



UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

UN ACERCAMIENTO MATEMÁTICO A LOS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN A CIEGAS DEL CUBO DE RUBIK

Alumna: Martín García, María Lucía

Tutor: Prof. D. Francisco Roca Rodríguez
Dpto: Matemáticas

Julio, 2022

Índice general

Resumen y palabras clave	III
Abstract and keywords	v
1. Notación y giros en el cubo de Rubik	11
1.1. Notación y partes del cubo de Rubik	11
1.2. Giros y movimientos	13
2. Fundamentos matemáticos. Grupos y permutaciones	17
2.1. Fundamentación matemática para los algoritmos	17
2.2. Permutaciones	22
2.3. Notación de ciclos	23
2.4. Permutaciones pares e impares	23
2.5. El grupo de las aristas y de los vértices	25
3. Orientación del cubo de Rubik. Reglas de memorización	27
3.1. Orientación de las piezas	27
3.2. Orientación de aristas	27
3.3. Orientación de vértices	28
3.4. Justificación matemática de la orientación	28
3.5. Reglas nemotécnicas para facilitar la memorización del cubo de Rubik	29
4. Métodos para resolver el cubo a ciegas	33
4.1. Método 3OP (Permutación y Orientación de 3 ciclos)	34
4.1.1. Orientación	34
4.1.2. Permutación	39
4.2. Old/Classic Pochmann	41

4.3. M2/R2	50
5. Comparativa de los métodos de resolución a ciegas. Propuesta de mejora	59
5.1. Utilizando el método M2/R2	60
5.2. Utilizando el método Old/Classic Pochmann	61
5.3. Utilizando el método 3OP	63
5.4. Comparación de estos tres métodos	65
5.5. Comparación con los métodos normales de resolución	65
5.6. Propuesta de mejora	68
Conclusiones	69
Bibliografía	71

Resumen y palabras clave

El presente Trabajo Fin de Máster pretende ampliar los conocimientos aprendidos durante el desarrollo del Máster Interuniversitario de Matemáticas cursado en la Universidad de Jaén.

El objetivo es realizar un estudio matemático sobre la resolución del cubo de Rubik a ciegas, implementando diferentes métodos y examinando qué partes de cada uno de ellos se puede mejorar para intentar realizar un método más eficaz y rápido en cuanto al número de movimientos.

Se ha realizado un estudio en profundidad una parte de las matemáticas que tiene este rompecabezas, centrándonos en teoría de grupos, permutaciones y ciclos. Los contenidos de este trabajo se han analizado utilizando diversos documentos y comparando diferentes fuentes de información.

Seguidamente, se ha desarrollado un capítulo sobre aspectos generales del cubo de Rubik, centrándonos en los giros y movimientos que están permitidos en este rompecabezas, en la orientación de sus piezas, junto con su justificación matemática y, antes de comenzar a desarrollar cada uno de los diferentes algoritmos, se han dado algunas reglas nemotécnicas para ayudar a la memorización de cada uno de ellos.

A continuación, se han explicado en qué consisten tres métodos diferentes para resolver el cubo a ciegas, en concreto el método 3OP, el método Old Pochmann y el método M2/R2. Se han elegido estos tres métodos ya que son los más utilizados por aquellos que resuelven el cubo a ciegas en los campeonatos que se celebran

Por último, una vez vistos estos tres métodos, se han estudiado el número de movimientos que se necesitarían realizar con cada uno de ellos para resolver el mismo ejemplo y así poder concluir las ventajas y los inconvenientes de cada método e incluso llegar a mejorar alguno.

Palabras clave: Cubo de Rubik, orientación, aristas, vértices, permutación, movimientos.

Abstract and keywords

This Master's Thesis aims to expand the knowledge learned during the development of the Inter-university Master's Degree in Mathematics at the University of Jaén.

The objective is to carry out a mathematical study on the resolution of the blind Rubik's cube, implementing different methods and examining which parts of each of them can be improved to try to make a more efficient and faster method in terms of the number of moves.

An in-depth study of the mathematics part of this puzzle has been carried out, focusing on group theory, permutations and cycles. The contents of this work have been analyzed in the light of documents found in Rubik's Cube associations and comparing different sources of information.

Next, a chapter on general aspects of the Rubik's cube has been developed, focusing on the turns and movements that are allowed in this puzzle, on the orientation of its pieces, together with their mathematical justification and, before starting to develop each of the different algorithms, some mnemonic rules have been given to help the memorization of each one of them.

Then, three different methods to solve the blind cube have been explained, namely the 3OP method, the Old Pochmann method and the M2/R2 method. These three methods have been chosen because they are the most used by those who solve the blind cube in the championships that are held in the world.

Finally, once we have seen these three methods, we have studied the number of moves that would be needed to solve the same example with each of them in order to conclude the advantages and disadvantages of each method and even to improve some of them.

Keywords: Rubik's cube, orientation, edges, vertices, permutation, movements.

Introducción

En el presente trabajo vamos a centrarnos en algunos de los diferentes métodos que se utilizan para resolver el cubo de Rubik, concretamente, para su resolución a ciegas. Esto consiste en encontrar la solución del cubo sin ver los movimientos que se están realizando y los cambios que se están produciendo en las piezas. En campeonatos de resolución del cubo a ciegas, solamente permiten visualizarlo al principio para que se memoricen cada una de sus piezas y puedan llevar a cabo su resolución.

El cubo de Rubik, según la información recopilada de las fuentes bibliográficas [17], [18], [19], [22] y [24], fue inventado en 1974 por Erno Rubik, un profesor de arquitectura de la Universidad de Budapest. Este profesor diseñó el cubo para explicar a su alumnado conceptos matemáticos como las relaciones espaciales y el movimiento tridimensional. Después de haberle enseñado el prototipo del cubo a sus estudiantes, decidió registrar el invento en 1975 en la oficina de patentes de Hungría y lo hizo bajo el nombre de Cubo Mágico.

Después de la gran aceptación que tuvo el cubo por Hungría, un especialista del mundo de los juguetes, Tom Kremer, fue el que decidió venderlo por todo el mundo a través de su empresa Toy Company y ya bajo el nuevo nombre del producto, que es como hoy lo conocemos: “Cubo de Rubik”.

El “Speedcubing” o también llamado “Speedsolving”, hace referencia a la tarea de resolver el cubo de Rubik tan rápidamente como sea posible. Las personas aficionadas al speedcubing, realizan competiciones y desarrollan nuevos métodos para resolver problemas y perfeccionar la técnica. La mayoría de personas que practican esta actividad, trabajan para inventar nuevas formas de perfeccionar los métodos y hacerlos más rápidos y flexibles para conseguir menores tiempos en su resolución para las competiciones.

Es muy común pensar que la resolución en sí del cubo de Rubik es compleja y además si se le añade la dificultad de resolverlo con los ojos vendados, puede complicarse aún más.

Hay más de 43 trillones, concretamente, 43.252.003.274.489.856.000 de configuraciones que pueden ser posibles en el cubo de Rubik. Esta cifra se podría deducir de la siguiente forma:

En un cubo de Rubik se pueden distinguir tres partes: aristas, vértices y centros. Cada arista puede cambiarse por otra arista y cada vértice por otro vértice, como en total hay 8 vértices y 12 aristas, hay un total de $8!$ posibles lugares para los vértices y un total de $12!$ posibles lugares para las aristas. Como cada vértice tiene tres colores, hay tres posibles orientaciones para cada uno de ellos, en total 3^8 , y como cada arista tiene dos colores, hay dos posibles orientaciones para cada una de ellas, en total 2^{12} .

Así, el número total de posibles configuraciones del cubo sería:

$$8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} = 5'190240339 \cdot 10^{20}$$

Aquí estaríamos teniendo en cuenta que todas las posiciones son posibles en el cubo de Rubik, afirmación que no es cierta ya que, como veremos en el siguiente capítulo, debido a la paridad del cubo no se puede dar el caso de que solamente una arista o un vértice estén mal orientados, o que solo dos piezas estén permutadas. En primer lugar, la permutación de vértices y aristas debe de ser en total par, lo que nos elimina la mitad de las posibilidades.

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2}$$

Por otra parte, no existe ningún algoritmo que permita girar un solo vértice y se deje el resto del cubo sin mover, ya que esto sería imposible de resolver. Además, cada vértice puede tener tres orientaciones distintas, por lo que esos tres casos habría que reducirlos a uno.

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 3}$$

Finalmente, como ha ocurrido anteriormente con los vértices, podemos orientar todas las aristas como queramos excepto orientar una sola arista sin mover el resto del cubo. Como cada arista tiene dos posibles orientaciones, se reducen los casos a la mitad.

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 43,252,003,274,489,856,000$$

Además, este rompecabezas tiene múltiples facetas diferentes a las relacionadas con el juego y el entretenimiento, ya que se puede utilizar con distintas finalidades, como por ejemplo en el ámbito de la docencia y como se nos explica en [8], [14] y [34].

El cubo de Rubik, es una muy buena herramienta para la mejora de la memoria y para adquirir conceptos de la asignatura de matemáticas, ya que con él, se fomenta la creatividad, la atención y concentración, así como la ejecución de estrategias para después de realizar todos los pasos, cumplir el objetivo principal de acabar el cubo de Rubik.

Trabajar en las aulas con el cubo de Rubik, supone una gran ayuda para fomentar la inteligencia espacial y lógico-matemática. Numerosas investigaciones demuestran las grandes ventajas que la resolución del cubo de Rubik proporciona en edades tempranas, entre ellas destacan desarrollo intelectual y psicomotriz, además de una mejora de la inteligencia espacial, visualización y resolución de problemas, toma de decisiones, creación y ejecución de estrategias.

A lo largo del proceso de aprendizaje de todos los algoritmos para resolver el cubo, se trabajan muchos aspectos de la mente, tales como la memoria y el razonamiento, con la finalidad de encontrar algoritmos más cortos para realizar un mismo movimiento.

Hablando desde mi propia experiencia, comencé la realización de este trabajo sin saber resolver el cubo y a medida que he ido progresando en su resolución, fui siendo consciente de que la dificultad es la misma pero era capaz de comprender el funcionamiento del cubo.

En el ámbito educativo, dentro del Programa Profundiza de la Junta de Andalucía, se está llevando a cabo un proyecto que se denomina “*Descubrimos el cubo de Rubik y robótica con Lego*”. El principal

objetivo de este proyecto es dar a conocer al alumnado el cubo de Rubik y el mundo de la robótica, iniciando así el desarrollo de nuevas capacidades que no se cubren en el currículum oficial [20].

Este trabajo consta de cuatro partes diferenciadas que voy a comentar brevemente a continuación:

- **Primer capítulo:** se explican cada una de las partes del cubo junto con la notación que se va a utilizar para facilitar la comprensión de los métodos. Además también se explican los giros y rotaciones que se pueden realizar con el cubo de Rubik.
- **Segundo capítulo:** se explica la parte de las Matemáticas relacionada con el cubo de Rubik, en concreto teoría de grupos y permutaciones, ya que están presentes en los movimientos del cubo y nos permite entender con mayor facilidad el funcionamiento de este rompecabezas. Además, he realizado un paralelismo entre los conceptos matemáticos y su correspondencia con el cubo de Rubik.
- **Tercer capítulo:** se explican qué significa la orientación de las piezas del cubo y algunas pautas para ayudar con la memorización de las piezas para la resolución del cubo de Rubik a ciegas.
- **Cuarto capítulo:** se explican tres métodos para resolver el cubo a ciegas, en concreto el método 3OP, el método de Old Pochmann y el método M2/R2. Además, se explican cuáles son las ventajas y desventajas de cada uno respecto a los algoritmos que utilizan, la dificultad de memorización y la rapidez con la que permiten resolver el cubo de Rubik.
- **Quinto capítulo:** en este capítulo se ha resuelto un ejemplo general del cubo de Rubik con los tres métodos vistos en el capítulo anterior para comparar el número de movimientos que se necesitan con cada uno de ellos y la facilidad o complejidad de memorización de manera aproximada y general, dando una propuesta de mejora. Además también se comparan los tres métodos con los métodos convencionales de resolución del cubo.

Capítulo 1

Notación y giros en el cubo de Rubik

En este capítulo se van a definir conceptos claves que nos van a facilitar la explicación de los métodos de resolución del cubo de Rubik a ciegas. El capítulo se ha dividido en dos partes.

En la primera sección hemos fijado la notación que vamos a utilizar para hablar de este rompecabezas y cada una de las partes que lo forman para que a lo largo del trabajo se comprenda la notación empleada. En la segunda sección se han explicado los giros y rotaciones que se pueden hacer con el cubo.

Los documentos que se han utilizado para realizar este capítulo han sido [\[9\]](#), [\[19\]](#), [\[28\]](#) y [\[32\]](#).

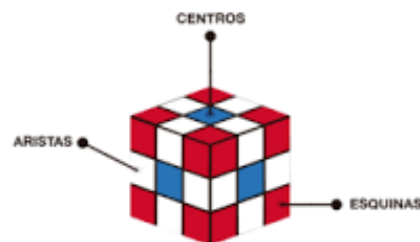
1.1. Notación y partes del cubo de Rubik

El cubo de Rubik es un rompecabezas que tiene 6 caras que se pueden mover formadas por 26 piezas ensambladas en un engranaje que permite que las caras giren. Diremos que el cubo está resuelto si cada cara tiene un único color y, diremos que está mezclado cuando en alguna de las caras haya dos o más colores diferentes. El objetivo principal del cubo es, partiendo de un estado mezclado, intentar resolverlo.

En el cubo podemos diferenciar tres piezas diferentes, los centros, los vértices y las aristas.

Definimos estas tres piezas:

Centros. Los centros de un cubo de Rubik 3x3, son piezas que nunca se mueven, es decir, no varían su posición, aunque hay algunos tipos de rompecabezas en los que los centros si cambian y pueden hacer que su resolución sea más complicada, como por ejemplo [1.1a](#), [1.1b](#) y [1.1c](#):



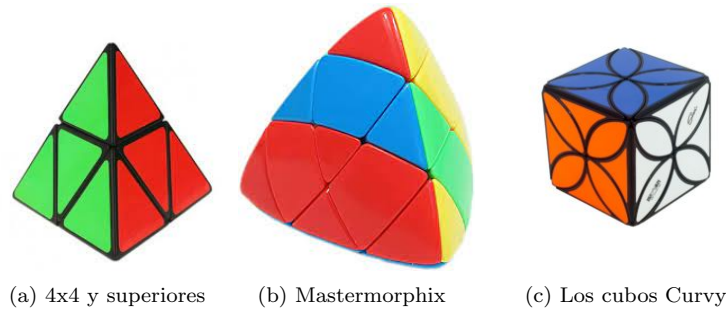


Figura 1.1: Diferentes cubos de Rubik

En el cubo 3x3x3, en el que nosotros nos vamos a centrar, los centros están fijos en el centro de cada cara y son los encargados de determinar el color de la misma. Cada cubo de Rubik 3x3 tiene 6 centros. Cada cara del cubo la denotaremos por uno de los elementos del conjunto:

$$\{c_i | 1 \leq i \leq 6\}$$

La letra c , la usaremos para denotar las caras y el subíndice para cada una de las seis caras que tiene el cubo. La cara c_1 , será la cara blanca, la c_2 cara verde, c_3 cara naranja, c_4 cara azul, c_5 cara roja y por último c_6 cara amarilla, esta enumeración la he utilizado para que las caras opuestas sumen 7, al igual que un dado. Podemos verlas en la figura 1.2.

Aristas. El cubo de Rubik tiene 12 aristas, se sitúan entre los vértices y están formadas por dos colores, según con qué caras sea adyacente cada una de las aristas cuando el cubo está resuelto. Para denotarlas, utilizaremos la letra a y serán los elementos que pertenezcan al siguiente conjunto:

$$\{a_i | 1 \leq i \leq 12\}$$

Para realizar la enumeración de las aristas seguiremos el siguiente orden, empezaremos enumerando la arista blanco-verde, recorreremos la cara blanca en sentido horario, posteriormente bajamos a la arista verde-naranja, y recorreremos en sentido horario hasta la verde-roja y por último bajamos a la cara amarilla, empezamos por la arista amarilla-verde y recorreremos la cara en sentido horario hasta la amarilla-roja. Podemos verlas en la figura 1.2.

Vértices. El cubo tiene un total de 8 vértices y cada uno se compone de tres colores diferentes. Para nombrarlos utilizaremos la letra v y un subíndice del 1 al 8:

$$\{v | 1 \leq i \leq 8\}$$

Para enumerar a los vértices, empezaremos enumerando el vértice blanco-verde-rojo, recorreremos la cara blanca en sentido horario, y después, empezaremos con el vértice amarillo-verde-rojo y recorreremos la cara amarilla en sentido horario. Podemos verlos en la figura 1.2.

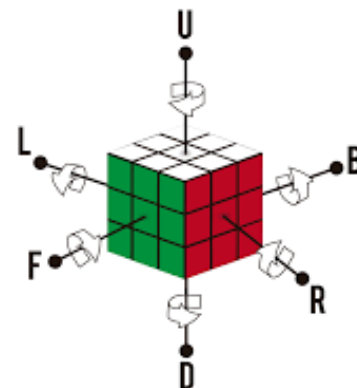
Resumiendo, las aristas y vértices son móviles y los centros son inmóviles, los cuales nos indican el color del que tenemos que formar cada cara.

			e3	a3	e4			
			a2	C1	a4			
			e2	a1	e1			
e3	a2	e2	e2	a1	e1	e1	a4	e4
a6	C3	a5	a5	C2	a8	a8	C5	a7
e7	a10	e6	e6	a9	e5	e5	a12	e8
			e6	a9	e5			
			a10	C6	a12			
			e7	a11	e8			

Figura 1.2: Cubo enumerado (elaboración propia).

Para comenzar a explicar la notación que vamos a utilizar en lo que sigue, tomaremos el cubo de Rubik con la cara de color blanco hacia arriba y la cara de color verde frente a nosotros. Se puede comprobar que con el cubo podemos realizar seis giros: derecha, izquierda, superior, inferior, cara frontal y por último, cara trasera. A cada cara le asignaremos una letra en mayúsculas: Cada letra hace referencia a una capa y están en inglés, que es una notación estándar.

