana, trabajo de otras asignaturas, etc.). *5min*

2. **Repaso y corrección:** La primera parte se dedicará a corregir los ejercicios de la sesión anterior, prestando atención a las dificultades que hayan tenido, repasando los conceptos que sean necesarios y procurándoles un orden adecuado en su resolución. *20min*

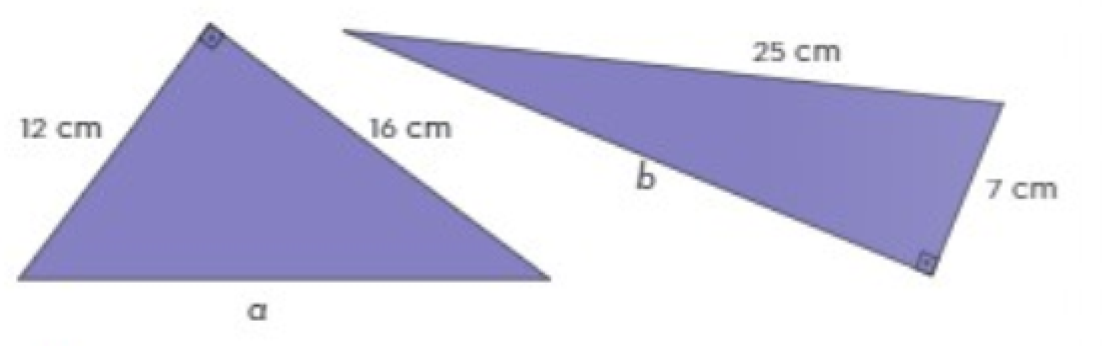
3. **Trabajo en clase:** El resto de la clase se dedicará a ampliar la variedad de problemas que se pueden cubrir con el Teorema de Pitágoras. Se mandará una batería de ejercicios que, bien se resuelvan de manera colaborativa entre toda la clase, o bien sea dándoles un momento para que lo intenten e inmediatamente después corregirlo, éstos sirvan como base para el resto de ejercicios que tengan que hacer más tarde. Entre los tipos de ejercicios a desarrollar, es aconsejable incluir varios sobre descomposición de figuras y problemas contextualizados que deban interpretar. *20min*

4. **Trabajo libre:** Los minutos restantes se dejarán para que el alumnado adelante trabajo, repase y plantee dudas. *10min*

EJERCICIOS, TAREAS & ACTIVIDADES:

- Ejercicios 8.1 a 8.5 y ampliación de ejercicios.
- Cumplimentación de la ficha personal a lo largo del fin de semana.
- Activación de los cuestionarios de repaso en la plataforma de la asignatura.
- Lectura comprensiva de la sección '*Posiciones relativas de circunferencias*' del libro de texto.
- Autocorrección de ejercicios hasta la sesión 7 y ejercicios como modelo.

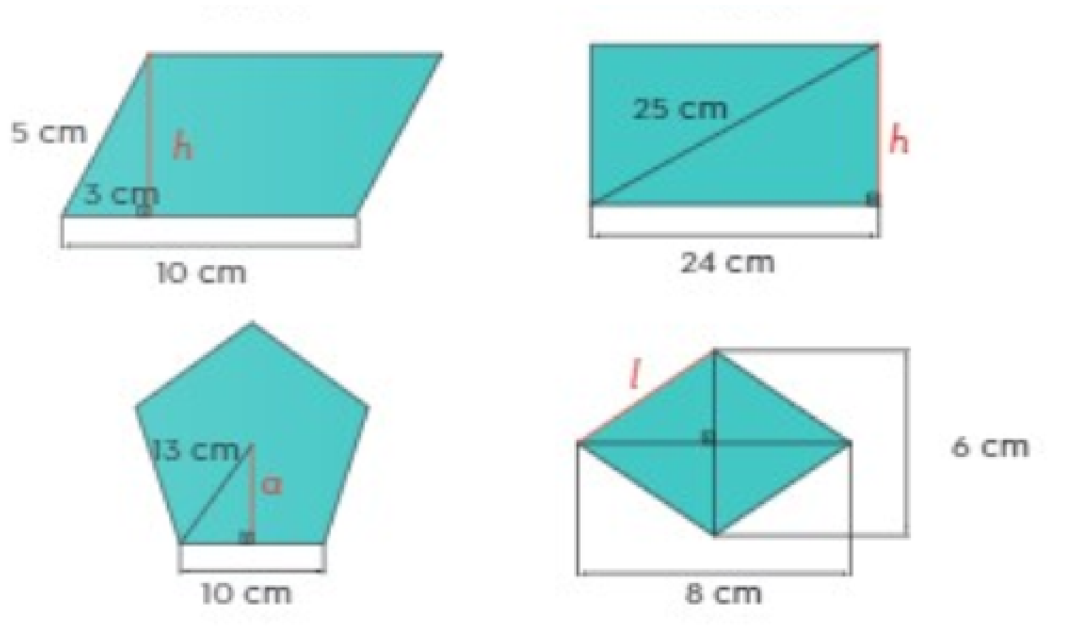
EJERCICIO 8.1 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Halla la medida que falta en los siguientes triángulos rectángulos:*



EJERCICIO 8.2 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Los lados iguales de un triángulo isósceles miden $10cm$, mientras que el desigual mide $6cm$. Calcula la altura del triángulo, trazada sobre su lado desigual.*

EJERCICIO 8.3 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Calcula cuánto miden las alturas de un triángulo rectángulo de $6cm$ de lado.*

EJERCICIO 8.4 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022] Calcula, con ayuda del Teorema de Pitágoras, la medida marcada en cada figura:*



EJERCICIO 8.5 *[Fuente: McGraw-Hill, 2022. Reelaboración propia.] Para mantener vertical la torre de un faro se instala un cable de seguridad fijado al extremo superior de la torre y al suelo. Si disponemos de $10m$ de cable y la torre mide $9m$, ¿a qué distancia máxima de la base de la torre podemos fijar el cable? ¿Qué pasaría si la el faro midiera $10m$ de ancho en su base?*

F.3.9. Sesión 9. Repaso sobre posiciones relativas.