- U** (Up): Cara blanca, capa superior
- D** (Down): Cara amarilla, capa inferior
- R** (Right): Cara Roja, capa derecha
- L** (Left): Cara naranja, capa izquierda
- F** (Front): Cara verde, capa delantera
- B** (Back): Cara Azul, capa trasera



1.2. Giros y movimientos

Cuando a lo largo del trabajo escriba cada una de las letras mayúsculas anteriores, lo que se está indicando es que se realiza un giro de 90° en sentido horario y cuando cada una de las letras anteriores se encuentren escritas junto con un apóstrofe, el giro se realizará en sentido antihorario. La forma en la que se vería en el cubo la realización de algunos movimientos sería la siguiente:

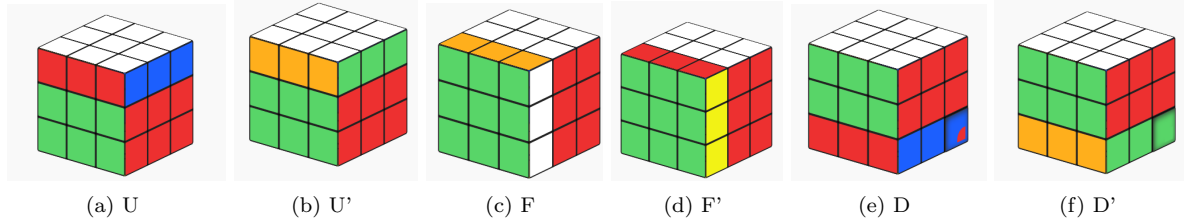


Figura 1.3: Giros (elaboración propia).

Una vez comentados los giros de las capas básicas, veamos los giros de las capas centrales aunque se usen con mucho menos frecuencia. Tan solo tenemos tres capas:

Capa **M** 1.4a: Esta capa se sitúa entre las capas **L** y **R**, y se comporta igual que la **L** para el giro. Es decir, para saber para que lado la tenemos que girar tenemos que imaginar que el reloj esta en la cara **L**.

Capa **E** 1.4b: Esta capa está situada entre las capas **D** y **U** y el comportamiento de su giro es igual que la capa **D**.

Capa **S** 1.4c: Esta capa se sitúa entre las capas **B** y **F** y su giro se comporta igual que la capa **F**.

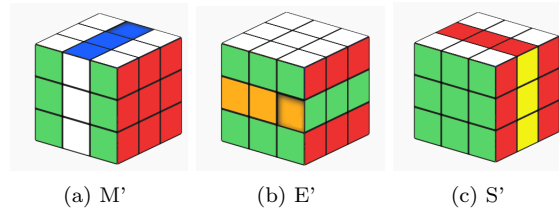


Figura 1.4: Giros capas centrales (elaboración propia).

Además de los giros horarios y antihorarios, todas las capas pueden tener un doble giro, que éste daría igual si hace en sentido horario o antihorario ya que se llegaría al mismo punto. Este doble giro se denota con la letra mayúscula seguida de un 2, por ejemplo, un doble giro de la capa frontal se denotaría **F2** y podemos ver en la figura 1.5.

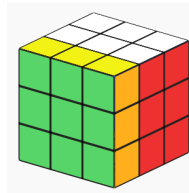


Figura 1.5: Doble giro (elaboración propia).

Para resolver el cubo, se realizan una serie de algoritmos, un algoritmo es una sucesión de giros, que se encontrarán escritos como una sucesión de letras. Los algoritmos se leen y se realizan de izquierda a derecha.

Para finalizar la notación, nos quedaría denotar las rotaciones del cubo de Rubik para facilitar la memorización de los algoritmos y poder emplear los mismos aplicándolos a piezas diferentes.

Estas rotaciones serían:

- X: Rotamos el cubo por el eje X, es decir, lo cogemos con dos dedos, uno por la pieza central de la capa L y el otro por la pieza central de la capa R y se giraría sobre su eje.
- Y: Rotamos el cubo por el eje Y, es decir, lo cogemos con dos dedos, uno por la pieza central de la capa U y el otro por la pieza central de la capa D y se giraría sobre su eje.
- Z: Rotamos el cubo por el eje Z, es decir, lo cogemos con dos dedos, uno por la pieza central de la capa F y el otro por la pieza central de la capa B y se giraría sobre su eje.

Estas rotaciones se harían tal cual se muestran en la siguiente imagen:

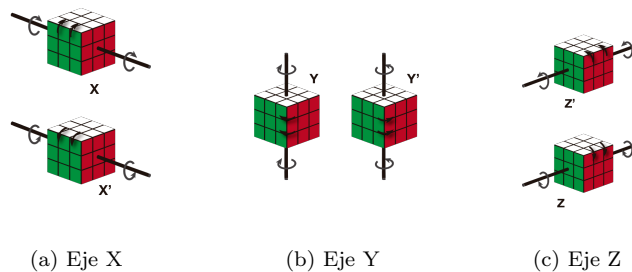


Figura 1.6: Rotaciones del cubo de Rubik.

Capítulo 2

Fundamentos matemáticos. Grupos y permutaciones

En este capítulo se presenta formalmente la teoría de grupos y permutaciones, que como veremos, es la base matemática de los movimientos del cubo de Rubik, por lo que realizaremos un paralelismo entre las matemáticas y el rompecabezas, para mejorar el entendimiento de cada uno de los métodos y facilitar su comprensión. En este capítulo se dan nociones de cursos básicos de Matemáticas.

Para realizar este capítulo se han consultado fuentes bibliográficas como: [3], [4], [5], [6], [7], [9], [12], [13], [19] y [29].

2.1. Fundamentación matemática para los algoritmos

Definición 2.1.1. Diremos que $(G, *)$ es un grupo si G es un conjunto no vacío y $*$: $G \times G \rightarrow G$ es una operación binaria que cumple las siguientes propiedades:

1. La operación es asociativa, es decir $\forall a, b, c \in G$ se verifica $a * (b * c) = (a * b) * c$.
2. Existe un elemento $e \in G$ que verifica que $a * e = a = e * a \forall a \in G$, a este elemento se le conoce como elemento neutro.
3. Todo elemento tiene inverso, es decir, $\forall a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = e = b * a$.

Si además se verifica que la operación es conmutativa ($a * b = b * a$), se trata de un grupo abeliano.

Paralelismo con el cubo de Rubik

Los movimientos del cubo de Rubik forman un grupo: la composición de dos movimientos de las caras del cubo es un movimiento, la composición de movimientos es asociativa, ya que se pueden componer giros (siempre y cuando se respete el mismo orden en los movimientos) y no cambiar el resultado. El cubo de Rubik tiene elemento neutro que sería el movimiento nulo y

por último, de cada movimiento se podría obtener su inverso que sería otro movimiento.

Los elementos del grupo del cubo de Rubik serían todos los movimientos que se pueden hacer con sus caras, es decir, $(G_c = \{F, B, U, D, R, L\})$, todas las posibles secuencias de movimientos (tanto las simples, giro de una cara, como las compuestas, giro de varias caras de forma consecutiva). Dadas dos secuencias de movimientos $S1$ y $S2$, la operación $*$ del grupo $S1 * S2$, consiste en realizar $S1$ y a continuación $S2$.

Se cumplen las condiciones que se exigen para que esta operación sea un grupo:

- Operación interna. Si $S1$ y $S2$ son dos secuencias de G , $S1 * S2$ también es una secuencia que pertenece a G_c .
- Elemento neutro. El elemento “e” sería no hacer movimientos, por lo que para cualquier secuencia S , se cumple que, $S * e = e * S = S$. Hacer una secuencia S y luego no hacer nada da el mismo resultado que no hacer nada y realizar S o realizar S simplemente [2.1a](#).
- Propiedad asociativa. Dado cualquier trío de secuencias $S1$, $S2$ y $S3$ pertenecientes a G_c , es obvio que, $(S1 * S2) * S3 = S1 * (S2 * S3)$.
- Elemento inverso. Si se realiza un movimiento S que consiste en el giro de una cara, es posible deshacer su efecto girando la misma cara en sentido contrario al primero. Esta operación inversa a S , se representa por S' .

Por ejemplo, si giramos la cara derecha 90° en sentido horario, R , y queremos deshacer este movimiento, tendríamos que volver a girar la cara superior 90° pero en sentido anti-horario, R' [2.1b](#) y [2.1c](#).

Si el movimiento S es una secuencia con varios giros, para deshacer su efecto habría que realizar en orden inverso todos los inversos de los movimientos que forman S [2.2a](#) y [2.2b](#).

El inverso del inverso de un elemento es él mismo, es decir: $(a')' = a$. En el cubo de Rubik, si se realiza el inverso de un movimiento y posteriormente el inverso de éste, en realidad el cubo de Rubik no sufriría ningún cambio, ya que lo que se hace con el primer movimiento se deshace con el segundo.

El grupo del cubo no es conmutativo ya que si dos secuencias se realizan en orden inverso el resultado puede ser diferente. Por ejemplo, $FR \neq F'R'$ [2.2a](#) y [2.2b](#).

Si girar las caras del cubo de Rubik fuera una operación conmutativa, resolver el cubo sería más sencillo, solo sería necesario asegurarse de que el número de giros de las caras fuese múltiplo de 4.

Si dos secuencias de G_c producen el mismo efecto en el cubo, se consideran la misma, por tanto si partimos del cubo ordenado, cada una de las secuencias de G_c producirá un estado diferente del cubo. El número de elementos de un grupo se denomina orden.

El grupo del cubo de Rubik sería único en el caso del cubo estándar que conocemos, si fuese un cubo enumerado o con imágenes, esto no sería trivial ya que los centros se giran.

Veamos estas propiedades con imágenes del cubo de Rubik:

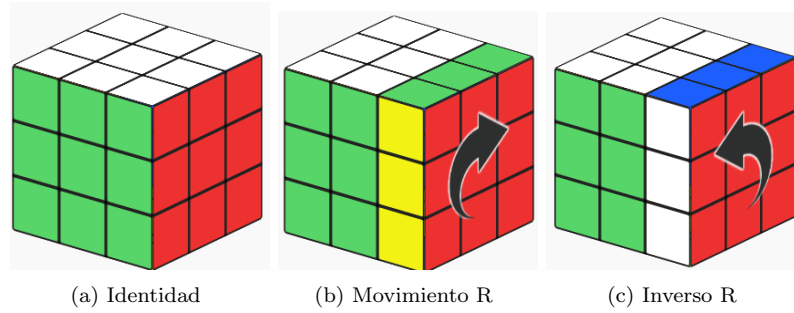


Figura 2.1: Elaboración propia

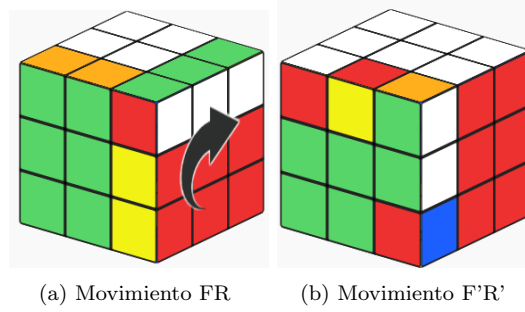


Figura 2.2: Elaboración propia

Definición 2.1.2. Sea G un grupo, $a \in G$ y $n \in \mathbb{Z}$, definimos a^n como:

- $a^0 = e$
- $a^n = a \cdot a^{n-1}$, si $n > 0$
- $a^n = (a^{-n})^{-1}$, si $n < 0$

Propiedad 2.1.1. $\forall a \in G, \forall n, m \in \mathbb{Z}$ se verifica:

- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $a^n a^m = a^{n+m}$

Definición 2.1.3. Dado un grupo G y $g \in G$, si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = e$, el menor natural positivo que cumple esta igualdad, se dice que es el orden de g . En caso de no existir se dice que g tiene orden infinito. Se denota por $\text{ord}(g)$.

Definición 2.1.4. El orden de un grupo es el número de elementos que tiene. Si G tiene n elementos, se denotará por $|G| = n$. Y se verifica que para cualquier elemento $g \in G$, $g^n = e$.

Paralelismo con el cubo de Rubik

En el caso del cubo de Rubik tenemos que $F^4 = B^4 = U^4 = D^4 = R^4 = L^4 = e$, ya que hacer cuatro veces un giro de 90° en cada una de las caras, dejaría el cubo sin realizar ningún cambio.

Definición 2.1.5. Sea G un grupo y sea $H \neq \emptyset$ con $H \subseteq G$, se dice que H es un subgrupo de G , si:

- $\forall a, b \in H, ab \in H$
- $a' \in H$

Si H es un subgrupo se denotará por $H \leq G$.

Paralelismo con el cubo de Rubik

Un subgrupo de G_c es cualquier subconjunto de G_c , que siga cumpliendo las condiciones exigidas a G_c , esto es que siga siendo un grupo.

Las secuencias que están permitidas se denominan generadores del subgrupo. Por ejemplo:

- Giros de 180 grados de dos caras que sean contiguas. Si las caras son por ejemplo la frontal y la derecha, los posibles movimientos son $F2$ o $R2$. Este subgrupo tiene 12 elementos y una secuencia sería por ejemplo la siguiente: $(F2R2)^6$. El resultado de este conjunto de movimientos es volver a la posición inicial que presentaba el cubo antes de empezar a hacerlos.
- Giros de capas. El giro de capas da lugar a 4 subgrupos:
 1. Podemos girar las tres capas 90° . Los giros posibles son (RL') , (FB') y (UD') . Tiene 768 elementos.
 2. Una de las capas gira 180° . Los giros posibles son $(R2L2)$, (FB') y (UD') . Tiene 192 elementos.
 3. Dos de las capas giran 180° . Los giros posibles son $(R2L2)$, $(F2B2)$ y (UD') . Tiene 32 elementos.
 4. Las tres capas han de girar 180° . Los giros posibles son $(R2L2)$, $(F2B2)$ y $(U2D2)$. Tiene 8 elementos.

Algunos ejemplos del cubo obtenidos con giros de capas son los siguientes:

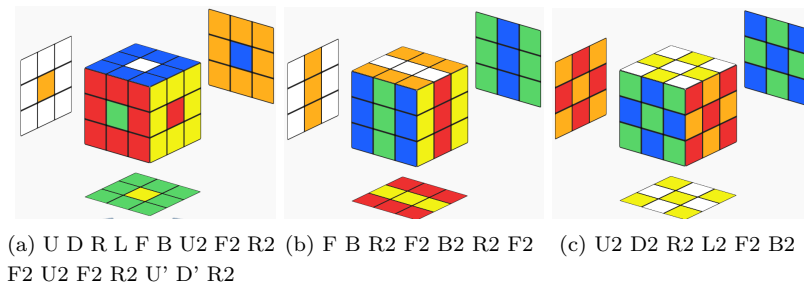


Figura 2.3: Patrones obtenidos con los subgrupos generados con giros de capas (elaboración propia).

Otros subgrupos los vamos a mencionar en la siguiente tabla:

Generador	Orden (nº elementos)
R2, L2	4
R2, L	8
R, L	16
F2, R2	12
F2, R	14.400
F, R	73.483.200
F2, R2, U2	2.592
F, R, U	170.659.735.142.400
F, B, R, L, U, D	43.252.003.274.489.856.000

Definición 2.1.6. Dado un grupo G , y dados $x, y \in G$, el conmutador de x e y viene dado por:

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

¿Por qué son útiles los conmutadores en el cubo de Rubik?

Paralelismo con el cubo de Rubik

Los conmutadores en el cubo se utilizan para realizar los diferentes algoritmos que veremos posteriormente para intercambiar piezas sin alterar el orden inicial del resto de piezas. En el cubo Rubik, los conmutadores permiten permutar 3 vértices, 3 aristas, orientar 2 vértices o 2 aristas, entre otras permutaciones.

Un **nivel de referencia** es aquella capa donde hay dos vértices o dos aristas que queremos permutar u orientar. Este nivel no puede ser alterado al acabar los movimientos realizados en la secuencia x excepto la pieza que se quiere intercambiar.

En el cubo:

- x : Es un conjunto de movimientos realizados para intercambiar un vértice o una arista del nivel de referencia por otro vértice o arista que no se encuentra en el nivel de referencia.
- x^{-1} : Es el inverso de movimientos de x .
- y^{-1} : Es el inverso de movimientos de y .

Definición 2.1.7. Sea G un grupo, $x, y \in G$, diremos que x e y son conjugados si $\exists g \in G$, tal que

$$y = gxg^{-1}$$

Paralelismo con el cubo de Rubik

Los conjugados, en el cubo de Rubik, permiten permutar y además orientar vértices o aristas. Donde:

- g : Es un conjunto de movimientos que alteran la posición de los vértices o de las aristas que queremos permutar u orientar. Estos movimientos pueden desordenar el cubo completamente.
- x : Es el grupo de algoritmos conmutadores, con todas las características descritas en el caso anterior.
- g^{-1} : Es el inverso de movimientos de g .

2.2. Permutaciones

Definición 2.2.1. Una permutación de un conjunto X es una función biyectiva de X en X .

Denotaremos por S_X al conjunto

$$S_X = \{\sigma : X \rightarrow X \mid \sigma \text{ es biyectiva}\}$$

Si $X = \{1, 2, \dots, n\}$, S_X se denota por S_n . Si tomamos $\alpha, \beta \in S_X$ la composición de α seguida de β se denota por $\beta\alpha$.

Paralelismo con el cubo de Rubik

Se define una permutación en el cubo de Rubik como un reordenamiento del conjunto de objetos, es decir de sus aristas y vértices.

Como ejemplo concreto, si tenemos el conjunto de elementos $\{1, 2, 3, 4\}$, podríamos usar $\{1, 3, 4, 2\}$ para representar la permutación que deja fijo el contenido de la casilla 1, mueve el contenido de la posición 2 a la posición 3, el contenido de la posición 3 lo mueve a la posición 4 y el de la posición 4 a la posición 1.

La forma más común de escribir una permutación sería denotarla como σ , aunque también nos la podemos encontrar en forma de matriz de dos filas, en la que en la primera fila se encuentran los elementos del dominio ordenados y en la segunda fila las imágenes correspondientes a los elementos reordenados.

Por ejemplo, dado el conjunto ordenado de los 8 vértices, se escribiría:

$$\sigma = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ v_3 & v_4 & v_5 & v_7 & v_6 & v_1 & v_8 & v_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Como una permutación de un conjunto es una función biyectiva de dicho conjunto en sí mismo, se verifica que existe σ^{-1} de forma que su composición produce la aplicación identidad. Se tendría que:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} v_3 & v_4 & v_5 & v_7 & v_6 & v_1 & v_8 & v_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

2.3. Notación de ciclos

Definición 2.3.1. Sea $Y = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq X$, entonces escribimos $(i_1, \dots, i_r)$ para denotar la aplicación $\sigma \in S_n$ que verifica que $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{r-1}) = i_r$, $\sigma(i_r) = i_1$ y $\sigma(x) = x$ cuando $x \in X - Y$. La permutación σ así definida se denomina **ciclo de longitud r** .

Paralelismo con el cubo de Rubik

A continuación, se va a mostrar una forma muy interesante para describir las permutaciones. Dada cualquier permutación P , el resultado de aplicar P sucesivamente nos dará lugar a $P, P^2, P^3, \dots$

En el cubo de Rubik, tenemos una cantidad finita caras y piezas que podemos permutar.