Tabla F.10

Expansión de la Tabla 7.13 y de la Sesión 9 de la UD (Fuente: Elaboración propia).

SESIÓN 9. AMPLIACIÓN SOBRE POSICIONES RELATIVAS.	
OBJETIVOS: O_8, O_{11}, O_{14}.	**COMPETENCIAS ESPECÍFICAS:** 1, 2, 7, 8.
DESCRIPTORES OPERATIVOS: CCL1, STEM1, STEM2, STEM4, CD2, CE3.	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN:** 1.1, 1.3, 2.1, 7.2, 8.1.

1. **Recepción:** A la par que se prepara el material de clase (ordenador del profesor, proyector, libro de texto, etc.), se le pide al alumnado que tome asiento y prepare su material. Este espacio se aprovechará también para ver si alguien tiene algo que compartir, ya sean dudas o algún otro aspecto (anécdotas, planes para esa semana, trabajo de otras asignaturas, etc.). *5min*

2. **Repaso de posiciones relativas:** Se comenzará haciendo un repaso oral con la clase sobre la posición relativa entre dos rectas y la posición relativa entre una recta y una circunferencia. Esto permitirá hacer una valoración rápida y ver si persisten las dificultades que tuvieran de esta sección en la UD 11. Si por algún motivo, al valorar esta sección en la UD previa, se hubieran notado grandes dificultades entre el alumnado, se puede cambiar el método de repaso.

   Acabado el repaso, se pedirá al alumnado que exponga si han tenido dificultades entendiendo las posiciones relativas entre circunferencias, si saben caracterizarlas geométricamente y se repasará rápidamente el concepto. *15min*

3. **Actividad con GeoGebra:** A continuación, se repartirán los portátiles entre el alumnado. Éste deberá usar los dos recursos de GeoGebra mostrados en las Figura F.8 y Figura F.9 para completar las tareas sobre posiciones relativas. Al acabar, se recogerán los portátiles. *20min*

4. **Corrección y repaso:** El tiempo restante hasta la finalización de la clase se dedicará a corregir ejercicios pendientes, resolver dudas o practicar según las peticiones del alumnado o las dificultades que se hayan ido notando entre la observación y la ficha personal. *15min*

EJERCICIOS, TAREAS & ACTIVIDADES:

- Tareas interactivas con GeoGebra sobre posiciones relativas entre una recta y una circunferencia y entre dos circunferencias.
- Actividades extra según valoración de las necesidades del alumnado.

Figura F.8

Tarea sobre posiciones relativas entre rectas y circunferencias con GeoGebra. (Fuente: Recurso de GeoGebra, disponible mediante el enlace https://www.geogebra.org/calculator/kt76h2te. Elaboración propia).

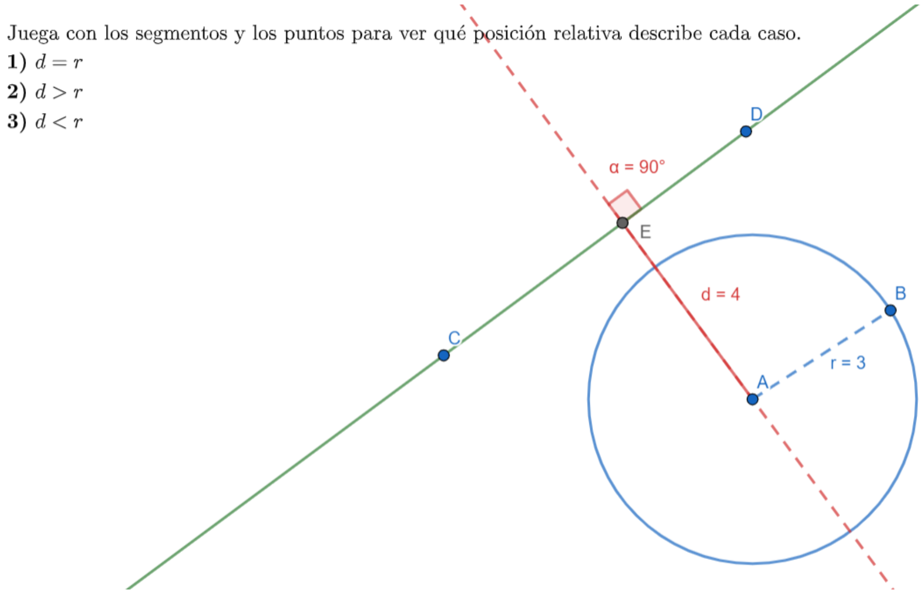
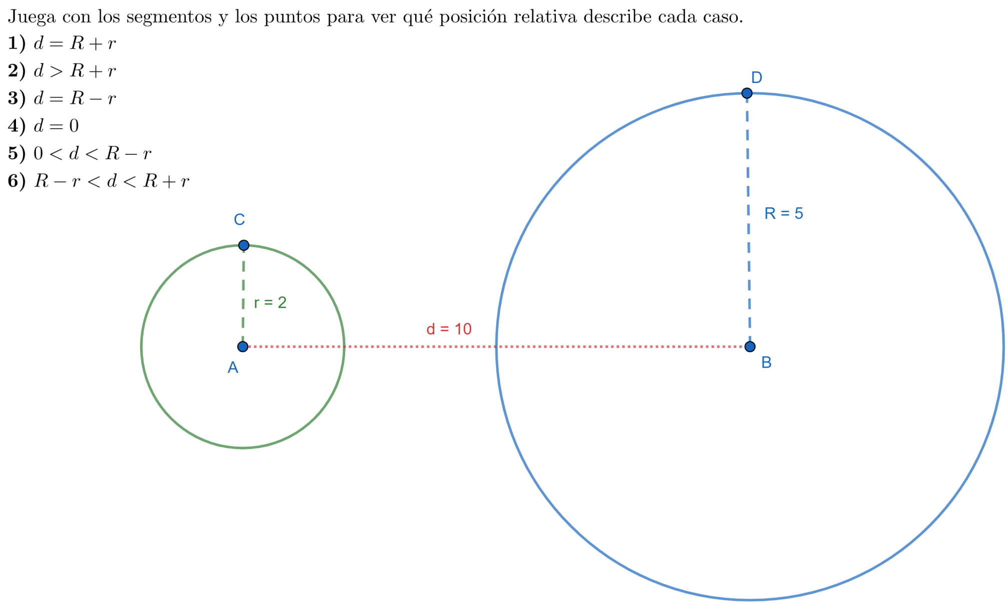


Figura F.9

Tarea sobre posiciones relativas de circunferencias con GeoGebra. (Fuente: Recurso de GeoGebra, disponible mediante el enlace https://www.geogebra.org/calculator/rmw4ahdb. Elaboración propia).



F.3.10. Sesiones 10 y 11. Repaso general y trabajo en clase.

Tabla F.11

Expansión de la Tabla 7.14 y de las Sesiones 10 y 11 de la UD (Fuente: Elaboración propia).

SESIONES 10 Y 11. SITUACIONES DE APRENDIZAJE. REPASO GENERAL.	
OBJETIVOS: Según situaciones de aprendizaje y necesidades del alumnado.	**C. ESPEC.: Según situaciones de aprendizaje y necesidades del alumnado.**
DESCR. OPER.: Según sit. de aprendizaje y necesidades del alumnado.	**CRIT. DE EVAL.: Según sit. de aprendizaje y necesidades del alumnado.**

1. **Recepción:** A la par que se prepara el material de clase (ordenador del profesor, proyector, libro de texto, etc.), se le pide al alumnado que tome asiento y prepare su material. Este espacio se aprovechará también para ver si alguien tiene algo que compartir, ya sean dudas o algún otro aspecto (anécdotas, planes para esa semana, trabajo de otras asignaturas, etc.). *5min*

2. **Situaciones de aprendizaje:** Estas sesiones están destinadas a repasar y afianzar conceptos trabajando las situaciones de aprendizaje propuestas por el libro de texto. Claramente, dichas situaciones permiten un repaso de los contenidos de la UD y, además, siempre pueden ser editadas para darle un enfoque más personalizado a las capacidades o necesidades del alumnado.

   En caso de que la situación de aprendizaje no requiriera ambas sesiones, se puede destinar el tiempo restante a hacer repasos generales, a corregir ejercicios pendientes, a realizar ejercicios que puedan ser clave para el examen o para afianzar conceptos y similar. En tal caso, el material complementario que pueda hacer falta variará según el enfoque y las tareas (pueden hacer falta los carritos de portátiles, se puede diseñar alguna nueva tarea IBL, puede idearse alguna actividad gamificada, etc.).

   Si por el contrario se observara que no es necesario destinar tanto tiempo a repasar, se comenzará la siguiente UD. *50min*

F.4. Guía para el alumnado: Elaboración de figuras mediante reflexiones.

CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS MEDIANTE REFLEXIONES.

1. Determinar los ejes de simetría.

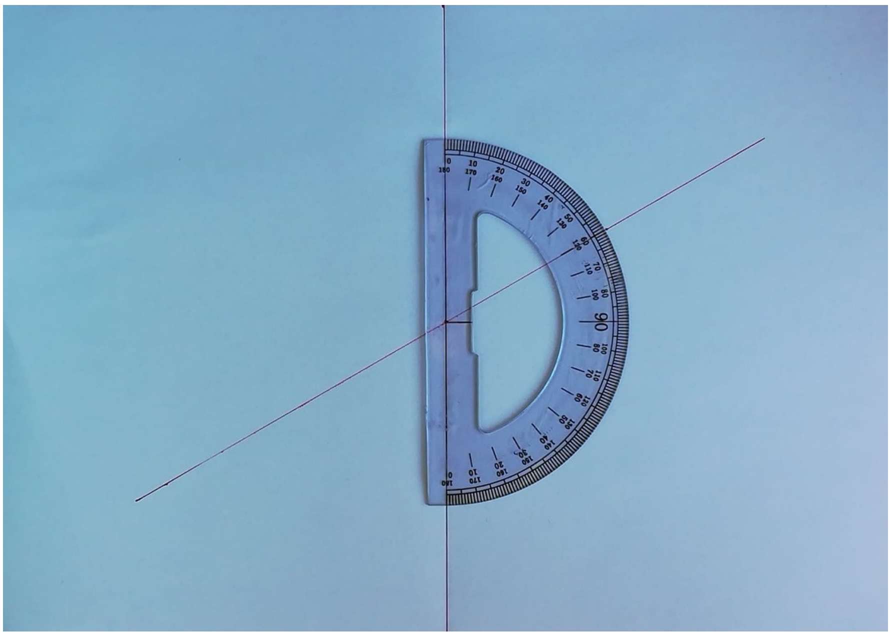
El primer paso consiste en determinar el **número de ejes de simetría** que vamos a querer en nuestra figura. Esto es crucial dado que en función del número de ejes que escojamos, formarán un ángulo u otro, tal y como determina la fórmula:

$$\frac{180^\circ}{\text{nº de ejes de simetría}} = \text{Ángulo que forman ejes consecutivos.}$$

Para el ejemplo en esta guía, crearemos una figura con 3 ejes de simetría, por lo que formarán un ángulo de $180^\circ/3 = 60^\circ$ entre sí.

Sobre el papel, determinamos **un primer eje** en la dirección que queramos y marcamos **un punto** (más o menos centrado) por el que vamos a hacer que pase el otro eje. Ahora podemos determinar el ángulo que deben formar los ejes con la ayuda de un **transportador de ángulos**, tal y como hacemos en la *IMAGEN 1*. ¡Debemos ser lo más precisos/as posible para que la figura final quede mejor!

IMAGEN 1: Construyendo el 2º eje de simetría a partir del ángulo que deben formar.