Consideramos una de las caras, por ejemplo U , habrá algún momento en el que al aplicar las sucesivas potencias de P a U , tengamos alguna repetición, ya que el número de caras y de piezas es finito.

Por ejemplo, supongamos que P^m y P^n envían U al mismo símbolo T y que $m < n$. Entonces si consideramos la inversa de P , y aplicamos $(P^{-1})^m$, el resultado es el mismo que si aplicamos sobre U , la permutación identidad (no realizar ningún movimiento) y si aplicamos sobre U la permutación P^{n-m} . En definitiva, P^{n-m} hace que U se desplace a U . De esta forma hemos encontrado que existe una potencia mayor que cero de P que envía U a U .

Nos quedamos con la más pequeñas de estas potencias, llamémosla t , de forma que $P^t(U) = U$. Representamos esta situación de la siguiente forma:

$$(S, P(U), P^2(U), \dots, P^{t-1}(U))$$

por lo que a partir de $P^{t-1}(U)$, empieza a repetirse toda la secuencia. A esta expresión la llamamos **ciclo**. Por tanto, un ciclo es una permutación que intercambia cíclicamente elementos y fija los restantes. En el ejemplo de la permutación anterior, su descomposición en ciclos quedaría: $\sigma = (1356)(2478)$

También hay que tener en cuenta que da igual el elemento que consideremos como primero en el ciclo, ya que los siguientes ciclos serían iguales: (A,B,C,D) y (B,C,D,A) .

2.4. Permutaciones pares e impares

Las permutaciones de la forma (a, b) , se llaman transposiciones, es decir, son ciclos de longitud dos, y se puede comprobar que, en general, $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2)(a_1, a_3) \dots (a_1, a_n)$.

La descomposición de una permutación como un producto de transposiciones no es única: $(1, 2)(1, 3) = (4, 5)(3, 6)(1, 2)(1, 6)(4, 5)(3, 6) = (1, 2, 3)$.

Definición 2.4.1. Sea P una permutación y $P = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$ con σ_i transposición $1 \leq i \leq k$, se define **signatura de σ** como:

$$\text{sign}(\sigma) = (-1)^k$$

Se dirá que una permutación es par si la signatura vale 1 y diremos que la permutación es impar si la signatura vale -1. Si σ es un ciclo de longitud m , entonces $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{m-1}$.

Definición 2.4.2. Diremos que una permutación σ es par si se puede expresar como producto de un número par de transposiciones y diremos que es impar si se puede expresar como producto de un número impar de transposiciones.

Ejemplo 2.4.1. La permutación $(1, 2)(1, 2)$ y la permutación $(1, 2, 3) = (1, 2)(1, 3)$ son pares, mientras que las permutaciones $(1, 2)$ y $(1, 2, 3, 4) = (1, 2)(1, 3)(1, 4)$ son impares.

Definición 2.4.3. Llamaremos grupo alterno al grupo de permutaciones pares de un conjunto finito.

Propiedad 2.4.1. Se puede conseguir una permutación par con la composición de un número par y solo un número par de transposiciones.

Conseguir una permutación impar solamente se podría obtener mediante un número impar de transposiciones.

Demostración: Si tenemos un número par de trasposiciones σ , k cuya composición forman una permutación P , se tendría que $\text{sign}(\sigma) = (-1)^k = 1$, por ser k un número par, por lo tanto, conseguiríamos una permutación par. De forma análoga se demostraría la segunda afirmación.

Como consecuencia de las reglas que cumple la suma de números enteros, podemos deducir que:

- La composición de dos permutaciones pares es par.
- La composición de dos permutaciones impares es par.
- La composición de una permutación par y una impar es impar.
- La inversa de cada permutación par es par.

Además, se puede observar que las permutaciones pares formarían un subgrupo de S_n , que es el grupo simétrico de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Este es el subgrupo alterno de n letras, denotado por A_n .

Como consecuencia, las permutaciones impares no podrían formar un subgrupo ya que la combinación de dos permutaciones impares es par y no cumpliría la primera condición de grupo.

Teorema 2.4.1. Toda descomposición de una permutación como producto de transposiciones será un número par o un número impar.

Demostración:

Sea $x_1, \dots, x_n$ números reales diferentes, definamos

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j),$$

entonces, dado $\sigma \in S_n$, σ actúa en $P(x_1, \dots, x_n)$ como sigue

$$P^\sigma(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i < j} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}).$$

Si σ es una transposición, se verifica que $\sigma(P) = -P$, por lo tanto si $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ con τ_i transposición para todo i , entonces $\sigma(P) = (-1)^k P$. Para ver que cualquier permutación se descompone como un producto de transposiciones bastará ver que todo ciclo lo hace. La descomposición no es única. Por

ejemplo:

$$(a_1, \dots, a_n) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \cdots (a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_n)(a_1, a_{n-1}) \cdots (a_1, a_2).$$

Por tanto, la paridad del número de transposiciones en las que se ha descompuesto la permutación sí viene determinada. Si tenemos dos descomposiciones de σ con n y m transposiciones, se verifica que n y m tienen que tener la misma paridad.

Teorema 2.4.2. *El producto de dos permutaciones pares es par. El producto de dos permutaciones impares es par. El producto de una permutación par y de una impar o viceversa es una permutación impar.*

Teorema 2.4.3. *La inversa de una permutación par es par y la inversa de una permutación impar es impar.*

Estos dos teoremas se pueden deducir de las propiedades elementales de la suma de los números naturales y de las propiedades de las permutaciones.

Paralelismo con el cubo de Rubik

Para representar las permutaciones que se hacen en el cubo de Rubik, hay que tener en cuenta las pegatinas de este rompecabezas y usar la notación en ciclos como hemos visto antes.

Debemos de saber que las dos pegatinas de cada una de las aristas y las tres pegatinas de cada uno de los vértices no se van a separar nunca, por lo que en lenguaje de grupos de permutaciones, se tendrá en cuenta que el conjunto de las pegatinas de la misma pieza forman un bloque para la acción del cubo de Rubik sobre el conjunto de las pegatinas de los vértices o de las aristas. Esto nos hace que se pueda simplificar la notación como producto de ciclos en el caso de movimientos del cubo de Rubik, de forma que se refleje la estructura de bloques.

Ejemplo 2.4.2. El movimiento de la cara frontal F se puede representar como:

$$F = (FU, FR, FD, FL)(URF, RBF, BLF, LUF)$$

Entendemos que la pieza FU , pasa a la FR (la cara frontal pasa a la cara frontal y la de arriba pasa a la derecha), la FR a la FD (la cara frontal pasa a la cara frontal y la cara derecha a la cara de abajo), y así con las demás aristas. En cuanto a los vértices, el URF , pasaría al RBF , y éste al BLF , y así sucesivamente.

La permutación correspondiente a girar los vértices URF en el sentido de las agujas del reloj, sería en esta notación (URF, DFU, FUD) .

2.5. El grupo de las aristas y de los vértices

Se puede observar que cada movimiento de piezas en el cubo de Rubik, corresponde con un producto de un ciclo de longitud 4 de aristas y un ciclo de longitud 4 de vértices. Por lo que, cada movimiento del cubo es un producto de una permutación impar de vértices y una permutación impar de aristas, es decir, una permutación par de piezas del cubo. Como el producto de permutaciones es siempre par, se obtendría el siguiente resultado:

Teorema 2.5.1. *Cada uno de los movimientos del cubo de Rubik induce una permutación par en el conjunto de las piezas del cubo.*

Demostración:

Supongamos que realizamos un giro en cualquiera de las capas del cubo de Rubik. Este giro, producirá el movimiento de 4 aristas y de 4 vértices simultáneamente:

Aristas: (a_1, a_2, a_3, a_4) , este ciclo sería impar.

Vértices: (v_1, v_2, v_3, v_4) , este ciclo sería impar.

Por tanto el giro, que sería la composición de los dos ciclos anteriores, sería una permutación par: $(a_1, a_2, a_3, a_4) (v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Si buscamos información en los diferentes algoritmos de resolución del cubo de Rubik, encontramos métodos que intercambian dos pares de aristas o dos pares de vértices, pero es imposible encontrar un algoritmo que nos intercambie solamente dos aristas o solamente dos vértices ya que es una permutación impar y esto contradice al teorema enunciando anteriormente.

Capítulo 3

Orientación del cubo de Rubik. Reglas de memorización

Para comenzar a resolver y entender los métodos de resolución del cubo de Rubik a ciegas, es necesario tener claro el concepto de orientación de sus piezas.

Se ha comentado y justificado en qué consiste la orientación de las piezas del cubo de Rubik y su explicación matemática, ya que este paso es clave para resolverlo con éxito. Y, por último, en la última sección se ha añadido una parte con reglas nemotécnicas para facilitar la memorización de las piezas del cubo en cada uno de los métodos que se explicarán con posterioridad.

3.1. Orientación de las piezas

Vamos a darle un orden de importancia a cada una de las seis caras, agrupándolas de dos en dos, que tendrán la misma importancia. Veamos el orden que hemos escogido para dichas caras, ordenadas de mayor a menor importancia:

1. Amarilla y blanca
2. Verde y azul
3. Roja y naranja

Las caras que tienen igual importancia son opuestas, por lo que a la hora de ver las orientaciones no tendremos problemas. Utilizando dicho orden, veamos las orientaciones de las diferentes piezas.

3.2. Orientación de aristas

Para entender la orientación de las aristas, lo primero que tenemos que tener en cuenta es que al tener dos colores, tienen dos formas diferentes de colocarse en una misma posición. A una de ellas le

corresponde el valor 0 si está **bien orientada**, y el valor 1 si está **mal orientada**.

Nos fijamos en la arista a_1 , de la siguiente figura, de los colores de esta arista, nos centramos en el color fuerte de los dos, en este caso el blanco el que tiene mayor importancia. Ahora nos fijamos en los colores de las caras adyacentes en la que la arista se encuentra, en este caso son el blanco y el verde. Finalmente observamos que el color blanco que es el color fuerte, está situada en la cara verde que no es el color fuerte entre el blanco y verde, por lo que esta arista estaría mal orientada.

En cuanto a la arista a_6 , en este caso el color de mayor importancia es el azul y si miramos las caras adyacentes, el azul estaría en la cara blanca, que con respecto a la cara roja, tiene mayor importancia, por lo que la arista estaría bien orientada.

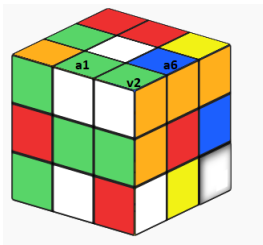


Figura 3.1: Orientación de aristas y de vértices (elaboración propia).

3.3. Orientación de vértices

Los vértices del cubo tienen tres formas distintas de colocarse en un mismo lugar. Cuando el vértice está **bien orientado**, le asignaremos el valor 0, cuando el vértice está **mal orientado en sentido horario**, le asignaremos el valor 1, y si el vértice está **mal orientado en sentido antihorario** le asignaremos el valor 2.

Nos fijamos en el vértice v_2 de la figura anterior, cuyo color más importante es el blanco. Ahora nos centramos en las tres caras en las que está situada este vértice, sus colores son blanco-verde-rojo y el color importante es el blanco, como vemos, el color blanco del vértice está situado en la cara verde, que es adyacente en sentido antihorario de la cara blanca, por lo que diremos que este vértice no está bien orientado en sentido antihorario, dándole el valor 2.

3.4. Justificación matemática de la orientación

Con el cubo de Rubik hay movimientos que no se pueden hacer realizando giros normales debido a la **paridad** que cumple este cubo 3x3x3. Esta paridad se refiere a si las permutaciones de piezas son pares o impares, que tal y como se ha explicado en el capítulo anterior, en el cubo de Rubik serían pares.

Algunos de los movimientos que no se pueden hacer en el cubo de Rubik serían por ejemplo:

- Intercambiar la posición de dos cubos pequeños sin que otros se muevan [3.2a](#)
- Girar únicamente un vértice sin que algún otro se mueva [3.2b](#)
- Girar una arista sin mover otras [3.2c](#)

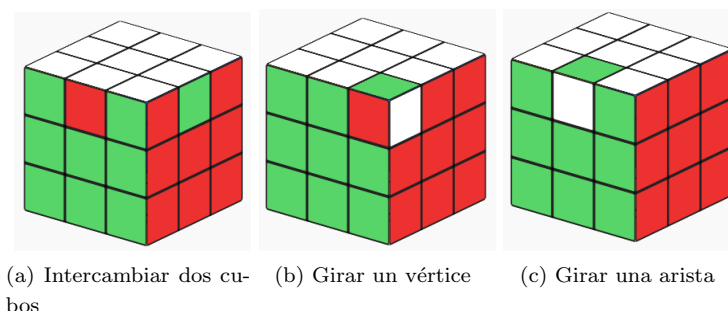


Figura 3.2: Elaboración propia.

¿Cómo cambia la orientación de los vértices y de las aristas cuando se giran las caras del cubo?

1. Si giramos la cara superior o la cara inferior de nuestro cubo, no cambia la orientación de ninguna pieza, ya que los colores fuertes siguen estando en sus caras correspondientes.
2. Si giramos la cara frontal o trasera, se cambia la orientación de cuatro vértices.
3. Si giramos la cara izquierda o derecha, se cambia la orientación de cuatro vértices y cuatro aristas

Como cada giro vemos que cambia un número par de aristas, el número total de aristas giradas cuando el cubo está deshecho debe de ser par, por lo que de esta afirmación se deduce la imposibilidad de girar solo una arista.

En cada giro se producen el mismo número de giros de vértices en sentido horario que en sentido antihorario, por lo que como le asignamos el valor 1 y el valor 2 respectivamente, el número total de giros de vértices ha de ser múltiplo de 3. De esta afirmación deducimos la imposibilidad de girar un vértice sin que otro se mueva.

Y del capítulo anterior, cuando se ha explicado las permutaciones pares e impares, se deduce la imposibilidad de intercambiar la posición de dos cubos pequeños sin que otros se muevan.

3.5. Reglas nemotécnicas para facilitar la memorización del cubo de Rubik

La fase de memorización del cubo de Rubik en su resolución a ciegas, se realiza al comienzo de cada uno de los métodos, antes de vendarse los ojos. Hay que distinguir entre la información que hay que memorizar y como memorizarla.

Existen diferentes técnicas de memorización, como se muestra en el documento [31], cada una de ellas se puede utilizar dependiendo de la persona que se disponga a resolver el cubo.

La información que hay que memorizar sería algo similar a lo siguiente:

Parte de los vértices

- Orientación:

Capa R: 0, 1, 0, 2

Capa L: 1, 1, 1, 0

- Colocación:
(1 5 7 4 2) (3 8 6)

Parte de las aristas

- Orientación:
Capa R: 0, 1, 1, 1
Capa L: 0, 0, 0, 1
- Colocación
(1 4 10 6)(2 8 3 7 11 9 12 5)

En realidad, es necesario memorizar dos números por cada una de las piezas, uno para la orientación y otro para la colocación, en total 40 números.

Vamos a explicar a continuación, la memorización de la colocación y posteriormente la memorización de la orientación.

Memorización colocación

Como hemos visto antes, para memorizar la colocación de las piezas, es necesario memorizar una secuencia de números. Hay diferentes técnicas de memorización para recordar esta secuencia de números, por ejemplo para los vértices (1 5 7 4 2)(3 8 6):

- **Memorización directa:** Esta memorización consiste en memorizar la secuencia de números completa, ya que en el caso de los vértices serían 8 números y en el caso de las aristas 12, además, siempre no van a estar todas las piezas mal colocadas por lo que habría algunos números menos y el primer número siempre es el 1, ya que se toma de referencia en los ciclos. Además, hay que memorizar la información en forma de ciclo, es decir, partiendo la secuencia para saber cuando empieza y acaba el ciclo.
- **Ruta visual:** Este sistema es bastante eficaz, ya que consiste en memorizar de forma visual la ruta que sigue el ciclo, dando toques con un dedo sobre las posiciones a memorizar. Este método necesita bastante entrenamiento para conseguir resolver en poco tiempo.
- **Abecedario:** Lo que se hace en este caso es llamar a cada una de las piezas con letras, y se elige una palabra que empiece por esa letra, por lo que cada ciclo se compone por una lista de palabras y se inventa una historia en la que se respete el orden. Otra posibilidad sería llamar a cada uno de los vértices y aristas con una palabra que recuerde a la combinación de colores, por ejemplo, la arista de colores blanca y verde, podría llamarse Betis, la azul y roja Barça y así con todas las piezas.
- **Persona, acción y objeto:** Esta técnica es similar a la técnica denominada abecedario aunque tiene un gran trabajo de memorización antes de comenzar a implementarla. A cada una de las posiciones se le asignaría una letra y a cada letra se le asocia una persona, una acción y un objeto que empiecen por dicha letra, lo que nos ayudará a recordarlo fácilmente.

Supongamos que el ciclo de vértices sea (1 2 5), habría que hacer una historia con el personaje de la posición 1 (Antonio Banderas), la acción de la 2 (Bebe), y el objeto de la 5 (Estudia). Entonces, nos tendríamos que inventar una historia con estas tres palabras que sea fácil de recordar, después de practicarlo mucho, las historias se repetirán y esto facilitaría su memorización.

Si el ciclo es más largo, como por ejemplo (1 2 5 4 7), lo más sencillo para enlazar la historia sería que en la posición donde antes hemos terminado que era la 5, utilizásemos el personaje también, después en la 4 la acción y en la 7 el objeto.

Memorización orientación

La orientación de las aristas y de los vértices se realiza de forma similar.

- Aristas: Como he comentado con anterioridad, la lista a memorizar sobre las orientaciones de las aristas sería algo así:

Capa R: 0,1,1,1

Capa I: 0,0,0,1

Capa E (central): 0,1,0,1

En estos casos lo que se hace es memorizar las posiciones en las que las piezas están mal orientadas, como en el cubo de Rubik, el número de aristas mal orientadas debe de ser par, la orientación de la última pieza por ejemplo puede ser deducida a partir del resto, aunque conviene memorizarlas todas.

- Vértices: La información que tenemos que memorizar será similar a las siguientes listas

Capa R: 0, 1, 0, 2

Capa L: 1, 1, 1, 0

En el caso de los vértices se memorizaría igual que las aristas, nos quedaríamos con las posiciones que están mal orientadas, pudiendo deducir la última posición a partir de las anteriores.

Practicar la memorización

Para practicar la memorización y que se consiga con éxito la resolución del cubo, es conveniente empezar a memorizar primero la orientación de los vértices y después memorizar el ciclo de los vértices, posteriormente, colocar las piezas y repetir este procedimiento un alto número de veces hasta ser capaces de hacer esta fase seguida. Una vez controlada la memorización de los vértices, habría que repetir el proceso con las aristas.