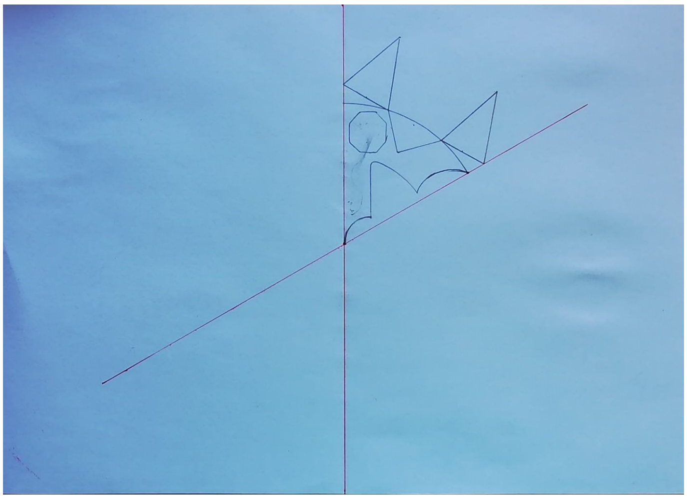
CONSEJO #1.

En lugar de trazar los ejes de simetría con una punta muy gruesa, trazad al inicio todo con una punta muy fina. Reservad los trazos más gruesos para repasar la figura al final. ¡Así disimularéis imperfecciones!

2. Diseñar un patrón.

Ahora viene la parte en la que debemos **ser creativos**. Usad vuestra imaginación y dejaos llevar, ¡no hagáis un diseño demasiado simple! Para esta guía se ha creado el patrón de la *IMAGEN 2*.

IMAGEN 2: Esbozando el patrón que repetiremos.



CONSEJO #2.

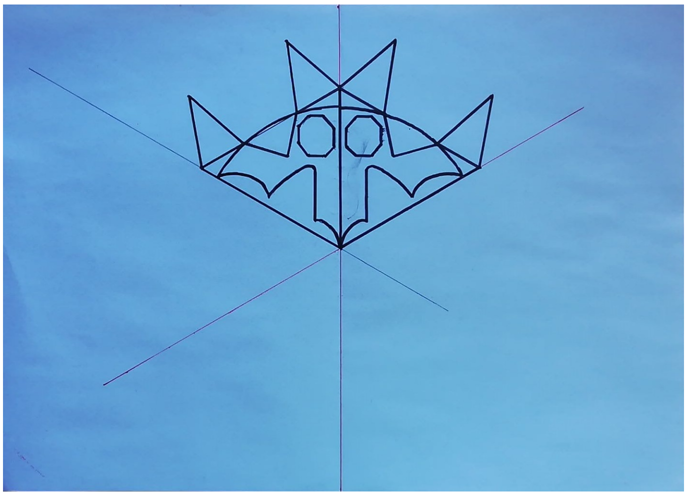
Si no tenéis claro qué hacer, podéis empezar el diseño a lápiz muy suave hasta que tengáis un diseño definitivo. ¡No pasa nada si no os termina de convencer el diseño! La gracia es que la simetría hace que el resultado final nos resulte más agradable.

3. Replicar el patrón.

Una vez tengamos un diseño hecho, **repasaremos los bordes** con algún rotulador. Sigue sin hacer falta que sea un rotulador de punta gruesa, pero sí que hace falta que sea un rotulador y un color que se marquen muy bien a través del folio (o remarcar un poco más los trazos).

Vamos a **doblar el folio** por uno de los ejes de simetría marcados y a **calcar el patrón**. La parte que calquemos va a estar por el otro lado del folio, pero como tenemos un rotulador o bolígrafo que se marca muy bien, ¡no habrá problema! De este modo obtendremos algo similar a lo que se ve en la *IMAGEN 3*.

IMAGEN 3: El resultado tras calcar por la parte frontal del folio.



CONSEJO #3.

Una buena iluminación ayudará mucho a distinguir el trazo a través del folio plegado. ¡Si el día es soleado podemos apoyarnos en el cristal de una ventana para verlo mejor aún!

Ahora toca **repetir el proceso** tantas veces como haga falta. En nuestro caso, toca calcar 3 veces. ¿Sabrías decir cuántas veces vas a necesitar calcar el patrón en tu caso?

IMAGEN 4: El resultado tras calcar por 2ª vez.

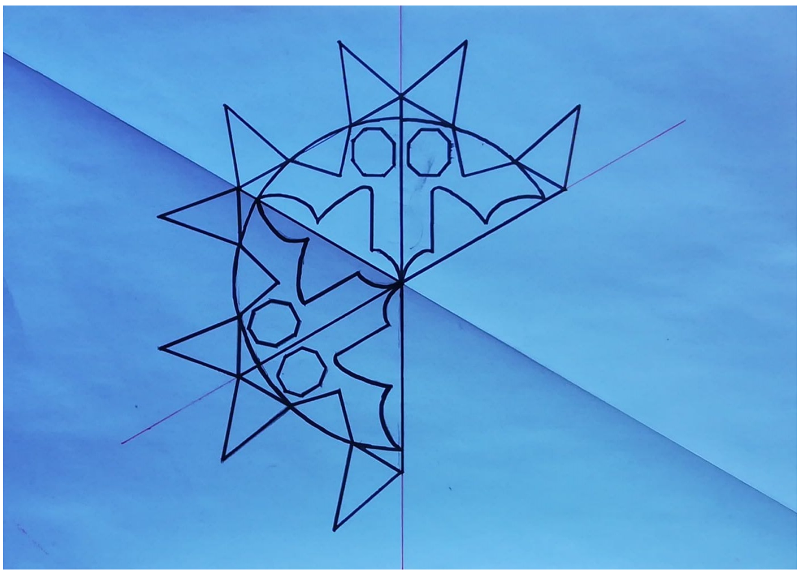
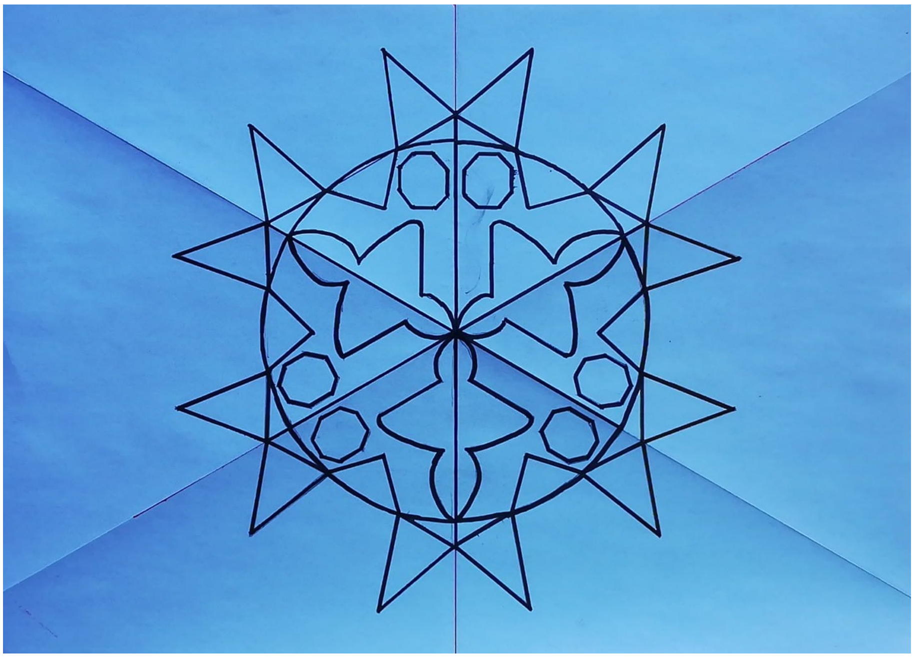


IMAGEN 5: El resultado tras calcar por 3ª vez.



Si os fijáis, el **resultado final** ha mejorado mucho respecto al patrón inicial. ¡Ahora hasta se ve bien! Seguro que tus diseños también quedan genial, ¡más aún si le añadís **color**!

4. ¡Cuidado!

Quizá no lo hayáis notado, pero en muchas ocasiones buscamos **inconscientemente** la simetría de las cosas y completamos espacios en blanco de manera simétrica. Es por esto que debemos tener cuidado mientras diseñamos el patrón de simetría y no hacerlo simétrico de entrada. Vamos a verlo con un ejemplo.

Volvamos al patrón que hemos usado en la guía y fijémonos en la *IMAGEN 6*. La primera vez que lo vemos, al diseñar el patrón en solitario nos puede parecer raro o incluso feo; puede que alguno de los elementos nos chirríe y queramos "arreglarlo". Si ese es tu caso, puede que estés pensando en algunos arreglos:

- Eliminar alguna de las curvas interiores a la cuña…
- Quizás editar las curvas interiores para dejar un triángulo centrado…
- Puede que incluso añadir otro hexágono al otro lado de la cuña…

Si introducimos todos esos cambios, tendríamos algo como lo que se ve en la *IMAGEN 7*...Pues resulta que todos esos cambios efectivamente dejan mejor la figura, ¡porque la estaríamos simetrizando! Y no nos confundamos, no deja de ser simétrico el resultado y ni está peor por partir de un patrón simétrico. ¡Pero sí que ha cambiado el número de ejes de simetría y el ángulo que forman!

IMAGEN 6: El patrón original que hemos usado.

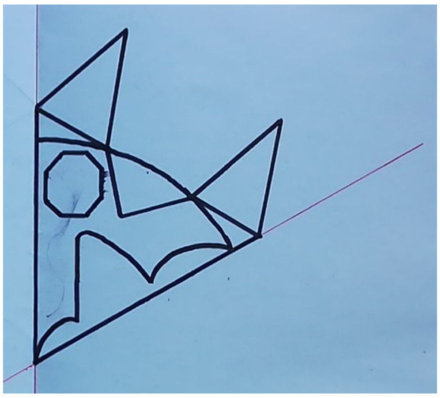
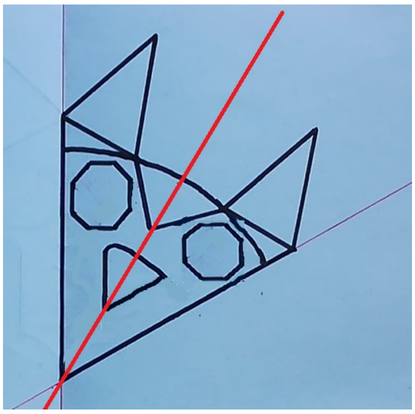


IMAGEN 7: El patrón que hubiéramos obtenido con los cambios anteriores.



5. Un caso especial.

Un caso particular y que lo mismo habéis hecho alguna vez es el de crear dibujos sobre papel cuadriculado a base de contar cuadrados. Resulta que así también se pueden obtener figuras simétricas tomando un único eje horizontal (o vertical) o tomando dos ejes perpendiculares (tanto uno horizontal como uno vertical). ¡En esos casos basta con ir contando!

F.5. Rúbrica: Diseño de figuras simétricas.

Tabla F.12

Rúbrica para la evaluación del diseño de figuras simétricas mediante reflexiones (Fuente: Elaboración propia).