Capítulo 4

Métodos para resolver el cubo a ciegas

En este capítulo se van a desarrollar tres métodos para resolver el cubo de Rubik con los ojos vendados, más comúnmente conocidos como métodos de resolución a ciegas. En cada uno de los tres métodos se utilizan una serie de algoritmos que hacen únicos cada uno de ellos, por lo que los tres tienen partes buenas y partes mejorables para que el proceso de resolución sea más eficaz.

Para resolver el cubo con los ojos vendados, la persona que se dispone a resolverlo, lo que hace primero es inspeccionar el cubo para poder memorizarlo sin hacer ningún movimiento hasta que tenga vendados los ojos. En las competiciones oficiales, al solucionador se le tapa los ojos con una venda y tanto la memorización como la resolución están cronometradas, la secuencia completa es la siguiente: se inicia el cronómetro, el solucionador comienza a memorizar, se venda los ojos, resuelve el cubo, indica que ha terminado y se para el cronómetro y se observa si se ha acabado el cubo con éxito.

Los métodos de resolución a ciegas se clasifican en función de cómo se resuelve la permutación de piezas, si se realiza pieza por pieza o si por el contrario se realiza por descomposición de ciclos, es decir, se permutan varias piezas a la vez.

Los tres métodos que se van a explicar han sido elegidos debido a que son los más rápidos y más usados por los speedcubers de los récords. Además, se encuentran explicados en las siguientes fuentes bibliográficas [23] y [30].

El método **3OP** es el único en el que la permutación la realiza utilizando ciclos, los otros dos, el método **Old/Classic Pochmann** y el método **M2/R2** resuelven la permutación pieza por pieza.

Resolver el cubo a ciegas es bastante diferente a resolverlo con un método de resolución convencional, ya que el objetivo de resolverlo normal es hacerlo utilizando menos movimientos y afectando a muchas piezas en cada paso, mientras que resolverlo a ciegas, se utilizan un número limitado de algoritmos y que mueven pocas piezas para que así se pueda hacer un seguimiento de como va el rompecabezas con los ojos vendados.

Para la realización de este capítulo, se han utilizado fuentes bibliográficas como: [1], [2], [15], [31], [33], [35], [36], [37] y [38].

4.1. Método 3OP (Permutación y Orientación de 3 ciclos)

La sigla 3OP es la abreviación de 3 cycle Orient Permute, el método cuenta con 4 pasos:

1. Orientar aristas
2. Orientar vértices
3. Permutar aristas
4. Permutar vértices

Se debe realizar la orientación primeramente, pero si se resuelve primero los vértices o las aristas es irrelevante, ya que los movimientos de las aristas no afectan a los vértices y viceversa. En este método la orientación de las piezas se resuelve mediante la aplicación de conmutadores y la permutación, mediante el uso de ciclos de longitud 3.

Realizar antes la orientación que la permutación disminuye considerablemente el número de pasos a realizar ya que si por ejemplo, hablamos de aristas, cada arista tiene dos posiciones de colocación, si la arista ya está orientada, al colocarla su posición es única, por lo que se reduce a la mitad las posibilidades de su colocación.

La resolución de la orientación al principio, no afecta a la posición de las piezas, es en la fase de permutación donde cambian de posición pero con la orientación ya correcta. Cada uno de los cuatro pasos del método se resuelve de forma independiente exceptuando la paridad de la permutación que se realiza implicando dos vértices y dos aristas.

4.1.1. Orientación

Para comenzar a resolver el cubo, debemos definir una orientación correcta y nuestro primer objetivo debe de ser corregir la orientación de cada una de las piezas sin alterar su posición. Orientar vértices o aristas es completamente independiente por lo que se puede elegir con qué comenzar, ya que no alteraría el proceso.

Orientación de aristas

Cada una de las doce aristas del cubo se puede orientar de dos formas diferentes, una correcta y otra incorrecta como he desarrollado en el capítulo anterior.

A partir de esa definición, podemos determinar la orientación de una arista moviéndola (mentalmente) a su posición correcta bajo esta restricción. Si los colores de las caras coinciden con los centros, la arista está correctamente orientada.

Una forma de memorizar rápidamente y de resumir cuando una arista está bien orientada o no es la siguiente:

- En la capa U/D, (amarilla o blanca)
 1. Si la pieza tiene el color amarillo o blanco, está bien orientada.
 2. Si la pieza tiene color rojo o naranja, está mal orientada.
- En la capa R/L, (roja o naranja)
 1. Si la pieza tiene el color rojo o naranja, está bien orientada.
 2. Si la pieza tiene color blanco o amarillo, está mal orientada.

Si uno de los colores del arista es azul o verde, nos fijamos en el otro color:

- Si el centro es blanco o amarillo y el otro color, el que está alejado es rojo o naranja, está bien orientado.
- Si el centro es blanco o amarillo y el otro color, el que está alejado es blanco o amarillo, está mal orientado.
- Si el centro es rojo o naranja y el otro color, el que está alejado es blanco o amarillo, está bien orientado.
- Si el centro es rojo o naranja, y el otro color, el que está mas alejado es el rojo o naranja, está mal orientado.

Una vez que sabemos identificar la orientación de cada una de nuestras aristas, hay que memorizar cuáles están mal orientadas. Como se ha demostrado antes utilizando teoría de grupos, el cubo de Rubik tiene un número par de aristas mal orientadas, por lo que se pueden cambiar la orientación de dos aristas en dos aristas o de cuatro aristas en cuatro aristas con los siguientes algoritmos:

- $(M' U M' U M') U^2 (M U M U M) U^2$

Este algoritmo realizaría la orientación de estas dos aristas [4.1](#):

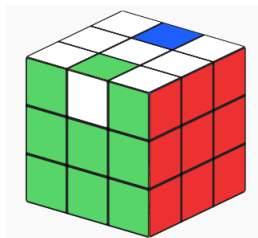


Figura 4.1: Orientación de dos aristas opuestas (elaboración propia).

Los siguientes dos algoritmos realizarían la orientación de cuatro aristas [4.2](#) y [4.3](#):

- $(M' U' M' U' M' U' M') U (M' U' M' U' M' U' M') U$

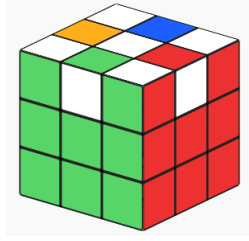


Figura 4.2: Orientación de cuatro aristas en la misma capa (elaboración propia).

■ $M' U M' U M' U M' U$

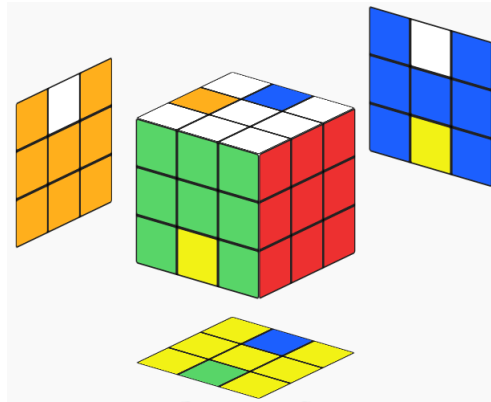


Figura 4.3: Orientación de cuatro aristas en dos capas (elaboración propia).

Aunque los algoritmos que acabamos de ver solo orientan las aristas colocadas en esas posiciones, utilizando la **conjugación**, podemos usarlos para orientar dos o cuatro aristas cualesquiera.

En la conjugación lo que se hace es, implementar alguna secuencia sencilla que permita colocar en las posiciones anteriores (a_1, a_2, a_3, a_4) , aquellas aristas que están mal orientadas, realizar uno de los dos algoritmos anteriores y, por último, deshacer la secuencia realizada antes.

Para la orientación, tanto de las aristas como de los vértices, no hay restricción en los movimientos de preparación. Sin embargo, como veremos, los movimientos de preparación para los pasos de permutación deben satisfacer algunas condiciones para asegurarse de que el algoritmo principal no altere la orientación ya corregida.

Si hay más de dos aristas orientadas incorrectamente, necesitamos usar el algoritmo anterior, conjugado apropiadamente, más de una vez.

Orientación de vértices

Para la orientación de los vértices, ya vimos en el capítulo anterior que había tres posiciones posibles para cada una de ellos, la correcta y las dos incorrectas. En el sentido de las agujas del reloj (cw), en sentido contrario a las agujas del reloj (ccw).

Lo que sigue es un método basado en conmutadores que requiere una memorización mínima. Como hemos probado utilizando la teoría de grupos básica, para cualquier configuración resoluble

del cubo, la suma de las orientaciones de los 8 vértices (donde correcta=0, cw=1, ccw=2) siempre es divisible por 3, como hemos visto en el primer capítulo.

Un vértice no podría cambiar su orientación solo por sí mismo ya que ni 0, ni 1, ni 2 es divisible por 3.

Las dos operaciones elementales que podemos hacer son orientar dos vértices en direcciones opuestas (una en sentido horario y la otra en sentido antihorario) y orientar tres vértices en la misma dirección.

En el momento en el que nos den un cubo mezclado, lo primero que deberíamos de buscar es cuantos pares de vértices hay orientados en direcciones opuestas, salvo que haya 3 desorientados en cw o cww. Para la realización de este apartado se ha utilizado como fuente de información la página [21].

A continuación se va a explicar como resolver los vértices cuando tenemos un par de vértices orientados cada uno hacia un sentido.

Supongamos que los dos vértices se encuentran en la capa U. En este caso hay tres subcasos que podemos ver en la siguiente imagen enumerados con 1a, 1b y 1c.



Figura 4.4: Vértices mal orientados. Fuente [21]

Para resolver estos casos, primero comenzamos realizando el algoritmo conocido como **A**:

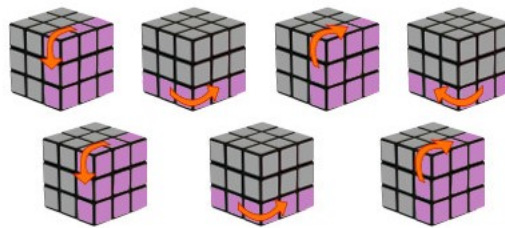


Figura 4.5: Algoritmo **A** = $R' D' R D R' D' R$. Fuente [21].

Antes de proceder a resolver nuestro cubo es necesario identificar en cuál de los tres subcasos nos encontramos y para resolverlo, realizaremos lo que he llamado con anterioridad **conmutadores**. Cualquier secuencia de la forma $X Y X' Y'$, donde X' e Y' representan inversas de X e Y , respectivamente. En particular, establecemos que X sea **A** e Y que sean uno de los tres casos de la figura 4.6, un cierto número de vueltas en U.

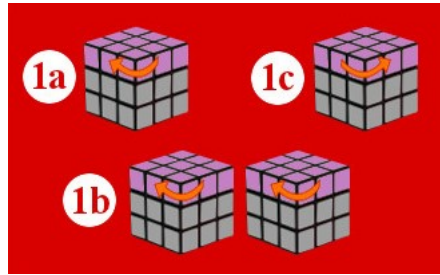


Figura 4.6: Conmutadores

Posteriormente, realizamos el algoritmo A' , que sería el inverso de A , con esto nos aseguramos de que cualquier efecto que pueda provocar A en las capas inferiores lo solucionemos:

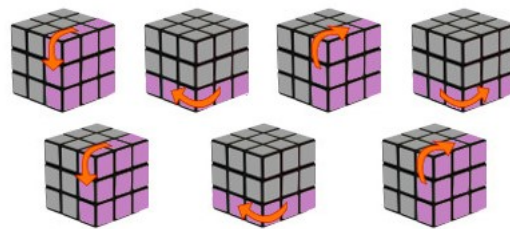


Figura 4.7: Algoritmo $A' = R' D R D' R' D R$

Para finalizar el conmutador, nos quedaría hacer el inverso de cada uno de los casos 1a, 1b y 1c de la figura 4.6, dependiendo del que hayamos realizado, esto sería Y' .

A continuación veamos los casos en los que tengamos tres vértices orientados en sentido horario o tres vértices orientados en sentido antihorario.



Figura 4.8: Tres vértices mal orientados en sentido horario

Algoritmo $C = R' D' R D R' D' R D$



Figura 4.9: tres vértices mal orientados en sentido antihorario

Algoritmo $C' = R' D R D' R' D R D'$

Estos dos algoritmos 4.8 y 4.9, solo orientan uno de los tres vértices del cubo, por lo que hay que repetirlo tres veces e ir moviendo la capa superior, colocando cada una de los vértices mal orientados en la posición en la que se encontraba el primero.

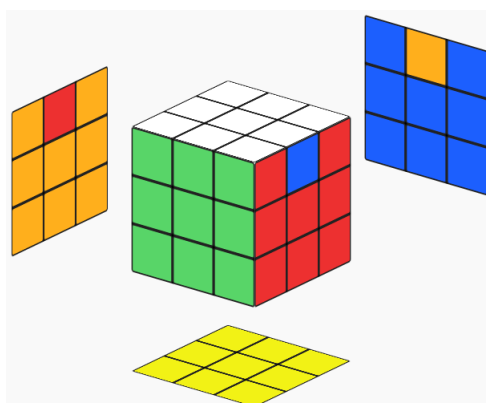
4.1.2. Permutación

Realizar la permutación de aristas y vértices es colocar cada arista y cada vértice en el lugar donde deben ir para que el cubo esté resuelto. Nuestro objetivo es colocar cada una de las piezas en su lugar teniendo en cuenta la orientación ya que todas ellas deben de estar bien orientadas. Al igual que en la orientación, el paso de la permutación también se divide en permutación de aristas y de vértices, aunque para mantener la paridad, es necesario transponer un par de vértices y un par de aristas simultáneamente.

Permutación de aristas

El tercer paso sería permutar las aristas, para ello utilizamos ciclos de tres piezas. En este método, se utilizan algoritmos que cambian las piezas situadas en la posición UB y las envían a las posiciones UR o UL.

Los algoritmos que se emplean son los siguientes:

Figura 4.10: Algoritmo $UR \rightarrow UL : R' U R' U' R' U' R' U R U R^2$ (elaboración propia).

Como podemos observar en la imagen 4.10, este algoritmo cambia la pieza que se encuentra en la

posición UR, a la posición UL, y la que está en UL, la envía a la posición UB.

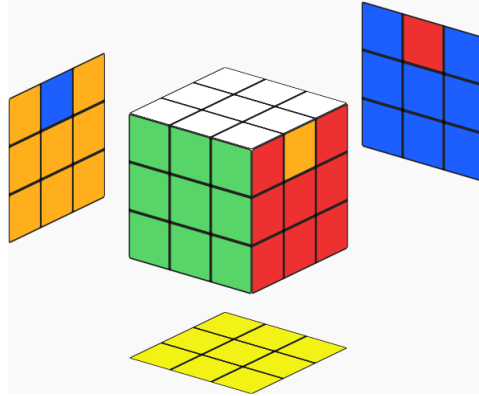


Figura 4.11: Algoritmo $UL \rightarrow UR$: $R^2 U' R' U' R U R U R U' R$ (elaboración propia).

Este algoritmo, como vemos en la imagen 4.11, lo que hace es mover la pieza que está en UL, a la posición UR, y la que está en UR, la desplaza a la posición UB.

De esta forma podríamos mover cualquier arista del cubo a su correcta posición, realizando movimientos en las capas para colocar las aristas que queremos solucionar en las posiciones UB, UL y UR. Posteriormente, se debe deshacer los movimientos hechos en las capas para que no se alteren las posiciones de las piezas ni la orientación ya realizada.

Permutación de vértices

El cuarto paso consiste en permutar los vértices ya orientados, utilizando ciclos de tres piezas.

En este método, se utilizan algoritmos que cambian las piezas situadas en la posición ULB y las envían a las posiciones UBR, URF o UFL.

Algoritmos:

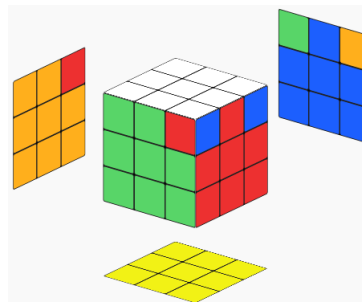


Figura 4.12: Algoritmo: $x R' U R' D^2 R U' R' D^2 R^2 x'$ (elaboración propia).

Este algoritmo ha cambiado la pieza que se encontraba en la posición ULB, a la posición UBR, y la que estaba en la posición UBR, se encuentra en la posición URF, es decir, cambia estas tres vértices en sentido horario.

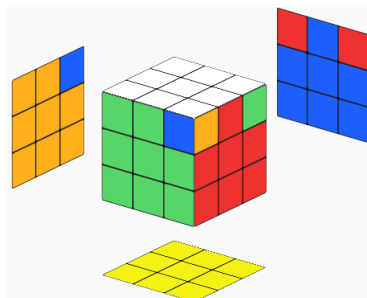


Figura 4.13: Algoritmo: $x R2' D2 R U R' D2 R U' R x'$ (elaboración propia).

Este algoritmo ha cambiado la pieza que se encontraba en la posición ULB, a la posición URF, y la que estaba en la posición URF, se encuentra en la posición UBR, es decir, cambia estas tres vértices en sentido antihorario.

Para finalizar la explicación de este método, se van a realizar una serie de comentarios con respecto a los puntos favorables que tiene la utilización del método y los puntos mejorables.

COMENTARIOS:

Cabe destacar que aprender a resolver el cubo con este método requiere poca memorización de algoritmos como hemos vistos, ya que solo serían necesario dos para orientar aristas y vértices y otros cuatro para permutar aristas y vértices.

La parte a mejorar de este método sería que la memorización es muy larga en el punto de permutación, ya que se tienen que ir enlazando piezas de tres en tres para colocarlas y saber qué posición van ocupando a medida que se van haciendo los ciclos.

4.2. Old/Classic Pochmann

Realizar este método para la resolución de un cubo de Rubik a ciegas, no implica que sea necesario aprenderse muchos algoritmos, basta únicamente con conocer un algoritmo para orientar vértices, otro para orientar aristas y otro para permutar piezas.

Este es un método en el cual las piezas se resuelven de una en una, conjugando distintos algoritmos de PLL (permutar todas las piezas en la última capa). La permutación y orientación de las piezas se resuelve al mismo tiempo en este método por lo que únicamente hay dos pasos que se pueden hacer en cualquier orden:

1. Colocar aristas
2. Colocar vértices

En este algoritmo vamos a utilizar la palabra **buffer** para referirnos a la pieza, o mejor dicho a la pegatina que utilizaremos para resolver el resto de piezas. Con una serie de algoritmos, nuestro buffer será sustituido por otra pieza, mientras que la posición que ocupa el buffer nunca cambia, solo se mueve la pieza que se encuentra en él.