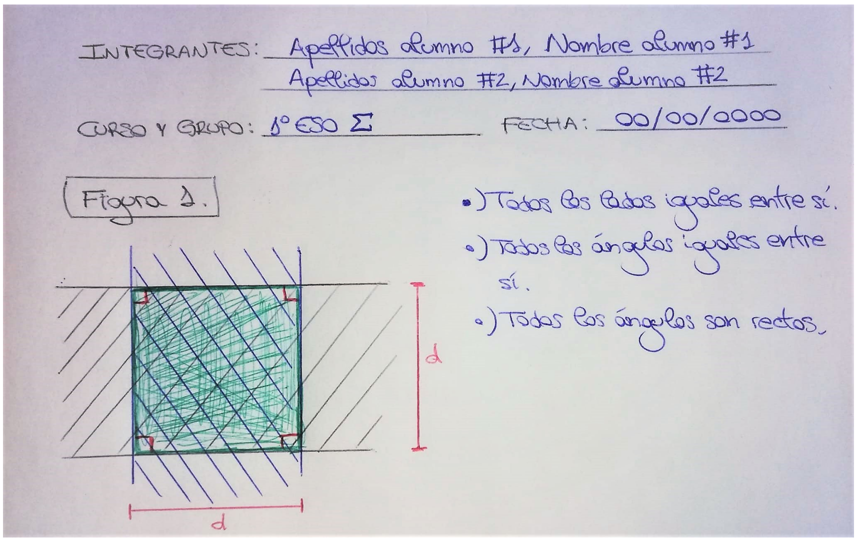
	EXCELENTE	ACEPTABLE	MEJORABLE
PLAZO	La tarea se entrega dentro de plazo.	La tarea se entrega con retraso inferior o igual a 3 días.	La tarea se entrega con retraso superior o igual a 4 días.
EJES	La figura se realiza con varios ejes de simetría y están bien señalados.	La figura presenta varios ejes de simetría, pero no están señalados correctamente.	La figura presenta un único eje de simetría o no es simétrica.
PATRÓN	El patrón original no es demasiado simple ni simétrico de partida.	El patrón original es algo simple, pero no es simétrico.	El patrón original es, o bien demasiado simple, o bien simétrico de partida.
TÉCNICA	Se aprecia la construcción simétrica mediante pliegues.	Se aprecia una construcción simétrica mediante pliegues, pero hay trazos o ejes que no coinciden al haber sido mal plegados.	No se aprecia la construcción simétrica mediante pliegues. El dibujo está hecho a ojo, está calcado de una figura ya creada o directamente no aparenta simetría.
PRECISIÓN	Al plegar la figura sobre cualquiera de sus ejes, el patrón y los trazos coinciden extraordinariamente. Los trazos están muy cuidados.	Al plegar la figura sobre algunos de sus ejes hay un desajuste notorio, pero aceptable. Los trazos están cuidados.	Al plegar la figura sobre sus ejes apenas coinciden los patrones o los trazos están muy descuidados.
EXTRAS	El diseño indica el ángulo entre ejes de simetría de manera justificada y está coloreada.	O bien el diseño indica el ángulo entre ejes de simetría de manera justificada, o bien la figura está coloreada.	La figura no indica el ángulo entre ejes de simetría de manera justificada, ni está coloreada.

F.6. Guía para el alumnado: Instrucciones y objetivos en la tarea grupal de cuadriláteros.

INSTRUCCIONES.

- Esta tarea es para realizar **en equipo**, pero sin roles fijos. Todos deberéis participar en todas las tareas en algún momento, así que organizaos bien.
- Deberéis entregar dos folios al acabar la tarea. Uno de los folios va a ser vuestro ***CUADERNO DE TRABAJO***; en podréis hacer las anotaciones sobre pruebas y esbozos necesarios, así como ideas que os surjan. El otro folio va a ser vuestro ***INFORME DE INVESTIGACIÓN***; en él debéis hacer una presentación más cuidada y ordenada, atendiendo al objetivo de la tarea.
- El objetivo de esta tarea es construir los **6 tipos distintos de cuadriláteros** posibles usando las **bandas de plástico** que se os proporcionarán. Además, debéis indicar cuáles son las propiedades geométricas que lo definen.
- Vuestro trabajo **debe quedar registrado**. El *CUADERNO DE TRABAJO* podéis gestionarlo a vuestro gusto y estilo; también podéis elaborar el *INFORME DE INVESTIGACIÓN* como queráis, pero como ayuda, podéis echarle un vistazo a la *IMAGEN 1* para tener una idea más clara y perder menos tiempo.

IMAGEN 1: Muestra de cómo podéis hacer el INFORME DE INVESTIGACIÓN.



F.7. Rúbrica: Clasificación de cuadriláteros.

Tabla F.13

Rúbrica para la evaluación de la tarea grupal sobre cuadriláteros (Fuente: Elaboración propia).

	EXCELENTE	BUENO	MEJORABLE	DEFICIENTE
FIGURAS	Construye los 6 tipos de cuadriláteros posibles.	Construye 5 de los 6 tipos de cuadriláteros posibles.	Construye 4 de los 6 tipos de cuadriláteros posibles.	Construye 3 o menos de los 6 tipos de cuadriláteros posibles.
ESBOZO	Las figuras están todas representadas correctamente mediante bandas y atendiendo a los detalles geométricos de cada figura.	Las figuras están todas representadas correctamente mediante bandas, aunque alguna presenta algún detalle incorrecto.	Aunque los esbozos dejan claros qué bandas se usan y qué figuras se pretenden representar, éstos presentan algún fallo considerable.	No se realiza ningún esbozo de las figuras y las bandas utilizadas, o los esbozos hechos presentan muchos fallos.
PROP. GEOM.	Indican correctamente todas las propiedades geométricas en todas las figuras.	Indican correctamente casi todas las propiedades geométricas en la mayoría las figuras.	Hay alguna propiedad geométrica que no ha sido notada en las figuras.	No distinguen correctamente las propiedades geométricas.
PROCESO Y ORDEN	La entrega refleja trabajo, un proceso y presenta un buen orden.	La entrega refleja trabajo, pero no termina de reflejar su proceso o presenta un buen orden algo descuidado.	La entrega refleja un trabajo desigual, con un proceso poco claro o poco ordenado.	La entrega no refleja trabajo, no se detalla apenas nada del proceso o no hay orden alguno.

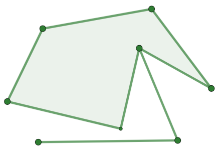
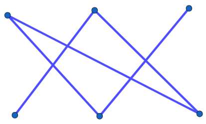
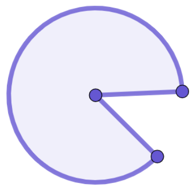
F.8. Prueba de evaluación de la UD.

1º ESO	**Examen – Tema 12**	**Fecha:** __/__/___
Grupo	**INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA CLÁSICA.**	**NOTA**

<u>EJERCICIO 1.</u> *[1 punto]*

Clasifica las siguientes figuras planas indicando debajo de cada una si se tratan de *polígonos*, *poligonales* u otro tipo de figura (basta con poner "*otro*").

			
a)	**b)**	**c)**	**d)**

			
e)	**f)**	**g)**	**h)**

<u>EJERCICIO 2.</u> *[1.2 puntos]*

Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no y justifica la respuesta. (*<u>Recuerda:</u> Una forma de justificar que un enunciado es falso puede ser poner un ejemplo que lo contradiga, ¡pero no siempre!*)

a) Un triángulo puede tener dos ángulos obtusos.

b) Un triángulo isósceles no tiene por qué ser acutángulo.

c) El triángulo de lados $1cm$, $2cm$ y $5cm$ es obtusángulo.

d) Con 3 puntos no alineados podemos construir una circunferencia que pase por los tres puntos.

e) Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos de la misma longitud, entonces es un paralelogramo.

f) En una figura con 5 ejes de simetría, dos ejes consecutivos forman un ángulo de $36°$.

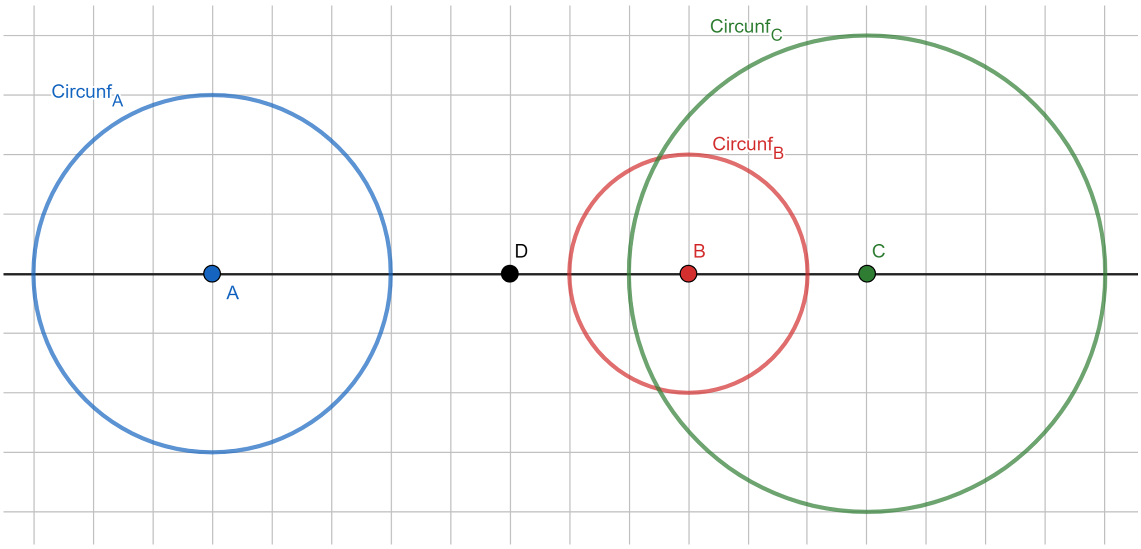
EJERCICIO 3. *[0.8 puntos]*

a) Indica cuándo es cierto el *Teorema de Pitágoras* y enúncialo. Indica además cómo se puede editar el enunciado para adaptarlo a otros casos.

b) Define qué es una altura en un triángulo. (*Puedes acompañar la definición con un esquema si quieres, pero la definición debe estar escrita.*)

EJERCICIO 4. *[1 punto]*

Observa el dibujo que se muestra a continuación y, suponiendo que son cuadrados de $1cm$ de lado, responde a las siguientes cuestiones:



a) ¿Cuál es la posición relativa de la circunferencia con centro en A respecto de la circunferencia con centro en B? ¿Y la de centro B respecto a la de centro C?

b) Si queremos dibujar una circunferencia con centro en D que sea tangente exterior con la circunferencia de centro A, ¿qué propiedad deben verificar los radios y la distancia entre los centros?

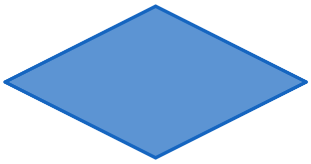
c) Sobre la figura de arriba, dibuja una circunferencia concéntrica con la circunferencia de centro en A usando el compás.

EJERCICIO 5. *[1.5 puntos]*

Completa la siguiente tabla sobre propiedades de los cuadriláteros. Señala los ángulos rectos de cada una de la figura que dibujes. Utiliza las posibles respuestas que se indican a continuación:

¿Lados iguales? $\Longrightarrow$ "*Todos*", "*Dos a dos*", "*No/Nunca*" o "*Depende*".

¿Ángulos rectos? $\Longrightarrow$ "*Todos*", "*No*" o "*Depende*"

FIGURA	NOMBRE	PARES DE PARALELAS	¿LADOS IGUALES?	¿ÁNGULOS RECTOS?
		2		No
	Trapecio		Depende	
	Romboide		Dos a dos	
				Todos
	Trapezoide	0		Depende

NO TE SIENTAS ABRUMADO/A. PÁRATE A PENSAR EN LO QUE HAS TRABAJADO Y LO TENDRÁS.