En este algoritmo tendremos dos buffer, uno para aristas y otro para vértices.

El buffer de los vértices es la pegatina blanca en el vértice blanco-naranja-azul y en las aristas el buffer será la pegatina blanca en la arista blanca-rojo como se puede ver en la figura 4.14.

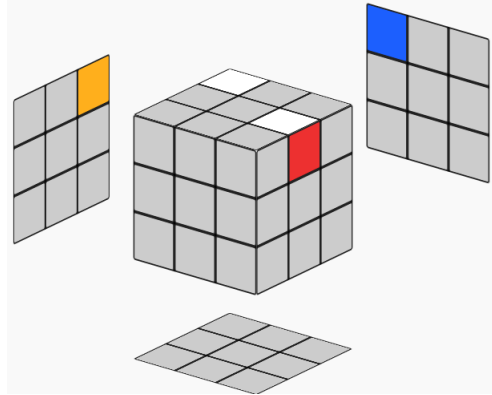


Figura 4.14: Buffer vértices y aristas (elaboración propia).

Es necesario tener en cuenta que hablamos de posiciones, no de piezas en concreto.

Por otro lado, llamaremos **target** al lugar donde enviaremos las piezas que queremos poner bien para que por medio del algoritmo elegido, enviemos la pieza situada en el buffer al target.

En los vértices tenemos estos dos targets: la pegatina blanca en el vértice blanco-verde-rojo y la pegatina roja en la vértice rojo-amarillo-verde como encontramos en la figura 4.15.

En las aristas tendremos tres targets: la pegatina blanca en la arista blanca-verde, la pegatina blanca en la arista blanca-naranja y la pegatina blanca en la arista blanca-azul como vemos en la figura 4.15.

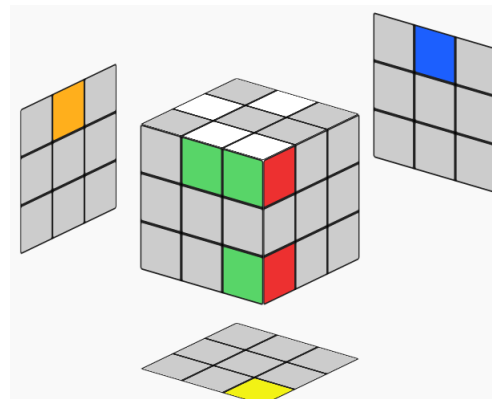


Figura 4.15: Targets de aristas y vértices (elaboración propia).

Para poder resolver el cubo de Rubik, es necesario mover las piezas a los lugares que ocupan los targets, estos movimientos deben deshacerse una vez realizado el algoritmo correspondiente para que no se alteren las posiciones iniciales que hemos memorizado. Los movimientos que no se pueden realizar son aquellos que alteren las posiciones de los buffers.

Para el buffer del vértice, los movimientos que no se podrán hacer serán los movimientos de las

caras B, U, L y sus variantes.

Para el buffer de la arista, los movimientos que no se pueden hacer serán los movimientos de las caras R, B, F, U y sus variantes.

A continuación, vamos a ver los algoritmos que nos van a ayudar a resolver el cubo de Rubik.

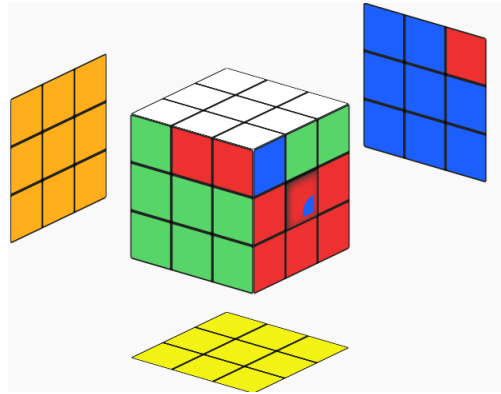


Figura 4.16: Algoritmo J_a : $R \ U \ R' \ F' \ R \ U \ R' \ U' \ R' \ F \ R^2 \ U' \ R' \ U'$ (elaboración propia).

Este algoritmo que podemos ver en la figura anterior 4.16, J_a , nos cambia la pieza que se encuentra en el buffer de las aristas, es decir, la pieza que se encuentra en la posición UR, por la pieza que se encuentra en la posición UF. Además, intercambia los dos vértices que están en la parte superior de la cara derecha, por lo que este algoritmo ha de realizarse un número par de veces para que vuelvan a estar en su sitio y no se altere la posición inicial del cubo.

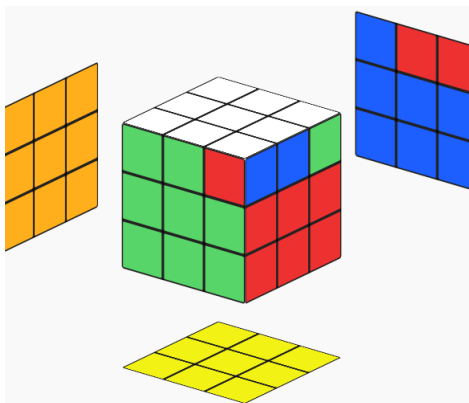


Figura 4.17: Algoritmo J_b : $R' \ U^2 \ R \ U \ R' \ U^2 \ L \ U' \ R \ U \ L'$ (elaboración propia).

Este algoritmo que podemos ver en la figura anterior 4.17, J_b , nos cambia la pieza que se encuentra en el buffer de las aristas, por la pieza que se encuentra en la posición UB, además de intercambiar los dos vértices que están en la parte superior de la cara derecha, por lo que este algoritmo ha de realizarse un número par de veces para que vuelvan las vértices a estar en su sitio.

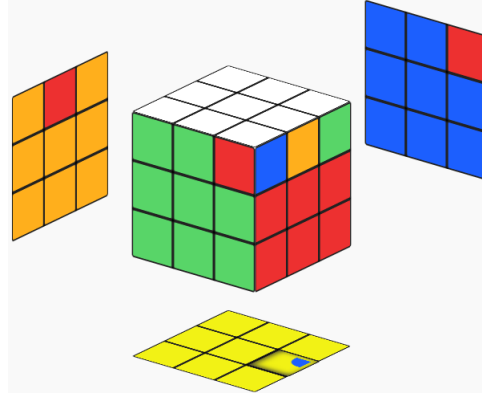


Figura 4.18: Algoritmo T : $R\ U\ R'\ U'\ R'\ F\ R^2\ U'\ R'\ U'\ R\ U\ R'\ F'$ (elaboración propia).

Por último, este algoritmo 4.18, T , nos cambia la pieza del buffer de la arista por la pieza que se encuentra en la posición UL . Este algoritmo cambia de nuevo dos vértices adyacentes, por lo que se tendría que realizar un número par de veces como he explicado anteriormente.

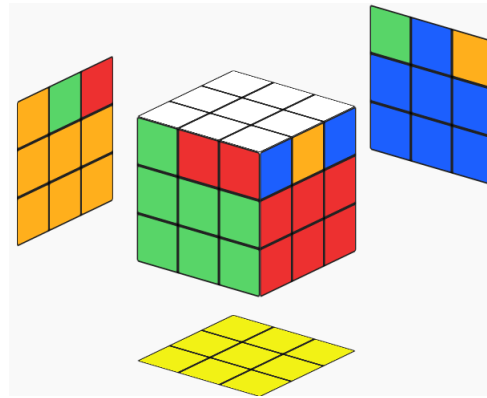


Figura 4.19: Algoritmo R_b : $L\ U^2\ L'\ U^2\ L\ F'\ L'\ U'\ L\ U\ L\ F\ L^2\ U$ (elaboración propia).

Este último algoritmo R_b , lo que permite es permutar tres aristas y tres vértices, en concreto, las mueve en sentido de las agujas del reloj, enviando la pieza del buffer a la posición UF , la de la posición UF , a la posición UL y la de la posición UL , a la posición de nuestro buffer.

Además de colocar cada pieza en su lugar, es necesario orientarlas para que estén en la posición correcta.

Se van a indicar dos algoritmos para la orientación de aristas, similares a los del método anterior pero en esta ocasión se orientan las aristas de la capa D :

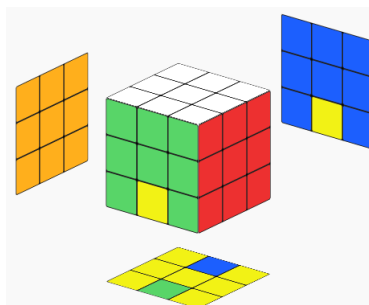


Figura 4.20: Algoritmo: $M D M D M D^2 M' D M' D M' D^2$ (elaboración propia).

Este algoritmo cambia la orientación de dos aristas opuestas.

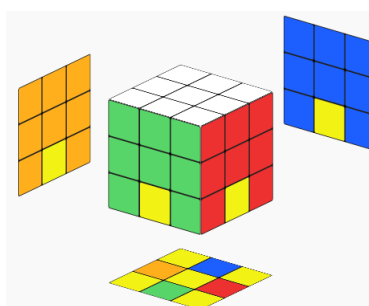


Figura 4.21: Algoritmo: $M D M D M D M D M' D M' D M' D M' D$ (elaboración propia).

Después de explicar cada uno de los algoritmos que nos permiten colocar las aristas de este método, se van a indicar unos movimientos previos que han de realizarse para que se consigan las posiciones favorables para la ejecución de dichos algoritmos.

Movimientos:

- $UL = "T"$
- $LU = (L' E D L') "T" (L D' E' L)$
- $BL = L "T" L'$
- $LB = (E D L') "T" (L D' E')$
- $RF = (D' E' L') "T" (L E D)$
- $FR = (D^2 E^2 L) "T" (L' E^2 D^2)$
- $BR = (E^2 D^2 L') "T" (L E^2 D^2)$
- $RB = (E D L) "T" (L' D' E')$
- $FL = L' "T" L$
- $LF = (D' E' L) "T" (L' E D)$
- $FU = M' "J_b" M$
- $UF = "J_a"$
- $DF = M^2 "J_b" M^2$
- $FD = M' "J_a" M$
- $BD = M "J_b" M'$
- $DB = M^2 "J_a" M^2$
- $UB = "J_b"$
- $BU = M "J_a" M'$
- $DR = S' "T" S$
- $DL = L^2 "T" L^2$

Una vez que hemos visto todos los algoritmos para permutar y orientar aristas, veamos qué algoritmos nos permiten cambiar nuestras piezas que se encuentran en el buffer de las vértices.

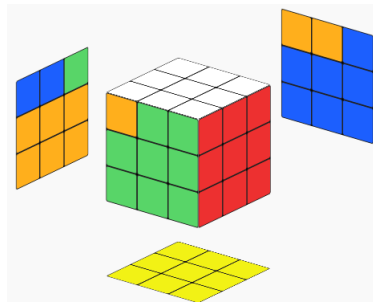


Figura 4.23: Algoritmo PLL J_a : $L U^2 L' U' L U^2 R' U L' U' R$ (elaboración propia).

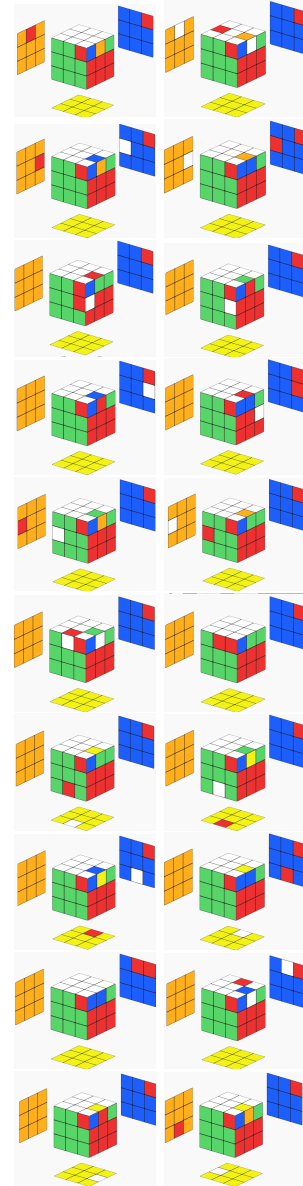


Figura 4.22: Elaboración propia.

Este algoritmo lo que hace es mover la pegatina blanca del buffer que es la pieza blanca-naranja-azul, a la pegatina blanca de la pieza que se encuentra en la posición ULF. Además, también ha intercambiado las dos aristas UF y UL, por lo que pasaría igual que en los algoritmos anteriores, necesitaríamos realizarlo un número par de veces.

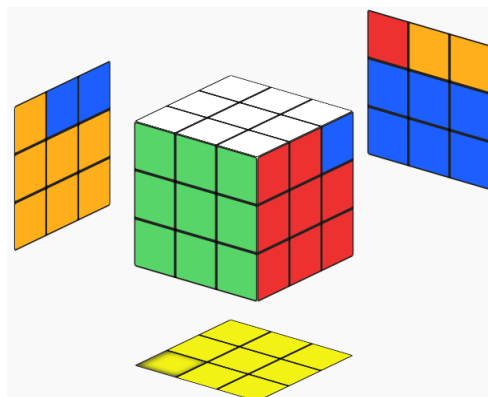


Figura 4.24: Algoritmo PLL J_b : $R' U L' U^2 R U' R' U^2 R L U'$ (elaboración propia).

Este algoritmo se utiliza para cambiar la pegatina blanca de la pieza situada en nuestro buffer de los vértices, por la pegatina blanca situado en la posición URB.

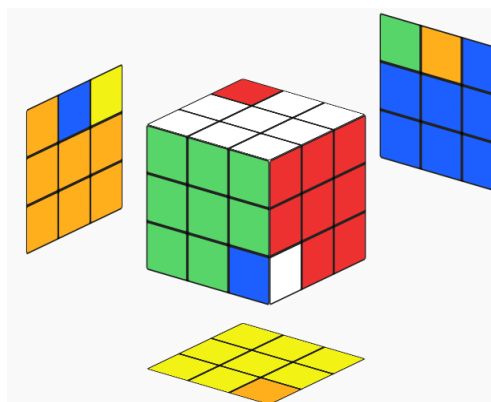


Figura 4.25: Algoritmo Y: $R U' R' U' R U R' F' R U R' U' R' F R$ (elaboración propia).

Por último, este algoritmo nos lleva la pegatina blanca que se encuentra en la posición de nuestro buffer, por la pegatina roja de la pieza situada en la posición DRF de la imagen que vemos 4.25.

Una vez visto el algoritmo que nos ayuda a resolver los vértices del cubo de Rubik, veamos los movimientos que hay que hacer previamente para que se produzcan las condiciones favorables que nos permita resolverlo.

Movimientos:

- RDF = “Y”
- DFR = R2 “ J_b ” R2
- FRD = (R F) “Y” (F’ R’)
- BDR = D’ “Y” D
- DRB = (R2 F) “Y” (F’ R2)
- RBD = R “Y” R’
- LDB = D2 “Y” D2
- DBL = (D F’) “Y” (F D’)
- BLD = (D’ R) “Y” (R’ D)
- LFD = F “ J_a ” F’
- FDL = D “Y” D’
- DLF = F’ “Y” F
- UBR = “ J_b ”
- BRU = (R’ F) “Y” (F’ R)
- RUB = R2 “Y” R2
- URF = F “Y” F’
- RFU = R’ “Y” R
- FUR = R “ J_b ” R’
- UFL = “ J_a ”
- FLU = (F’ D) “Y” (D’ F)
- LUF = F2 “Y” F2

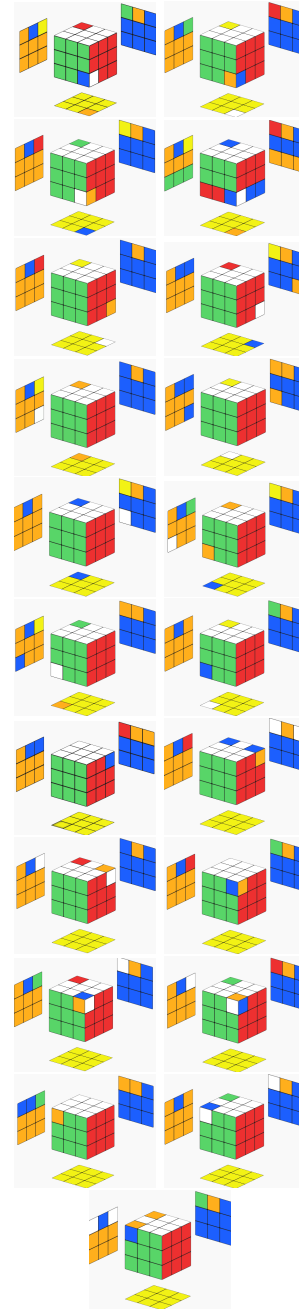


Figura 4.26: Elaboración propia.

En este método, la orientación de las piezas se debe de hacer en medio de la resolución de las aristas o de los vértices, es decir, resolver primero las aristas, luego la orientación y luego resolver los vértices o viceversa.

Para finalizar la explicación de este método me gustaría destacar cuales son las partes buenas y las partes mejorables para que la resolución del cubo sea más eficaz.

COMENTARIOS:

Por un lado, el aprendizaje y memorización de estos algoritmos sería muy sencillo ya que son muy cortos y muy intuitivos una vez que hay un buen control del cubo de Rubik.

Por otro lado, los algoritmos que se realizan en la capa superior tienen muchos movimientos por lo que el tiempo de resolución sería mayor además de resolverse todo el cubo pieza por pieza.

4.3. M2/R2

Este método, al igual que el que acabamos de ver, resuelve piezas de una en una, la diferencia es que en este no se utilizan algoritmos en la última capa, en su caso, utiliza movimientos M2 para permutar aristas y R2 para permutar vértices, la permutación y orientación de las piezas se resuelve al mismo tiempo en este método por lo que únicamente hay dos pasos que se pueden hacer en cualquier orden:

1. Orientar y permutar aristas
2. Orientar y permutar vértices

Nos vamos a centrar primeramente en la **orientación y permutación de aristas**, por lo que estaríamos en la parte de los movimientos M2.

En este método, la pieza que utilizaremos como buffer de las aristas será la pieza situada en la posición DF, y será enviada a la pieza situada en la posición UB que será nuestro target como podemos ver en la figura 4.27. En concreto, la pegatina que está abajo de la DF, irá a la pegatina que está arriba de la posición UB.

Si nos fijamos en la imagen, la pieza del buffer puede ir al target con M2, por lo que este método tendrá muchos algoritmos cortos que lleven las aristas al buffer para que mediante M2, se envíe a su lugar correspondiente.

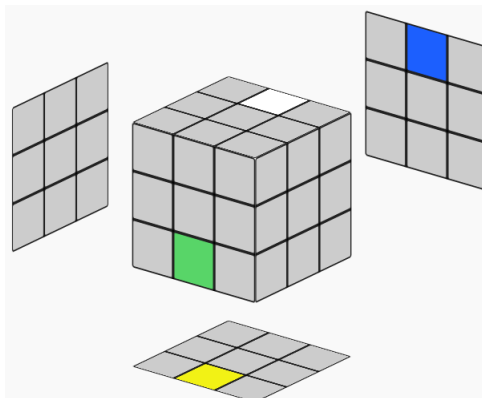


Figura 4.27: Buffer y target M2/R2 aristas (elaboración propia).

A continuación, voy a describir los diferentes movimientos que se pueden hacer para llevar a la posición del target, la pieza que se encuentra en la posición hacia la que queremos llevar la pieza que está en el buffer, para después de que realicemos M2, deshacemos el movimiento correspondiente, y finalmente la pieza se encuentre en su sitio.

Movimientos

- $UR = (R' U R U') M2 (U R' U' R)$
- $RU = (x' U' R U) M2 (U' R' U x)$
- $UL = (L U' L' U) M2 (U' L U L')$
- $LU = (x' U L' U') M2 (U L U' x)$
- $BR = (U R' U') M2 (U R U')$
- $RB = (x' R U' R' U) M2 (U' R U R' x)$
- $BL = (U' L U) M2 (U' L' U)$
- $LB = (x' L' U L U') M2 (U L' U' L x)$
- $DR = (U R2 U') M2 (U R2 U')$
- $RD = (x' U' R' U) M2 (U' R U x)$
- $DL = (U' L2 U) M2 (U' L2 U)$
- $LD = (x' U L U') M2 (U L' U' x)$
- $FR = (U R U') M2 (U R' U')$
- $RF = (x' U' R2 U) M2 (U' R2 U x)$
- $FL = (U' L' U) M2 (U' L U)$
- $LF = (x' U L2 U') M2 (U L2 U' x)$
- $UB/BU = M2$
- $DB/BD = M U2 M U2$

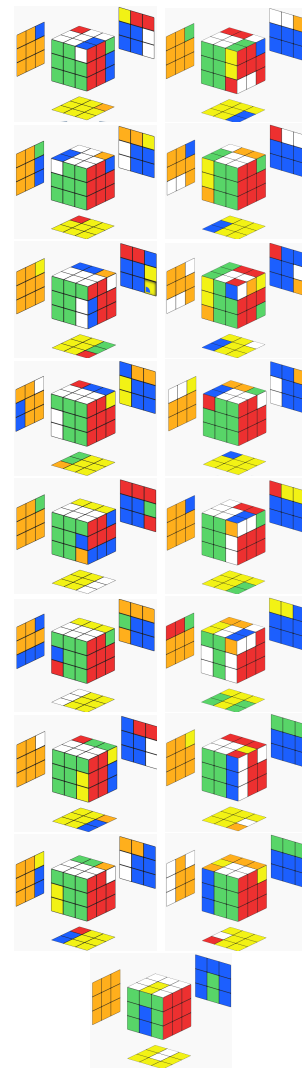


Figura 4.28: Elaboración propia.

Se realizan estos movimientos y no otros mucho más intuitivos debido a que las piezas del medio no pueden moverse, en ningún caso pueden cambiar, por eso se realizan los movimientos necesarios, después M2, y por último se hacen los movimientos inversos del principio, lo que se conoce como una conjugación en matemáticas.

Para orientar aquellos bordes que al finalizar no lo estén, se utilizaría algunos de los algoritmos que hemos ido viendo a lo largo del trabajo

Ejemplo 4.3.1. Supongamos que tenemos el siguiente caso en el cubo de Rubik:

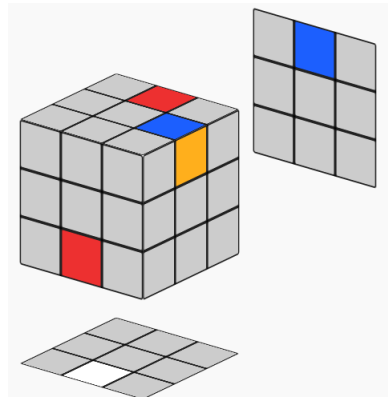


Figura 4.29: Resolución aristas método M2/R2 (elaboración propia).

El objetivo es llevar la pieza situada en el buffer, que en este caso es la pieza roja y blanca a su posición, que es la posición UR, donde se encuentra la pieza azul y naranja.

Viendo los movimientos que hay en la lista anterior, utilizaríamos el primero de ellos para enviar la pieza azul y naranja a la posición del target.

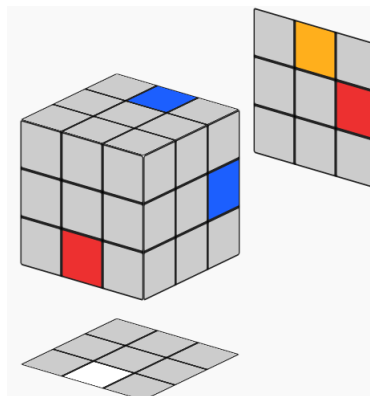


Figura 4.30: $R' U R U'$ (elaboración propia).

Posteriormente, realizaríamos M2 para enviar la pieza del buffer a la posición del target

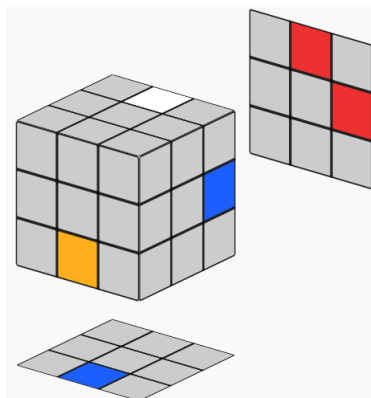
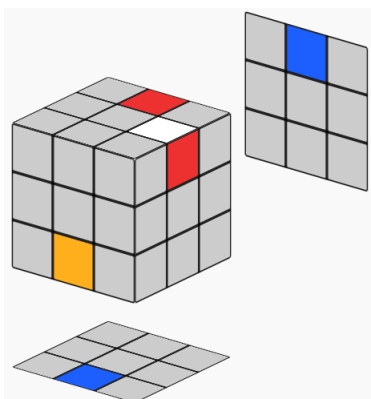


Figura 4.31: M2 (elaboración propia).

Por último, deshacemos el movimiento que hemos realizado al principio para colocar la pieza en su lugar

Figura 4.32: $U R' U' R$ (elaboración propia).

Para finalizar la explicación de este método, vamos a centrarnos en explicar la **orientación y permutación de los vértices**, por lo que estaríamos en la parte de los movimientos R2. En este método, la pieza que utilizaremos como buffer de los vértices será la pieza situada en la posición DFR, y será enviada a la pieza situada en la posición UBR que será nuestro target.

Si nos fijamos en la imagen 4.33, la pieza del buffer puede ir al target con R2, por lo que de nuevo veremos muchos algoritmos cortos que lleven los vértices al buffer para que mediante R2, se envíe a su lugar correspondiente.

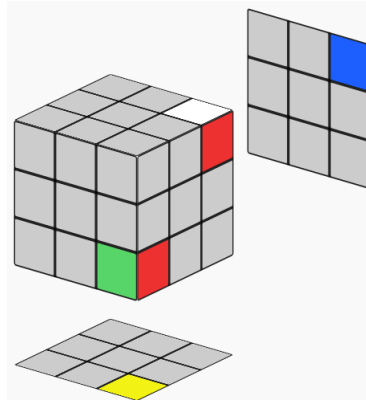


Figura 4.33: Buffer y target M2/R2 vértices (elaboración propia).

A continuación, voy a describir los diferentes movimientos que se pueden hacer para llevar a la posición del target, la pieza que se encuentra en la posición hacia la que queremos llevar la pieza que está en el buffer, para después de que realicemos R2, deshacemos el movimiento correspondiente y finalmente la pieza se encuentre en su sitio.

Movimientos

- UBR: R2
- BRU: (U' L' U L U' L' U) R2 (U' L U L' U' L U)
- RUB: (U' L U L' U' L U) R2 (U' L' U L U' L' U)
- BLD: (U' L U) R2 (U' L' U)
- ULB: (L' U' L U) R2 (U' L' U L)
- DLF: (U' L2 U) R2 (U' L2 U)
- FLU: (R' U L U' R) R2 (R' U L' U' R)
- LBU: (U' L' U) R2 (U' L U)
- LUF: (L' U' L' U) R2 (U' L U L)
- LFD: (L2' U' L' U) R2 (U' L U L2')
- LDB: (L U' L' U) R2 (U' L U L')
- DBL: (U' L2 U L' U' L U) R2 (U' L' U L U' L2 U)
- FDL: (U' L' U L' U' L U) R2 (U' L' U L U' L U)
- UFL: (L U' L' U L' U' L U) R2 (U' L' U L U' L U L')
- BUL: (y R U R2 U' R' F2 (R U R2 U' R' y')
- RBD: R' U R2 U' R' F' R U R2 U' R' F
- RFU: F' R U R2 U' R' F R U R2 U' R
- BDR: y R U' R D2 R' U R D2 R2 y' R2
- FUR: R2 y R2 D2 R' U' R D2 R' U R' y'
- DBR: R2 U' L' U' L U R2 U' L' U L R2 U
- URF: U' R2 L' U' L U R2 U' L' U L U R2

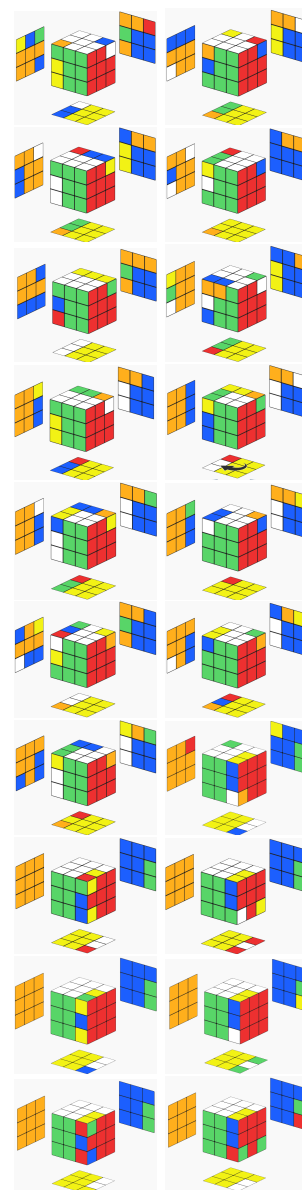


Figura 4.34: Elaboración propia.

Para orientar aquellos vértices que al finalizar no lo estén, se utilizaría algunos de los algoritmos que hemos ido viendo a lo largo del trabajo.

Ejemplo 4.3.2. Supongamos que tenemos el siguiente caso en el cubo de Rubik:

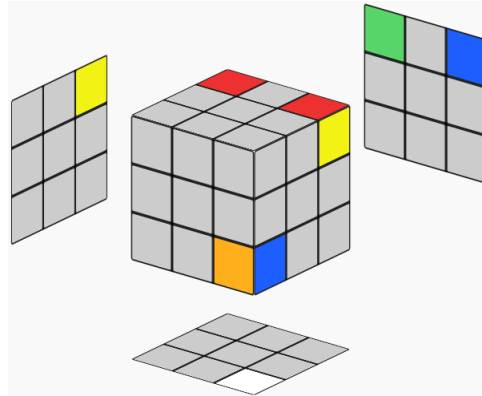


Figura 4.35: Resolución de vértices método M2/R2 (elaboración propia).

Como vemos, la pieza que se encuentra en nuestro buffer, debería de ir en la posición en la que está la pieza verde-roja-amarilla, que es la posición ULB, por lo que aplicamos el algoritmo que mueve esta pieza al target, como hemos visto anteriormente:

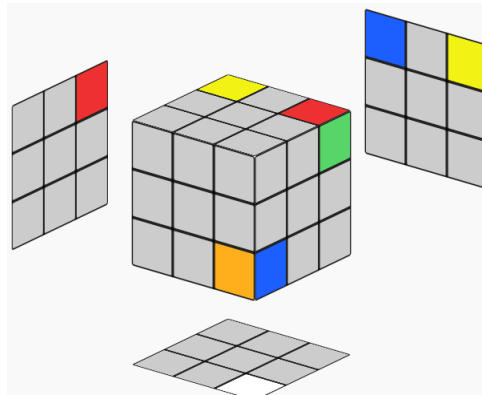


Figura 4.36: L' U' L U (elaboración propia).

A continuación, nos quedaría realizar el movimiento R2, para colocar la pieza que está en el buffer, en la posición del target, en concreto, el sticker blanco en la posición que ocupa el sticker rojo.

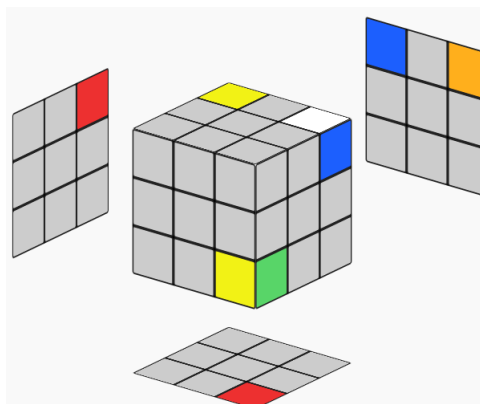


Figura 4.37: R2 (elaboración propia).

Por último, deshacemos el movimiento que hemos hecho al principio y finalmente se colocará la pieza en su sitio.

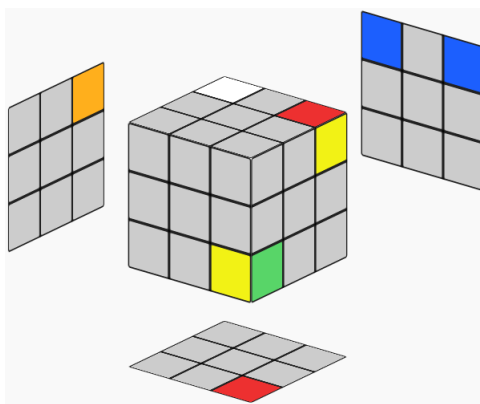


Figura 4.38: U' L' U L (elaboración propia).

La orientación en este método se realiza después de colocar las aristas y antes de empezar a colocar los vértices o viceversa.

Para terminar la explicación de este método me gustaría comentar al igual que he hecho con los dos anteriores las mejores características y las que se pueden mejorar para hacerlo más eficaz.

COMENTARIOS FINALES:

Este sería el método más rápido de los tres ya que los movimientos que se emplean (M2 y R2), son solo dos, no como los anteriores algoritmos que llegaban a tener 15 movimientos.

Por otro lado, los algoritmos que se hacen para mover las piezas al target no son tan intuitivos, habría que aprenderlos de memoria para realizarlos con rapidez, por lo que la memorización es más complicada.

Capítulo 5

Comparativa de los métodos de resolución a ciegas. Propuesta de mejora

En este capítulo se van a comparar los métodos estudiados en el capítulo anterior en relación con el número de movimientos que se realizan en cada uno de ellos y el proceso de memorización que se necesita para conseguir resolver el cubo de Rubik.

Se va a escoger un ejemplo del cubo deshecho 5.1 y se va a resolver con los tres métodos anteriores para poder contar el número de movimientos que se necesitan en su resolución.

El motivo por el que se ha escogido este ejemplo para resolverlo con los tres métodos estudiados en el capítulo anterior, es debido a que en la fuente bibliográfica [11], su autor ha realizado una comparación de este mismo ejemplo pero con la resolución de los métodos convencionales, por lo que al final de este capítulo se podrán comparar con los métodos a ciegas que se han estudiado.

No es un estudio significativo estadísticamente hablando pero sí es ilustrativo, ya que este capítulo se podría ampliar para realizar un trabajo específico estudiando muchas configuraciones del cubo y realizar un estudio estadístico con cada uno de los métodos para obtener el número medio de movimientos de cada uno de ellos, pero no ha dado lugar en este trabajo.

Comenzamos con el cubo de Rubik deshecho de esta forma:

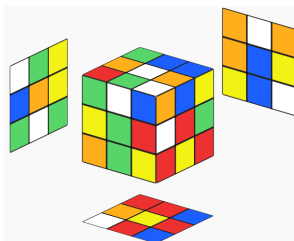


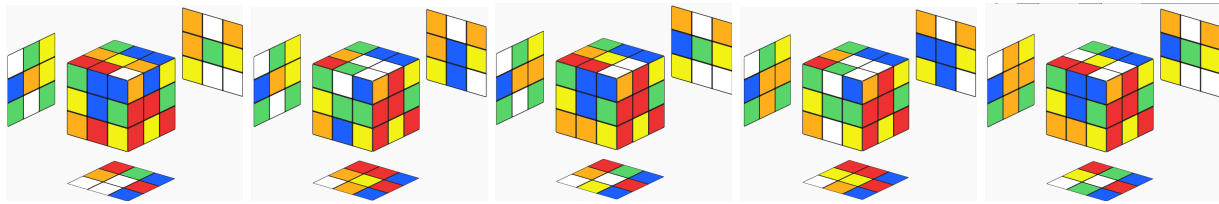
Figura 5.1: U B R' D' F R2 L D2 F U2 R2 F' R2 F U2 B' D' B' L2 (elaboración propia).

5.1. Utilizando el método M2/R2

Para resolver el cubo de Rubik utilizando este método, lo que se hace es, como hemos visto anteriormente, resolver las aristas con movimientos M2 y resolver los vértices con movimientos R2. Este método, hace dos movimientos seguros al querer colocar cada una de las piezas, ya que M2 y R2 se cuenta como dos giros para el cómputo total de movimientos. Además, para que cada pieza se coloque en su sitio, hay que realizar una serie de movimientos anteriores para colocar las piezas en la posición del target.

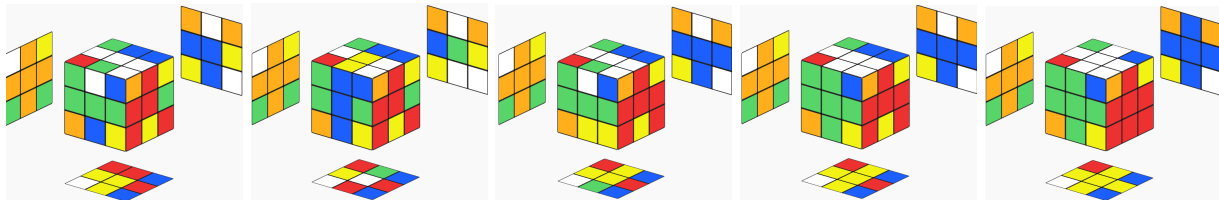
Número total de movimientos para colocar las aristas:

Para que la explicación sea más clara y contar el número de movimientos sea exacto, se van a ir poniendo imágenes del cubo de Rubik conforme se va a ir resolviendo junto con los movimientos que se están realizando para ello.