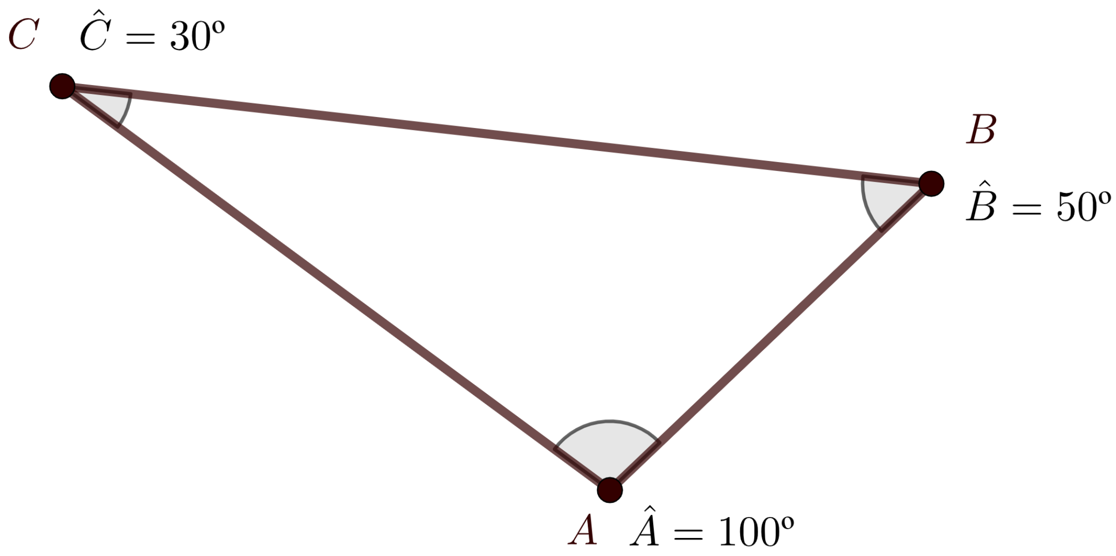
¡Y RECUERDA GESTIONAR EL TIEMPO!

Ejercicio 6. *[2 puntos]*

Para montar una tirolina son necesarios los siguientes materiales: un par de postes de distintas alturas, un cable bien resistente que se ancla en lo alto de ambos postes y un mecanismo deslizante que permita el movimiento a lo largo de cable por el efecto de la gravedad. Si disponemos de un poste de $2'5m$, de otro de $5m$ y queremos construir una tirolina de $15m$ de largo, ¿cuántos metros de cable necesitamos?

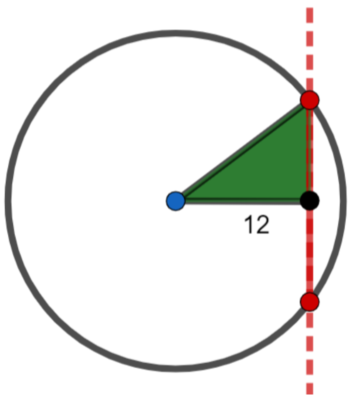
Ejercicio 7. *[1.5 puntos]*

Construye con regla y compás el incentro y la circunferencia inscrita del triángulo mostrado en la figura. ¡Recuerda que es muy importante ser preciso/a!



Ejercicio 8. *[1 punto]*

Una recta pasa a $12cm$ del centro de una circunferencia de radio $15cm$ tal y como se muestra en la figura de debajo. Calcula el perímetro del triángulo señalado.



F.9. Rúbrica: Evaluación de la UD.

Tabla F.17

Rúbrica de evaluación de la UD (Fuente: Elaboración propia).

	Rúbrica de evaluación					
	Sobresaliente	**Notable**	**Bien**	**Suficiente**	**Insuficiente**	**%**
Activ. espec.	Atiende a los objetivos en las tareas de diseño e IBL. Alcanza sendos objetivos, atendiendo al rigor y a la presentación. Realiza voluntariamente tareas relevantes para sus capacidades.	Atiende a los objetivos en las tareas de diseño e IBL. Alcanza la mayoría de ellos, cuidando el rigor o la presentación. Realiza voluntariamente alguna tarea relevante para sus capacidades.	No alcanza todos los objetivos de las tareas, pero muestra cierto rigor y orden. Realiza voluntariamente alguna tarea relevante para sus capacidades.	Alcanza objetivos básicos y alguno más en las tareas, con un rigor y orden claramente mejorables. No realiza tareas voluntarias.	Sólo alcanza objetivos básicos en las tareas, sin mostrar atención al rigor o al orden. No realiza ninguna tarea voluntaria.	10
Particip. en clase	Participa procurando aportar ideas y demostrando interés. Además trabaja bien en grupo con todo el mundo, asumiendo su rol si lo hay y ayudando al resto.	Participa con frecuencia y denota cierto interés. Su trabajo en grupo suele ser eficiente, pero con algún aspecto a pulir.	No es particularmente participativo, pero tampoco rehúsa hacerlo. En los trabajos en grupo es reticente a la participación, aunque cumpla con su parte.	Apenas es participativo y evita hacer aportaciones aunque se le anime a ello. En los grupos de trabajo se limita a hacer su parte, sin comunicación con el resto.	Rehúsa la participación en clase y/o presenta grandes dificultades para trabajar con los demás.	15

– Continúa en la siguiente página –

– CONTINUACIÓN DE LA TABLA F.17 –

	RÚBRICA DE EVALUACIÓN					
	SOBRESALIENTE	**NOTABLE**	**BIEN**	**SUFICIENTE**	**INSUFICIENTE**	**%**
AUTOEV.	Su ficha muestra una autoevaluación crítica, con un análisis certero de sus capacidades y con propuestas útiles y asequibles. Los cuestionarios de repaso reflejan un buen entendimiento de la materia. Realiza la autocorrección de manera concienzuda.	Su ficha muestra una autoevaluación bastante acertada y ciertas propuestas objetivas. Los cuestionarios de repaso reflejan un buen entendimiento de la materia. Realiza la autocorrección considerablemente bien.	Su ficha muestra una autoevaluación algo sesgada u opaca. Los cuestionarios de repaso reflejan que aún puede mejorar su entendimiento de la materia. Realiza la autocorrección de manera aceptable.	Su ficha muestra una autoevaluación que o bien es algo desinteresada, o bien no aplica cambios ante sus dificultades. Los cuestionarios de repaso reflejan que aún puede mejorar su entendimiento de la materia. Realiza la autocorrección de manera básica.	Su ficha muestra una autoevaluación poco objetiva o sin hacer. Los cuestionarios de repaso reflejan un entendimiento muy mejorable de la materia. No realiza la autocorrección o la realiza de manera mínima.	10
PRUEBA ESCRITA	La calificación es superior o igual a $9{,}0$.	La calificación está comprendida entre $7{,}0$ y $8{,}9$.	La calificación está comprendida entre $6{,}0$ y $6{,}9$.	La calificación está comprendida entre $5{,}0$ y $5{,}9$.	La calificación es inferior o igual a $4{,}9$.	50