(a) RF: 10 movimientos (b) UR: 10 movimientos (c) LB: 10 movimientos (d) DL: 10 movimientos (e) LU: 8 movimientos

Figura 5.2: Paso M2 del ejemplo (elaboración propia).



(a) FL: 8 movimientos (b) BD: 6 movimientos (c) RB: 10 movimientos (d) 12 movimientos (e) 18 movimientos

Figura 5.3: Paso M2 del ejemplo (elaboración propia).

En los dos últimos pasos [5.3d](#) y [5.3e](#), se ha orientado las 4 aristas que tenemos mal orientadas, por lo que se utiliza el algoritmo que nos permite orientar dos aristas, dos veces, incluyendo en la última 6 movimientos para que se produjeran las condiciones favorables para poder aplicarlo. Por tanto, el número de movimientos que se necesitan para colocar las aristas en su posición adecuada es de **102 movimientos**.

Número total de movimientos para colocar los vértices:

Para contar el número de movimientos necesarios para resolver los vértices del cubo de Rubik, vamos a realizar el mismo procedimiento que para resolver las aristas.

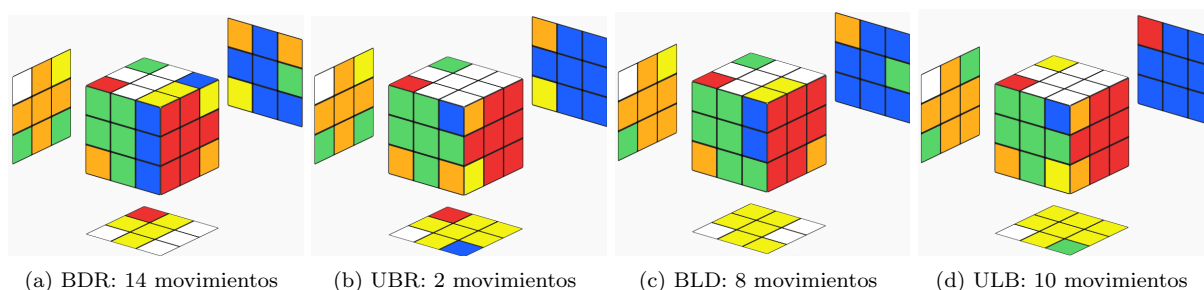


Figura 5.4: Paso R2 del ejemplo (elaboración propia).

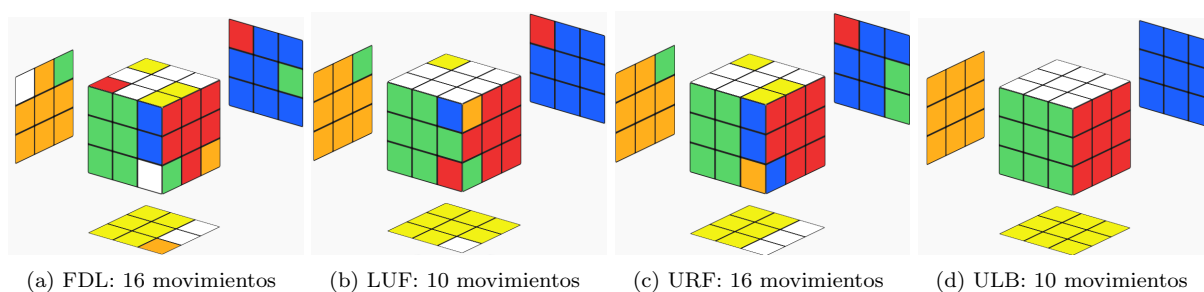


Figura 5.5: Paso R2 del ejemplo (elaboración propia).

Con la realización de los algoritmos vistos para resolver los vértices, hemos necesitado hacer **86 movimientos**.

En definitiva, utilizando el método M2/R2, son necesarios hacer un total de **188 movimientos** para resolver el ejemplo que hay en la figura 5.1.

5.2. Utilizando el método Old/Classic Pochmann

Para resolver el cubo de Rubik utilizando este método, lo que se hace es, como hemos visto anteriormente, resolver las aristas con tres algoritmos que envían la pieza que está en el buffer a los tres targets, en concreto, estos algoritmos los he llamado: T , J_b y J_a . Los vértices en este método se resuelven con el algoritmo llamado Y , que nos permite colocar en el sitio adecuado todos los vértices enviando las piezas colocadas en el buffer a su posición correspondiente utilizando el target.

Los algoritmos que he nombrado tienen una cantidad muy grande de movimientos, por lo que voy a ir haciendo cada uno de los pasos junto con el algoritmo utilizado para que sea más sencilla su comprensión.

Número total de movimientos para colocar los vértices:

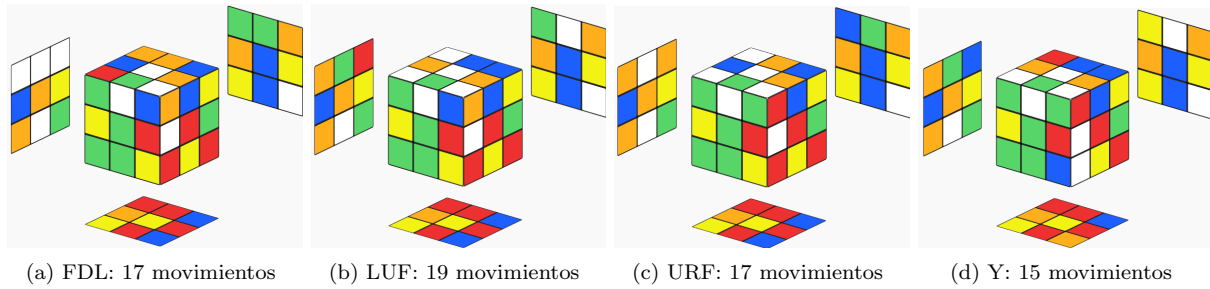


Figura 5.6: Colocación vértices del ejemplo utilizando Old Pochmann (elaboración propia).

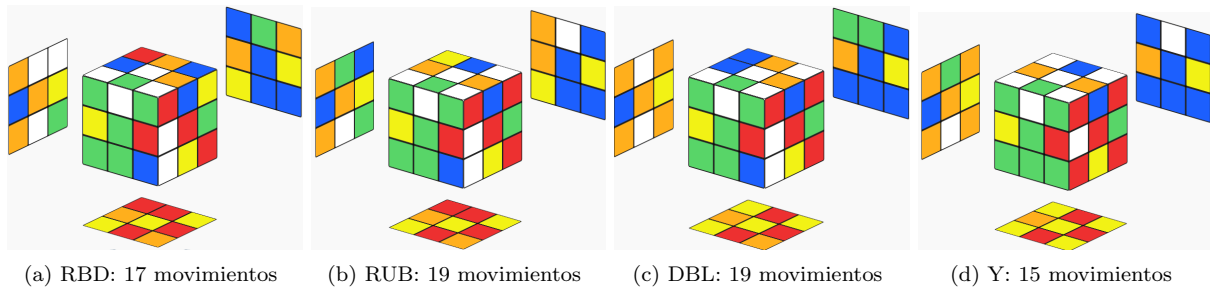


Figura 5.7: Colocación vértices del ejemplo utilizando Old Pochmann (elaboración propia).

Con la realización de los algoritmos vistos para resolver los vértices, hemos necesitado hacer **138 movimientos**.

Una vez colocados todos los vértices, se van a colocar todas las aristas utilizando los correspondientes algoritmos que he mencionado anteriormente.

Número total de movimientos para colocar las aristas:

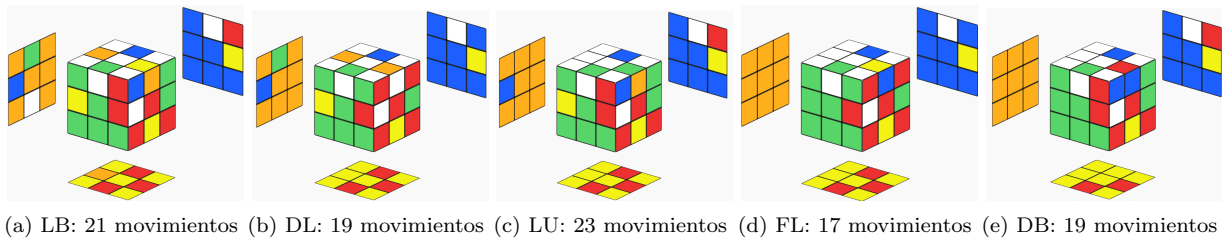


Figura 5.8: Colocación aristas del ejemplo utilizando Old Pochmann (elaboración propia).

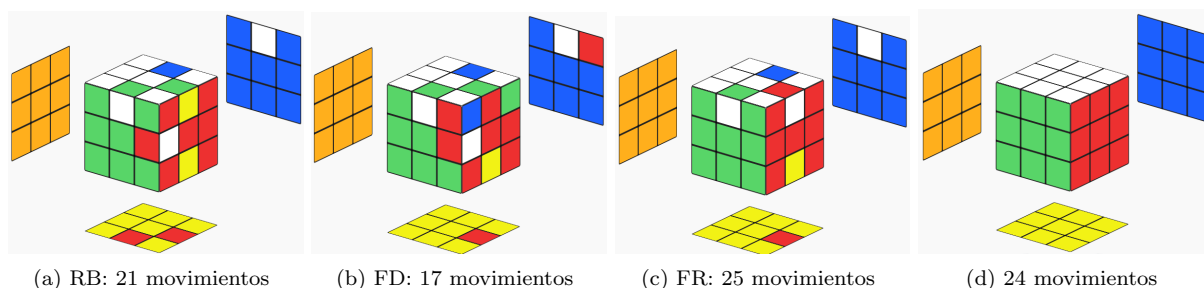


Figura 5.9: Colocación aristas del ejemplo utilizando Old Pochmann (elaboración propia).

En este paso de colocación y orientación de las aristas, en la última imagen, la figura 5.9a, se ha realizado la orientación de cuatro aristas y el algoritmo empleado ha sido el algoritmo de orientación más cuatro movimientos anteriores, en concreto:

$\{D2 L2 M U M U M U M U M' U M' U M' U M' U L2 D2\}$.

Para la colocación de las aristas se han necesitado **186 movimientos**, y si unimos ambas partes del método un total de **324 movimientos** hasta resolver el cubo de Rubik del ejemplo 5.1.

5.3. Utilizando el método 3OP

Por último, nos quedaría resolver el mismo ejemplo anterior con el método 3OP. Para ello, se ha seguido el mismo procedimiento que en los otros dos métodos.

Número de movimientos para la orientación de las aristas:

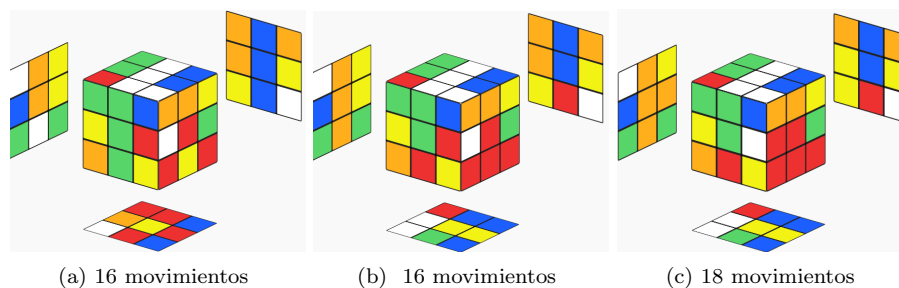


Figura 5.10: Orientación de aristas utilizando el método 3OP (elaboración propia).

Para orientar las aristas se han utilizado los algoritmos vistos en las figuras 4.1 y 4.2. En total, se han realizado **50 movimientos**.

Una vez orientadas las aristas, es necesario orientar los vértices.

Número total de movimientos para la orientación de los vértices:

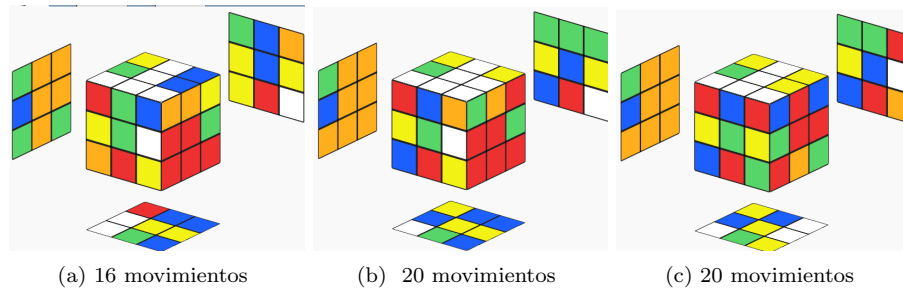


Figura 5.11: Orientación de vértices utilizando el método 3OP (elaboración propia).

Para la orientación de los vértices se ha utilizado el algoritmo explicado en la figura 4.5 y se han seguido los pasos que explico en dicha página. Para orientar los vértices se han utilizado **56 movimientos**.

Una vez que se han orientado todas las piezas del cubo de Rubik, se necesitan permutar cada una de ellas a su posición correcta para resolver el cubo.

Número total de movimientos para la permutación de aristas y vértices:

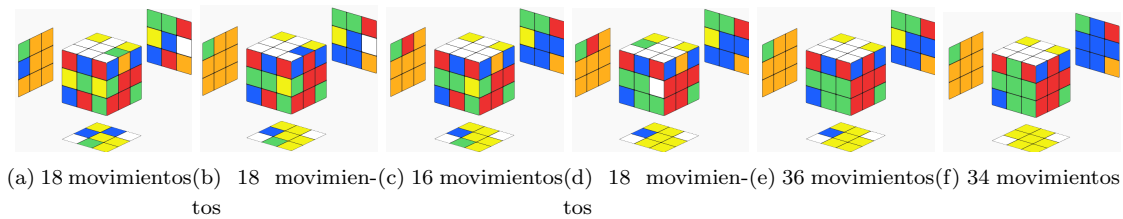


Figura 5.12: Permutación de aristas utilizando el método 3OP (elaboración propia).

Para permutar las aristas, se han empleado los algoritmos vistos en las figuras 4.10 y 4.11.

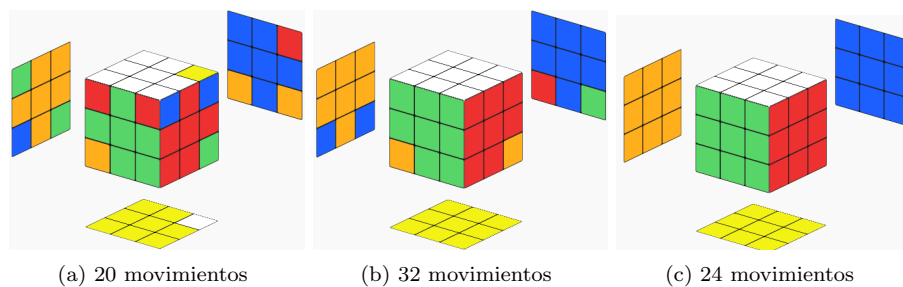


Figura 5.13: Permutación de vértices utilizando el método 3OP (elaboración propia).

La permutación de los vértices se ha realizado con los algoritmos vistos en las figuras 4.12 y 4.13. Para terminar de resolver el cubo de Rubik, se han necesitado utilizar **216 movimientos** para permutar todas las piezas en su lugar. Por lo que en este algoritmo se han realizado un total de **322 movimientos**.

5.4. Comparación de estos tres métodos

En esta sección se van a comparar conjuntamente los tres métodos estudiados en función de su número de movimientos y facilidad o complejidad para memorizarlos.

En cuanto al número de movimientos:

Comenzamos con el método Old Pochmann, que al utilizarlo en la resolución del ejemplo, se ha podido comprobar que necesita una gran cantidad de movimientos para conseguir resolverlo, al igual que el método 3OP. Estos dos métodos han utilizado un número similar de movimientos.

En el caso del método Old Pochmann es debido a que utiliza algoritmos que colocan las piezas del cubo de una en una, además de orientarlas a la misma vez, por lo que los algoritmos empleados tienen muchos movimientos. También, es necesario añadirle los que se necesitan para colocar las piezas en las posiciones indicadas que permitan la aplicación de los algoritmos.

En cuanto al método 3OP, se debe a que en él se realiza los pasos de orientación y permutación de aristas y vértices por separado, por lo que es necesario orientar las piezas antes y después permutarlas y así hacer el proceso de permutación más corto reduciendo posibilidades de colocación.

El número de movimientos empleados con el método M2/R2, ha sido considerablemente menor que los obtenidos en el método Old Pochmann y 3OP, debido a que en M2/R2, los dos algoritmos que se utilizan tienen solo dos movimientos (M2 y R2) y solo habría que añadirle los movimientos que lleven a los targets, las piezas que queremos colocar que se encuentran en los buffers, pero estos movimientos también los tienen los otros dos métodos.

En cuanto a la facilidad de memorización:

En función de los algoritmos que se emplean para resolver el cubo de Rubik, en el método 3OP, los algoritmos que se utilizan no son difíciles de memorizar, lo difícil es cuando hay que recordar los ciclos que se siguen en cada una de las piezas, ya que es necesario asociar piezas de tres en tres para ir resolviéndolas en ciclos, por lo que, con anterioridad, hay que colocar las piezas en las posiciones que van a ser afectadas por los algoritmos, antes de llevarlos a cabo.

El punto fuerte de los métodos Old Pochmann y M2/R2 sería la parte de memorización, ya que son pocos los que se utilizan y mucho más fáciles de memorizar. Sólo sería necesario aprenderse cada uno de los movimientos que llevan los vértices y las aristas a los buffers correspondientes, facilitando el proceso de memorización y ayudando favorablemente al tiempo empleado en resolverlo.

5.5. Comparación con los métodos normales de resolución

Para terminar este capítulo, se pondrá de manifiesto la gran diferencia que hay entre los métodos convencionales de resolución del cubo de Rubik y los métodos a ciegas, ya que los primeros, el principal

objetivo es resolver el cubo en el menor tiempo posible y utilizando un número mínimo de movimientos, mientras que los segundos, lo más importante es que no se alteren las posiciones de las piezas, ya que al estar con los ojos vendados sería imposible su memorización y su resolución si éstas cambiasen. En el artículo [11], se muestra esta imagen en la que, su autor, ha estudiado el número de movimientos que se harían con cada uno de los métodos convencionales utilizando mismo ejemplo que en este capítulo.

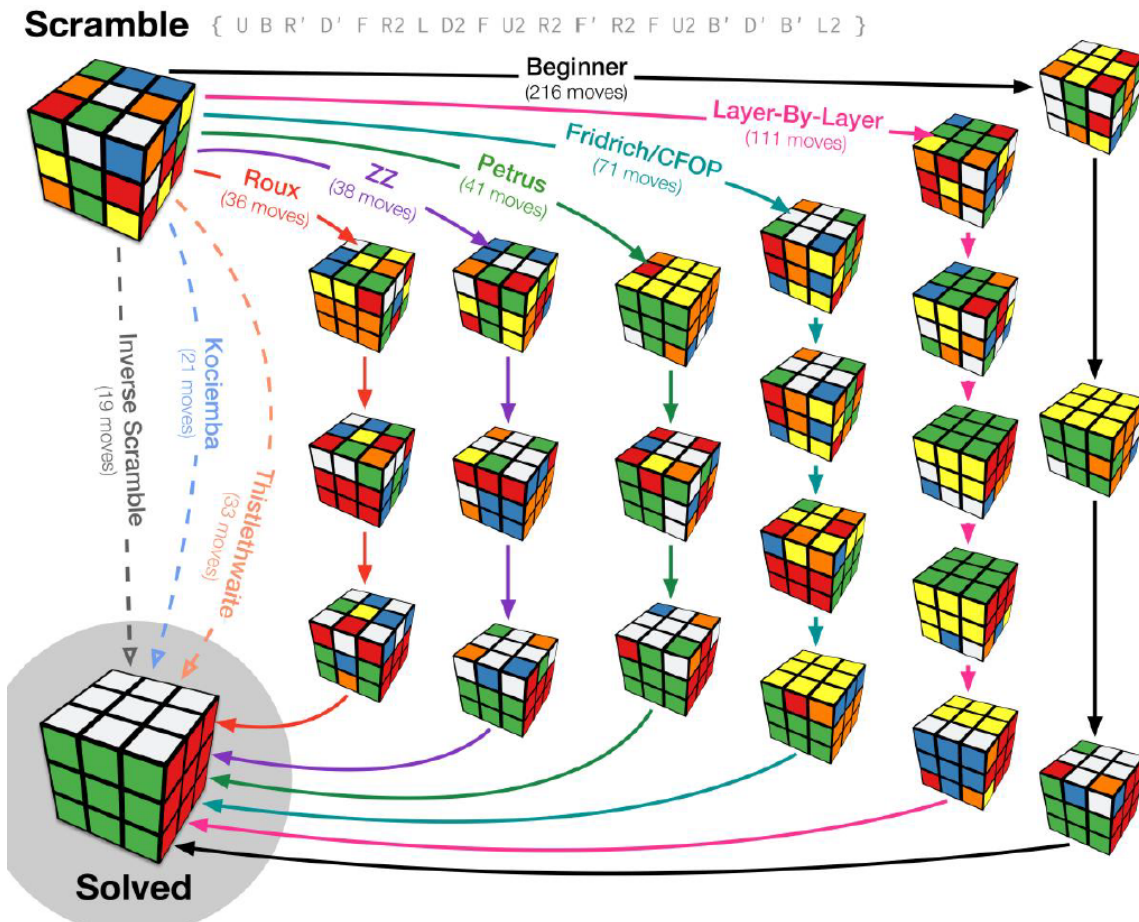


Figura 5.14: Métodos convencionales de resolución. Fuente:[11], página 5, figura 1

Se va a realizar una breve comparación de cada uno de estos métodos con los que se han estudiado en este trabajo.

- **Roux:** este método, como se puede comprobar, es uno de los métodos que menos movimientos necesita para resolver el cubo de Rubik (**38 movimientos**). Además, es uno de los más utilizados ya que se puede lograr un tiempo de resolución promedio por debajo de los 15 segundos. Su parte desfavorable sería que requiere de bastante experiencia, visión espacial y precisión con los dedos. Su memorización sería bastante asequible, ya que son pocos métodos los que se utilizan.
- **ZZ:** este método permite resolver el ejemplo utilizado del cubo de Rubik en **41 movimientos**, una cifra bastante menor que las que se han obtenido en la resolución a ciegas por lo que no sería comparable. Este método está dividido en cuatro partes, orientación de las aristas, resolución de la dos primeras capas y resolución de la última capa, muy similar al resto de métodos, pero su parte más interesante es la orientación de las aristas ya que es similar a la orientación que hemos utilizado en nuestros métodos a ciegas pero utilizando muchos menos movimientos.
- **Petrus:** Este método también utiliza pocos movimientos para resolver el ejemplo, en concreto **41 movimientos**, pero resuelve las dos primeras capas sin utilizar algoritmos, es decir de forma intuitiva y que esto implicaría la imposibilidad de utilizarlo para resolverlo a ciegas.

- **Fridrich:** Este método ya emplearía un número elevado de movimientos para resolver el cubo de forma convencional (**71 movimientos**). El procedimiento que sigue este método para resolver el cubo de Rubik se asemeja al que se sigue en los métodos a ciegas, ya que diferencia entre permutar y orientar piezas pero utilizando algoritmos que modifican la posición del resto.
- **Layer By Layer y Principiante:** entre estos dos métodos estaría comprendido el método M2/R2 en cuanto al número de movimientos, ya que las técnicas que emplean para su resolución no se asemejan.

La bibliografía utilizada para la elaboración de esta sección se encuentra recogida en las siguientes citas: [16], [10], [26], [25] y [27].

5.6. Propuesta de mejora

Una posible propuesta para mejorar la resolución del cubo de Rubik a ciegas utilizando una mezcla entre los métodos anteriores estudiados sería unir el método de Old Pochmann con el método M2/R2.

Por separado, el método M2/R2 ha utilizado 188 movimientos para la resolución del ejemplo y el método de Old Pochmann ha necesitado 324 movimientos.

Concretamente, utilizando el método de Old Pochmann para los vértices que serían **138 movimientos** y el algoritmo M2 para las aristas realizando **102 movimientos**, se necesitarían **240 movimientos** en total.

Con respecto al método Old Pochmann es clara la mejora que se ha realizado debido a que se ha reducido considerablemente el número de movimientos que se necesitan para resolver el ejemplo. Con respecto al método M2/R2, aunque se aumente el número de movimientos, mejora considerablemente la parte de memorización de los algoritmos ya que se estaría utilizando un mismo algoritmo en la colocación y orientación de vértices que, aunque es más extenso que R2, los movimientos anteriores para colocar las piezas en el target son muchos más cortos que los que se emplean en R2.

Por último, el motivo de utilizar M2 para colocar las aristas, es similar al anterior, el algoritmo M2 es inferior a los algoritmos J_a , J_b y T que se utilizan en Old Pochmann, y el número de movimientos que se necesitan para colocar las aristas en el target es similar en ambos métodos, por lo que es más conveniente realizar la colocación y permutación de las aristas con M2.

Cabe destacar que esta propuesta es mejorable usando ciertos algoritmos de los métodos tradicionales.

Conclusiones

La realización de este Trabajo Fin de Máster en la especialidad de Matemáticas, me ha ayudado a conocer muchos aspectos del cubo de Rubik que desconocía, debido a la escasa información que tenía sobre este rompecabezas, abordando temas relacionados con su funcionamiento y algoritmos de resolución a ciegas.

Uno de los aspectos que más me ha llamado la atención descubrir con la investigación realizada para elaborar este trabajo, han sido los diversos ámbitos matemáticos relacionados que tiene el cubo de Rubik para lograr su resolución, ya que se ha tenido que investigar y buscar información sobre temas tan variados como la teoría de grupos, permutaciones, ciclos, álgebra y estadística en el caso de realizar el número medio de movimientos de cada método.

El objetivo principal de este trabajo, era conseguir encontrar un método más eficaz en cuanto a número de movimientos y facilidad para memorizar algoritmos, que permitiese resolver el cubo a ciegas y justificase porqué estos métodos son los más utilizados por los speedcubers. Este objetivo se ha cumplido ya que se ha explicado matemáticamente cuál de los métodos abordados en este trabajo es mejor atendiendo esas pautas, además se ha explicado que posibles combinaciones de podrían hacer entre ellos para obtener un nuevo método más óptimo.

En la realización de la parte de teoría grupos y permutaciones, hemos obtenido como principal conclusión, que el cubo de Rubik podría utilizarse como herramienta para explicar esta parte de las matemáticas, ya que en sí es una herramienta matemática.

Con la parte de la notación, orientaciones y reglas de memorización, hemos aprendido y nos ha ayudado a entender los algoritmos que se utilizan para resolver el cubo de Rubik, conocer para que se utiliza la teoría de grupos en el estudio orientaciones de las piezas y también conocer reglas que ayudan en la memorización de los métodos de resolución a ciegas.

El capítulo en el que se han explicado los tres métodos de resolución a ciegas, nos ha servido para conocerlos y aprender qué partes destacan de cada unos de ellos para poder realizar el cubo de Rubik, a ciegas, de la forma más sencilla y práctica de todas.

Y por último, la parte final del trabajo, se ha realizado para comprobar cuál de los tres métodos es más eficaz en cuanto a movimientos utilizados, jugando las matemáticas un papel importante en este estudio. Además, se han comparado con los métodos tradicionales de resolución del cubo de Rubik.

Antes de comenzar la realización de este trabajo, como he comentado al comienzo del mismo, desconocía totalmente el funcionamiento del cubo de Rubik, nunca había conseguido resolverlo y mucho menos conocía la gran cantidad de aplicaciones matemáticas de muy alto nivel que tiene este puzzle. A pesar de no haber llegado a detallarlas, me han ayudado a entender su funcionamiento de

forma más exacta, permitiendo conocer la parte matemática de cada uno de los algoritmos que se utilizan para su resolución.

En resumen, conocer todo lo que conozco hasta ahora del cubo de Rubik ha sido un gran logro y ha supuesto generarme mucho interés para seguir investigando sobre este rompecabezas y poder mejorar algoritmos que se utilizan para su resolución desde el ámbito de las matemáticas.

Bibliografía

- [1] Albíter Alpízar, V. (2008). *Tutorial Blindfold principiantes*. Recuperado de <https://buenrollorubikfundation.wordpress.com/resolver-el-cubo/blindfold/>. (última consulta: 06/07/2022).
- [2] Angosto Hernández, C. (2010). *Manual de Blindfold Cubing*. Recuperado de <http://www.rubikaz.com/blind/blind.php> (última consulta: 08/04/2022).
- [3] Barrera Mora, F. (2003). *Introducción a la Teoría de grupos*. Recuperado de <http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/barrera-grupos.pdf> (última consulta: 06/07/2022).
- [4] Bueso Montero, J.L. *Álgebra II*. Departamento de álgebra. Grado en Matemáticas. Facultad de ciencias. Universidad de Granada.
- [5] Bueso Montero, J.L. *Álgebra III*. Departamento de álgebra. Grado en Matemáticas. Facultad de ciencias. Universidad de Granada.
- [6] Carmona Sánchez, I. (2013). *Juegos y teoría de grupos*. Recuperado de <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/IreneCarmonaSanchez.pdf> (última consulta: 17/06/2022).
- [7] Davis, T. (2006). *Group Theory via Rubik's Cube*. Recuperado de <https://w3.ual.es/~jcdiaz/docencia/matdis/group.pdf> (última consulta: 17/06/2022).
- [8] García Morales, R. (2017). *El cubo de Rubik en las aulas como elemento potenciador de la inteligencia espacial y lógico matemática*. Recuperado de <https://redsocial.rededuca.net/cubo-de-rubik-en-las-aulas-inteligencia> (última consulta: 06/07/2022).
- [9] Gutiérrez Cerda, F. (2021). Conmutadores y conjugados en el Cubo de Rubik. Recuperado de <https://docentefelipegutierrezcerda.blogspot.com/2021/03/conmutadores-y-conjugados-en-el-cubo.html> (última consulta: 18/05/2022).
- [10] Ibero Rubik. (2016). *Cubo de 3x3x3 Método Fridrich (modificado)*. Versión 4. Actualizado el 08/02/2016.
- [11] Madan C.R. (2020). *Considerations for Comparing Video Game AI Agents with Humans*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/343791969_Considerations_for_Comparing_Video_Game_AI_Agents_with_Humans (última consulta: 06/07/2022).
- [12] Michael Porter, R. (2018). *El álgebra del cubo de Rubik. Teoría y práctica*. Recuperado de <http://universo.math.org.mx/2018-1/Rubik/rubikinvariants.html> (última consulta: 24/04/2022).

- [13] Romero, R.E. (2013). *Juegos matemáticos. Las matemáticas del cubo de Rubik*. Recuperado de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/vol_III_num_2/jue_mat_rubik.pdf (última consulta: 24/04/2022).

Sitios Webs

- [14] Beneficios educativos del cubo de Rubik. Recuperado de <https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/beneficios-educativos-cubo-rubik/#:~:text=Desarrollo%20motriz%20con%20el%20cubo%20de%20Rubik,-Julen%20Correas%20Irazola&text=Afirma%20que%20mejora%20la%20memoria,reconocer%20elementos%20en%20el%20espacio>. (última consulta: 02/06/2022).
- [15] Blindfolded. Recuperado de https://aminoapps.com/c/cuberos_rubik/page/blog/el-blog-del-ciego-1era-parte/d8V5_nqhbuLrGLlmJogBdbr4YnxxxLz8vP (última consulta: 06/07/2022).
- [16] Cómo hacer el cubo de Rubik. Recuperado de <https://kubekings.com/blog/post/como-hacer-el-cubo-de-rubik> (última consulta: 08/07/2022).
- [17] Cómo resolver el cubo de Rubik de forma sencilla y fácil. Recuperado de [https://www.esquire.com/es/ciencia/a30272027/resuelve-cubo-rubik/#:~:text=Un%20cubo%20de%20Rubik%20tiene,21212!\)%2F12](https://www.esquire.com/es/ciencia/a30272027/resuelve-cubo-rubik/#:~:text=Un%20cubo%20de%20Rubik%20tiene,21212!)%2F12). (última consulta: 22/06/2022).
- [18] ¿Cuántas combinaciones tiene el cubo de Rubik? Recuperado de <https://www.iberorubik.com/2015/01/22/cu%C3%A1ntas-combinaciones-tiene-el-cubo-de-rubik/> (última consulta: 12/04/2022).
- [19] Cubo de Rubik y matemáticas. Recuperado de <https://divuladores.com/cubo-de-rubik-y-matematicas/> (última consulta: 01/07/2022).
- [20] El cubo de Rubik es más que un juego. Recuperado de <http://profundiza.org/el-cubo-de-rubik-es-mas-que-un-juego/> (última consulta: 15/04/2022).
- [21] Girar vértices del cubo de Rubik. Recuperado de <https://thecube.guru/es/solucion-cubo-rubik/paso-7/> (última visita 28/06/2022).
- [22] Historia del cubo de Rubik, ej juguete más vendido del mundo. Recuperado de <https://www.tinsa.es/blog/historia/historia-del-cubo-de-rubik-el-juguete-mas-vendido-del-mundo/> (última consulta: 22/06/2022).
- [23] Listado de métodos para blind solving. Recuperado de <https://www.facebook.com/notes/colombiarubik-tienda-de-cubos-de-rubiks-colombia/listado-de-m%C3%A9todos-para-blind-solving/665447276819622/> (última consulta: 07/06/2022).
- [24] Los misterios matemáticos del cubo de Rubik. Recuperado de <https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/los-misterios-matematicos-del-cubo-rubik/#:~:text=El%20cubo%20de%20Rubik%20toma,a%20comercializar%20en%20el%20pa%C3%ADs> (última consulta: 22/06/2022).
- [25] Método Petrus: Agilidad física y mental para obtener buenos tiempos. Recuperado de <https://www.iberorubik.com/2015/05/14/m%C3%A9todo-petrus-agilidad-f%C3%ADsica-y-mental-para-obtener-buenos-tiempos/#:~:text=El%20m%C3%A9todo%20de%20>

- 20Petrus%2C%20inventado,es%20decir%2C%20sin%20utilizar%20algoritmos. (última consulta: 08/07/2022).
- [26] Método de Roux: técnica y velocidad para los más experimentados. Recuperado de <https://www.iberorubik.com/2014/11/16/m%C3%A9todo-de-roux-t%C3%A9cnica-y-velocidad-para-los-m%C3%A1s-experimentados/#:~:text=El%20M%C3%A9todo%20Roux%20es%20una,debajo%20de%20los%2015%20segundos>. (última consulta: 08/07/2022).
- [27] Método ZZ. Recuperado de <https://sites.google.com/site/asociacionvascadelcuboderubik/fewest-moves/zz> (última consulta: 08/07/2022).
- [28] Notación básica para el cubo de Rubik. Recuperado de <https://kubekings.com/blog/post/notacion-cubo-de-rubik> (última consulta: 12/2/2022).
- [29] Paridad de una permutación. Recuperado de https://hmong.es/wiki/Even_permutation (última consulta: 08/07/2022).
- [30] Recursos cuberos. Recuperado de <https://sites.google.com/site/recursoscuberos/bld/3op-full> (última consulta: 06/07/2022).
- [31] Resolución del cubo de Rubik a ciegas. Memorización. Recuperado de http://www.euskalnet.net/el8tumbado/movsec/rubik_a_ciegas/rubik_a_ciegas_memorizacion.htm (última consulta: 11/04/2022).
- [32] Resolución del cubo de Rubik a ciegas. Orientación. Recuperado de http://www.euskalnet.net/el8tumbado/movsec/rubik_a_ciegas/rubik_a_ciegas_aristas_orientacion.htm (última consulta: 06/07/2022).
- [33] Resuelve a ciegas el 3x3. Método Pochmann. Recuperado de <https://www.stefan-pochmann.info/spocc/blindsolving/3x3/old.php> (última consulta: 13/03/2022).
- [34] Usando los cubos de Rubik para enseñar matemáticas. Recuperado de <https://docentesdesecundariablog.wordpress.com/2019/05/30/usando-los-cubos-de-rubik-para-ensenar-matematicas/> (última consulta: 06/07/2022).

Vídeos

- [35] Ar Speedcuber. (2016). *Como armar el cubo de Rubik a ciegas*. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=ELdDB14sluA> (última consulta: 24/05/2022).
- [36] Huanqui, G. (2017). *Tutorial más completo de 3x3 a ciegas*. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=yUWF3d3uqGw> (última consulta: 02/06/2022).
- [37] Mayor, N. (2019). *3x3x3 BLD método M2. Aristas*. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=sXo3cngO7f8> (última consulta: 23/04/2022).
- [38] Mayor, N. (2019). *3x3x3 BLD método Old Pochmann. vértices*. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=1QCIdbLKqrQ> (última consulta: 12/06/2022).